

# 薄肉構造部材に関する非定数係数, 非線形 常微分方程式の摂動解法と収束条件

PERTURBATION SOLUTION AND THE CONVERGENCE CONDITION  
FOR NONCONSTANT COEFFICIENT AND NONLINEAR ORDINARY  
DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THIN-WALLED  
STRUCTURAL MEMBERS

中 村 秀 治\*  
By Hideharu NAKAMURA

## 1. ま え が き

先に著者は, 折板構造物, 管路, 薄肉はりなどを解く際に現われる定数係数常微分方程式の有する特異な性質を指摘し, その特質を生かした 2 種類の解法を提案したり<sup>1)</sup>。その 1 つは, 基本的に正規形に変換された常微分方程式の係数マトリックスの固有値解析に基づいており, 退化したマトリックス, つまり縮重した固有値 0 を含むマトリックスのすべての固有値, 固有ベクトル, 主要ベクトルの計算法が詳細に検討された。しかし, この方法は原理的に定数係数方程式に適用範囲が限定されている。

薄肉構造部材で, 非定数係数あるいは非線形常微分方程式が現われるのは, 変断面あるいは大変形を考慮した場合である。変断面については, 非定数係数の解全体に与える影響は形状によって異なるが, 急激な断面寸法の変化, 板厚の変化を生じなければ, 断面変化による影響はわずかである。大変形では, 変形後のつり合い状態を考え, ひずみ-変位関係式において高次の微小項を含めることにより非線形項が生じるが, 多くの場合, 線形項の影響が大きく, 線形解を補正する形で非線形解が求められる。この点は弾性体を解析する際の大きな利点であり, 摂動法の適用できる根拠ともいえる。

本論文は, 摂動法により, 上記の線形問題に対する解法を非定数係数あるいは非線形方程式の場合にまで拡張することを試み, 解の収束条件について検討することを主目的としている。従来, 弾性論に対する摂動法の適用例は, 板の有限変位理論式の解析などにみられるが<sup>2), 3)</sup>, そのほとんどの場合, 面内変位, 面外変位の微小度にウェイトをつけ, 交互に収束させていく手順が採用されている<sup>4)</sup>。その理由は, 結果としてよりよい解の得られる

ことにあると考えられるが, 本論文においてそのような個々の問題における技巧的手法は検討されていない。構造解析で遭遇する非定数係数あるいは非線形連立常微分方程式の摂動解法と収束条件を, より一般的に検討するものである。

収束判定の方法として, 通常, 固有値問題に帰着させる方法と, Green 関数を用いた評価法が考えられるが, そのいずれも多くの困難を伴う。本論文では, 摂動解析過程の解を第一種 Legendre の多項式でいったん近似し, 第  $m$  次摂動解と第  $m+1$  次摂動解の収束判定を固有値解析に基づいて行う方法を提案する。

数値計算例としては, 非定数係数の場合の例として円錐殻の理論式を取り上げ, 非線形の場合の例として穴あき円形板の有限変位理論式を取り上げる。これらを種々の条件下で解く過程で, 本論文に述べた摂動解法および収束判定法の正当性を確認する。

## 2. 薄肉構造部材に関する非定数係数, 非線形 常微分方程式の摂動解法

摂動法は, 通常, 微小なパラメーター  $\epsilon$  を用いて, そのアルゴリズムの説明がなされるが,  $\epsilon$  自体には本質の意味はなともよい。ここでは, 薄肉構造部材の正規形に変換された連立常微分方程式の境界値問題に対して, 摂動法の適用を検討する。

### (1) 非定数係数線形常微分方程式の場合

$$\frac{dY(x)}{dx} = A(x)Y(x) + P(x) \dots \dots \dots (1)$$

において

$$\left. \begin{aligned} A(x) &= A_c + B(x) \\ Y(x) &= Y_0(x) + Y_1(x) + Y_2(x) + Y_3(x) + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

ここで,  $A_c$  は微小変位理論のもとに, 一様平均断面

\* 正会員 工博 電力中央研究所土木技術研究所

で導かれた定数係数マトリックス ( $n \times n$ ).  $Y$  は解ベクトル ( $n$ ).

と展開すれば, 式 (2) を式 (1) へ代入して,

$$\left( \frac{dY_0}{dx} + \frac{dY_1}{dx} + \frac{dY_2}{dx} + \dots \right) = (A_c Y_0 + P) + (A_c Y_1 + B Y_0) + (A_c Y_2 + B Y_1) + \dots \dots \dots (3)$$

そこで,

$$\left. \begin{aligned} \frac{dY_0}{dx} &= A_c Y_0 + P \\ \frac{dY_1}{dx} &= A_c Y_1 + B Y_0 \\ \frac{dY_2}{dx} &= A_c Y_2 + B Y_1 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

と置き, これらから逐次得られる解の総和が収束するならば, 1つの解法として摂動法が成立し得ることになる. この場合の境界条件は, 式 (4) の第1式が与えられた境界条件を満足し, 第2式以降は同次の補助条件を満足すべきである.

(2) 非線形常微分方程式の場合

(1) の場合と同様に

$$\frac{dY(x)}{dx} = A(x, Y)Y(x) + P(x) \dots \dots \dots (5)$$

において,

$$\left. \begin{aligned} A(x, Y) &= A_c + B(x, Y) \\ Y(x) &= Y_0(x) + Y_1(x) + Y_2(x) + Y_3(x) + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

ここで,  $A_c$  は微小変位理論のもとに, 一様平均断面で導かれた定数の係数マトリックス ( $n \times n$ ).  $Y$  は解ベクトル ( $n$ ).

と展開すれば, 式 (6) を式 (5) に代入して,

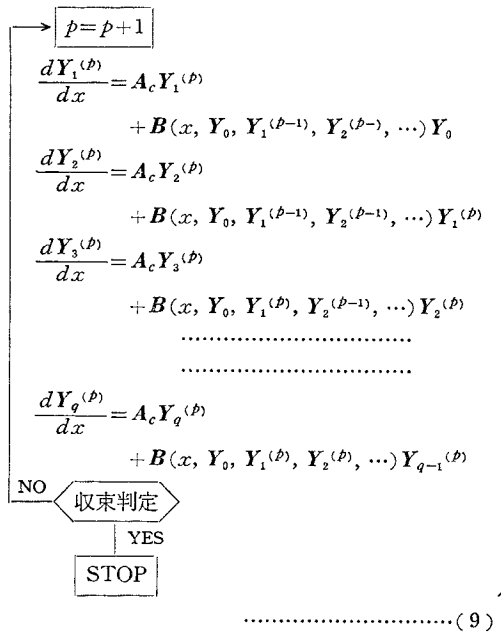
$$\left( \frac{dY_0}{dx} + \frac{dY_1}{dx} + \frac{dY_2}{dx} + \dots \right) = (A_c Y_0 + P) + \{A_c Y_1 + B(x, Y_0, Y_1, Y_2, \dots) Y_0\} + \{A_c Y_2 + B(x, Y_0, Y_1, Y_2, \dots) Y_1\} + \{A_c Y_3 + B(x, Y_0, Y_1, Y_2, \dots) Y_2\} + \dots \dots \dots (7)$$

そこで, 反復計算の出発値を

$$Y_1^{(0)} = Y_2^{(0)} = Y_3^{(0)} = \dots = 0 \dots \dots \dots (8)$$

として, 次のアルゴリズムが考えられる.

$$\left. \begin{aligned} p &= 0 \\ \frac{dY_0}{dx} &= A_c Y_0 + P \end{aligned} \right\}$$



境界条件は, 式 (9) の第1式の  $Y_0$  が, 与えられた境界条件を満足し, 第2式以後は同次の補助条件を満足すべきである. ただし, 境界条件が非線形で与えられている場合は, この解法の適用範囲外である.

3. 収束条件の検討

摂動法の第1ステップで求める線形解  $Y_0$  は, どのように境界条件が与えられた場合でも, その条件が不合理でない限りユニークに定められる. したがって, 収束条件としては, 以後のステップで得られる  $Y_i (i=1, 2, 3, \dots)$  が次の関係を満足すればよい.

$$\delta \|Y_0\| > \|Y_1\|, \delta \|Y_1\| > \|Y_2\|, \delta \|Y_2\| > \|Y_3\|, \dots \dots \dots (10)$$

ここで,  $\delta$  は定数とし,  $0 < \delta < 1$  である.

摂動解を得るための式は,

$$\frac{dY_m(x)}{dx} = A_c Y_m(x) + B(x) Y_{m-1}(x) \dots \dots (11) \quad (m=1, 2, 3, \dots)$$

(ここで, 非線形の場合,  $B(x, Y)$  であるが, 前ステップで得られた  $Y$  の近似値を  $B$  の計算に用いている. したがって,  $B(x)$  とみなして収束性の検討を行い得る) であるから, 収束判定条件として次の2通りの考え方が存在する.

(1) Green 関数に基づく評価法

式 (11) の Green 関数  $G$  が求められ, 境界条件がすべて0で与えられる場合,

$$Y_m = \int_0^L G(x, s) B(s) Y_{m-1}(s) ds \dots \dots \dots (12)$$

となる。

$Y_m$  の第  $i$  成分,  $Y_{m-1}$  の第  $j$  成分をそれぞれ,  $y_{m,i}$ ,  $y_{m-1,j}$  とし,  $G(x, s)$  の  $(i, k)$  成分,  $B$  の  $(k, j)$  成分をそれぞれ  $G_{ik}(x, s)$ ,  $B_{kj}$  とすれば, 両端の  $x$  座標を 0,  $L$  として, 式 (12) より

$$y_{m,i} = \sum_{j=1}^n \int_0^L \left( \sum_{k=1}^n G_{ik}(x, s) B_{kj} \right) y_{m-1,j} ds \dots (13)$$

したがって

$$\begin{aligned} y_{m,i}^2 &\leq n \sum_{j=1}^n \left[ \int_0^L \left( \sum_{k=1}^n G_{ik}(x, s) B_{kj}(s) \right) y_{m-1,j} ds \right]^2 \\ &\leq n \sum_{j=1}^n \left[ \int_0^L \left( \sum_{k=1}^n G_{ik}(x, s) B_{kj}(s) \right)^2 ds \right. \\ &\quad \left. \cdot \int_0^L y_{m-1,j}^2(s) ds \right] \\ &\leq n \sum_{j=1}^n \left[ \int_0^L n \left( \sum_{k=1}^n G_{ik}^2(x, s) B_{kj}^2(s) ds \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \int_0^L y_{m-1,j}^2(s) ds \right] \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} \int_0^L y_{m,i}^2 dx &\leq n^2 \sum_{j=1}^n \left[ \int_0^L \int_0^L \sum_{k=1}^n G_{ik}^2(x, s) \right. \\ &\quad \left. \cdot B_{kj}^2(s) ds dx \cdot \int_0^L y_{m-1,j}^2(s) ds \right] \dots \dots \dots (15) \end{aligned}$$

そこで, ノルムを次式で定め,

$$\|y_{m,i}\|^2 = \int_0^L y_{m,i}^2(x) dx \dots \dots \dots (16)$$

さらに, 多次元の場合のノルムを

$$\|Y_m\|^2 = \sum_{i=1}^n \|y_{m,i}\|^2 \dots \dots \dots (17)$$

と定めれば

$$\begin{aligned} \|Y_m\|^2 &\leq \|n^2 \int_0^L \int_0^L \sum_{k=1}^n G_{ik}^2(x, s) B_{kj}^2(s) ds dx\| \\ &\quad \cdot \|Y_{m-1}\|^2 \dots \dots \dots (18) \end{aligned}$$

となる。

この場合,  $\|n^2 \int_0^L \int_0^L \sum_{k=1}^n G_{ik}^2(x, s) B_{kj}^2(s) ds dx\|$  はマトリックスのノルムであり, 式 (17) のベクトルのノルムに適合するのは列ノルムである<sup>9)</sup>。したがって,

$$\text{Max.}_j \sum_{i=1}^n n^2 \int_0^L \int_0^L \sum_{k=1}^n G_{ik}^2(x, s) B_{kj}^2(s) ds dx < 1 \dots \dots \dots (19)$$

が1つの収束判定条件となる。

しかし, 問題は Green 関数  $G_{ik}$  をいかに求めるかである。式 (11) を変形し,

$$Y_m = \left( \frac{d}{dx} - A_c \right)^{-1} B Y_{m-1} \dots \dots \dots (20)$$

としたとき, 式 (20) に差分, 重みつき残差法などによる離散化を施し,  $Y_m, Y_{m-1}$  の境界条件を考慮して定数マトリックス  $\left( \frac{d}{dx} - A_c \right)$  を求めれば,  $\left( \frac{d}{dx} - A_c \right)^{-1}$  の列成分が Green 関数を表わす可能性がある。しかし, その必然性はない。

(2) 固有値解析に基づく評価法

式 (20) を何らかの方法で離散化し,  $Y_m, Y_{m-1}$  の境界条件を考慮して, 定数マトリックス  $\left( \frac{d}{dx} - A_c \right)$  と  $B$  を求め,

$$J = \left( \frac{d}{dx} - A_c \right)^{-1} B \dots \dots \dots (21)$$

とする。実数非対称マトリックス  $J$  のすべての固有値が複素平面上, 単位円内に存在すれば, これがもう1つの収束判定条件となる。この場合, 理論上はともかく, 実際上, 実数非対称マトリックスの全固有値を求めるのに 300~400 元が限界である<sup>9)</sup>ことを前提とすれば, 強い制約が生じる。すなわち,  $Y_m$  の次元数  $n$  と格子点数の積が 300~400 を越える場合は, 判定不可能なのである。したがって  $n$  が問題によって与えられたものである以上, できるだけ少ない格子点数で適切に式 (21) の演算を行う必要性が生じる。その一方法として, Legendre の多項式で  $Y_m, Y_{m-1}$  の各成分を近似し, 格子点として直交選点を用いる方法が考えられる。

Legendre の第1種多項式  $P_i$  を1から8次まで

$$P_1 = \bar{x}, P_2 = \frac{1}{2}(3\bar{x}^2 - 1), P_3 = \frac{1}{2}(5\bar{x}^3 - 3\bar{x}),$$

$$P_4 = \frac{1}{8}(35\bar{x}^4 - 30\bar{x}^2 + 3),$$

$$P_5 = \frac{1}{8}(63\bar{x}^5 - 70\bar{x}^3 + 15\bar{x}),$$

$$P_6 = \frac{1}{16}(231\bar{x}^6 - 315\bar{x}^4 + 105\bar{x}^2 - 5),$$

$$P_7 = \frac{1}{16}(429\bar{x}^7 - 693\bar{x}^5 + 315\bar{x}^3 - 35\bar{x}),$$

$$P_8 = \frac{1}{128}(6435\bar{x}^8 - 12012\bar{x}^6 + 6930\bar{x}^4 - 1260\bar{x}^2 + 35)$$

(ここで,  $-1 \leq \bar{x} \leq 1$  であり,  $0 \leq x \leq L$  の  $x$  に対しては  $\bar{x} = 2x/L - 1$  の変換が必要)

を採用し,  $Y_m$  を

$$Y_m = \begin{Bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{Bmatrix}_m = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^8 C_{1,i} P_i \\ \sum_{i=1}^8 C_{2,i} P_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^8 C_{n,i} P_i \end{Bmatrix}_m \dots \dots \dots (22)$$

( $C_{1,i}, C_{2,i}, \dots, C_{n,i}$  は任意定数)

とする。8次まで採用する根拠は数値計算例で触れる。

$(y_1(x))_m$  のみ取り出して考えれば,

$$\begin{Bmatrix} y_1(0) \\ y_1(x_1) \\ \vdots \\ y_1(x_6) \\ y_1(L) \end{Bmatrix}_m = \begin{Bmatrix} P_1(0) & P_2(0) & \dots & P_7(0) & \frac{P_8(0)}{P_8(0)} \\ P_1(x_1) & P_2(x_1) & \dots & P_7(x_1) & \frac{P_8(x_1)}{P_8(x_1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_1(x_6) & P_2(x_6) & \dots & P_7(x_6) & \frac{P_8(x_6)}{P_8(x_6)} \\ P_1(L) & P_2(L) & \dots & P_7(L) & \frac{P_8(L)}{P_8(L)} \end{Bmatrix}$$

$$\cdot \begin{Bmatrix} C_{1,1} \\ C_{1,2} \\ \vdots \\ C_{1,7} \\ C_{1,8} \end{Bmatrix}_m \dots\dots\dots (23)$$

となり、これを次式

$$(y_1)_m = X \cdot (C_1)_m \dots\dots\dots (24)$$

で表わせば

$$(y_1(x))_m = [P_1(x), P_2(x), \dots, P_8(x)] X^{-1} (y_1)_m = P X^{-1} (y_1)_m \dots\dots\dots (25)$$

である。ここで、 $x=0, L$  は両端の  $x$  座標であり、 $x_1, x_2, \dots, x_6$  は 6 次の Legendre 多項式の直交選点<sup>10)</sup>とする。また、

$$P' = [P_1'(x), P_2'(x), \dots, P_8'(x)] \dots\dots\dots (26)$$

とする。

式 (25) を用いれば、原方程式 (11) は

$$\left[ \begin{array}{c} P' \\ P' \\ \vdots \\ P' \end{array} \right] - [A_c] \left[ \begin{array}{c} P \\ P \\ \vdots \\ P \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} X^{-1} \\ X^{-1} \\ \vdots \\ X^{-1} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}_m = B Y_{m-1} \dots\dots\dots (27)$$

となる。式 (27) の  $P, P', B$  をさらに点  $x=0, x_1, x_2, \dots, x_6, L$  で離散化し、 $\tilde{P}, \tilde{P}', \tilde{B}$  とすれば、最終的に

$$(\tilde{P} - \tilde{A}_c \tilde{P}) \tilde{X}^{-1} \tilde{Y}_m = \tilde{B} \tilde{Y}_{m-1} \dots\dots\dots (28)$$

を得る。ここで、 $\tilde{A}_c, \tilde{X}^{-1}$  は  $Y_m, Y_{m-1}$  の離散化に伴って発生したマトリックスで

$$\tilde{A}_c = \begin{bmatrix} A_c & & & \\ & A_c & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_c \end{bmatrix}, \quad \tilde{X}^{-1} = \begin{bmatrix} X^{-1} & & & \\ & X^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & X^{-1} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (29)$$

であり、

$$\tilde{Y}_m = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}_m, \quad \tilde{Y}_{m-1} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}_{m-1} \dots\dots\dots (30)$$

である。

式 (28) を次式のように変形し、

$$\tilde{Y}_m = [(\tilde{P}' - \tilde{A}_c \tilde{P}) \tilde{X}^{-1}]^{-1} \tilde{B} \tilde{Y}_{m-1} \dots\dots\dots (31)$$

境界条件を導入したものに  $\approx$  を付与すれば、 $[(\tilde{P}' - \tilde{A}_c \tilde{P}) \tilde{X}^{-1}]^{-1} \tilde{B}$  の全固有値の絶対値が 1 未満で、振動スキームの収束性が保証される。

(3) 収束判定評価法の選択

以上述べた 2 つの評価法のうち Green 関数による方法は、解析的であれ数値的であれ、Green 関数が求まったという条件下において、理論的に確実な方法である。この種の評価の通例として、安全側に過剰評価する傾向は不可避であるが、計算量も少なく容易に実施し得るという利点がある。次元数  $n$  がきわめて小さく、Green 関数が簡単に求まる場合に有効であろう。

2 番目に提案した固有値解析に基づく方法では、収束評価の一手段として多項式近似の手法を導入している。解を十分よく近似して収束評価するために必要な多項式の項数など検討事項は残されているが、適用上、制約条件の少ないことが大きな利点である。実数非対称マトリックスの全固有値を求めるために、計算量は多くなるが、一般性をもった計算機プログラム (入力は係数マトリックス  $A_c, B$  と境界条件のみ) は容易に作成できる。本論文の数値計算例では、この方法を採用することにする。

4. 数値計算例

(1) 非定数係数を有する線形常微分方程式の場合

文献 2) に示した円錐殻の常微分方程式を例に取り上げる。この場合、式 (2) の定数係数マトリックス  $A_c$  には円筒殻の係数マトリックス<sup>2)</sup>を用い、円錐殻と等板厚、断面半径は円錐殻の平均半径とした。

計算モデルは図-1 に示したとおりである。左端を完全固定し、右端には剛な板が取り付けられ、水平軸まわりにモーメントを作用させる。表-1 にケース番号 1~10 の  $\alpha, L_0, L_1$  の値を示した。すべてのケースについ

表-1 円錐殻モデルの形状と収束判定結果

ケース番号	形 状			最大固有値の絶対値と Legendre 多項式の最大項数					振動解の収束	
	$\alpha$ (rad)	$L_0$ (cm)	$L_1$ (cm)	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	判 定	有効数字 4 桁収束に要した振動回数
1	0.	1 000 000.	1 000 020.	0.	0.	0.	0.	0.	収 束	1
2	0.099 67	316.571 1	336.670 8	0.036 84	0.043 68	0.021 73	0.018 41	0.019 51	収 束	4
3	0.321 75	92.233 1	113.314 9	0.137 34	0.128 59	0.095 37	0.087 60	0.084 77	収 束	5
4	0.643 50	41.666 7	66.666 7	0.256 27	0.299 41	0.297 55	0.293 98	0.284 46	収 束	11
5	0.785 40	31.819 8	60.104 1	0.416 86	0.339 18	0.432 79	0.435 74	0.421 83	収 束	14
6	0.872 66(50°)	26.868 5	57.983 0	0.725 53	0.430 30	0.526 25	0.534 87	0.518 04	収 束	18
7	0.959 93(55°)	22.240 7	57.109 6	0.869 59	0.463 86	0.621 97	0.637 76	0.618 22	収 束	30
8	1.047 20(60°)	17.527 8	57.527 8	0.929 72	0.513 50	0.714 10	0.738 83	0.717 37	収 束	38
9	1.134 46(65°)	12.197 8	59.521 8	0.956 12	0.627 66	0.798 56	0.833 07	0.810 82	収 束	60
10	1.221 73(70°)	5.347 7	63.823 8	1.837 50	2.328 83	1.242 02	1.203 76	1.014 70	発 散	

て、左端から右端までの距離は 20 cm, 平均半径は 32.5 cm, 板厚は 1 cm, ポアソン比は 0.3 である。

$\alpha, L_0, L_1$  は異なるが、ほぼ類似のモデルを Chang<sup>11)</sup> と Clark が解いており、文献 2) で著者の提案する直接積分法

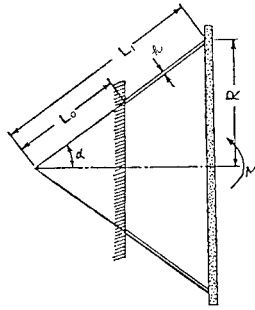


図-1 円錐殻の解析モデル

との比較が行われた。その結果、直接積分法の有効性は確認されたものとみなし、この方法による解を摂動解との比較、検討に用いることにした。図-2 はケース 2~4 の計算結果を図示したものである。図中、横軸、縦軸の  $\xi, \sigma_M, \sigma_N$  は次式で与えられる量である。

$$\xi = \frac{x/L_1 - L_0/L_1}{1 - L_0/L_1}, \quad \sigma_M = \frac{6M_x}{h^2}, \quad \sigma_N = \left[ \frac{N_x}{h} \right]_{\max}$$

ここで、 $M_x, N_x$  は文献 2) で示した量であり、円錐殻の各断面では最大値を取るものとする。

図示のとおり、ケース 2~4 はかなり速い収束傾向がみられるが、前章の収束判定法を適用して収束性検討を行うと表-1 のとおりである。ケース 10 を除いて、すべてのケースにおいて判定のための最大固有値絶対値は 1 以下である。すなわち収束するという判定結果であるが、実際に収束に要する摂動回数にはさまざまである。すべての解が有効数字 4 桁収束するのに要した回数を表-1 に示したが、最大固有値の絶対値と摂動回数の相関は非常に高い。絶対値が 1 に近づくほど収束が遅くなり、1 以上では発散する。Legendre 多項式の項数は、判定

結果に対してそれほど鋭敏ではない。6 次~8 次、つまり  $P_6 \sim P_8$  程度まで取れば、本計算例に対してはほぼ十分といえる。このような計算結果を根拠として、式 (22) の多項式の最大次数を定めている。

(2) 非線形常微分方程式の場合

ここでは、一例として横方向等分布荷重を受ける穴あき円板の大変形問題を取り上げる。円板の半径を  $a$  とし、中央部に半径  $b$  の穴があいているものとするれば、方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \\ = \frac{1}{D} \left( N_r \frac{dw}{dr} + \frac{r^2 - b^2}{2r} q \right) \\ \frac{d^2 N_r}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{dN_r}{dr} = -\frac{Eh}{2r^2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 \end{aligned}$$

ここで、 $w$ : 面外変位

$N_r$ : 半径方向直応力

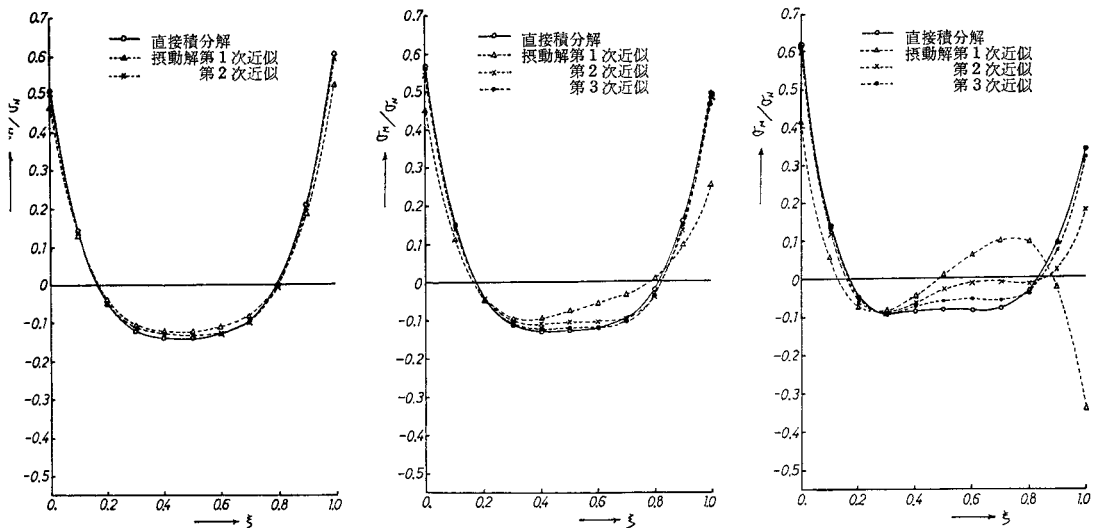
$r$ : 半径方向座標

$E, D$ : ヤング率, 板の曲げ剛性

$q$ : 等分布荷重

以上の式を正規形で表わせば、

$$\frac{d}{dr} \begin{Bmatrix} \frac{d^2 w}{dr^2} \\ \frac{dw}{dr} \\ w \\ \frac{dN_r}{dr} \\ N_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r} & \frac{1}{r^2} & 0 & 0 & \frac{1}{D} \frac{dw}{dr} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{Eh}{2r^2} \frac{dw}{dr} & 0 & -\frac{3}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



(a) ケース 2

(b) ケース 3

(c) ケース 4

図-2 摂動解の収束

$$\begin{aligned} & \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2w}{dr^2} \\ \frac{dw}{dr} \\ w \\ \frac{dN_r}{dr} \\ N_r \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \frac{r^2-b^2}{2rD} q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \\ & = \left[ \begin{array}{cc|cc} \frac{1}{r_0} & \frac{1}{r_0^2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{r_0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & + \left[ \begin{array}{cccc|c} -\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right) & \left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r_0^2}\right) & 0 & 0 & \frac{1}{D} \frac{dw}{dr} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{Eh}{2r^2} \frac{dw}{dr} & 0 & -\left(\frac{3}{r}-\frac{3}{r_0}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ & \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2w}{dr^2} \\ \frac{dw}{dr} \\ w \\ \frac{dN_r}{dr} \\ N_r \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \frac{r^2-b^2}{2rD} q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

となり、式 (5), (6) のとおり

$$\frac{dY}{dr} = [A_c + B(r, Y)]Y + P(r)$$

で表わされる式に帰着する。ここで、 $r_0$  は摂動スキームの収束性を改善するために導入したものであり、 $B$  マトリックス成分  $1/r$  の  $b \leq r \leq a$  における絶対値が最小になるように  $r_0 = 2ab/(a+b)$  とした。特にこの  $r_0$  による収束性改善が最良ということではない。

境界条件は、図-3 に示すように、円孔まわりの曲げモーメント  $M_r$  および  $N_r$  を 0 とし、外周上は完全固定とした。

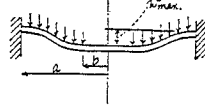


図-3 穴あき円板の解析モデル

この問題に対する線形解(厳密解)は、文献(12)に  $w_{max} = k(qa^4/Eh^3)$  の無次元量  $k$  で整理されている。式(9)に示した摂動スキームの適用結果が表-2, 3, 4である。それぞれ、 $a/b=1.25, 2.0, 5.0$  に対してであるが、非線形解であるため、無次元量  $w_{max}/h$  をパラメーターにしておのおのの  $k$  値を

表-2 非線形解析結果 ( $a/b=1.25$ )

$qa^4/Eh^4$	1	10	100	1000	線形解 (厳密解)
$w_{max}/h$	0.001992	0.01992	0.1990	1.812	
$k$ 値	0.001992	0.001992	0.001990	0.001812	0.00199

表-3 非線形解析結果 ( $a/b=2.0$ )

$qa^4/Eh^4$	0.01	0.1	1	10	線形解 (厳密解)
$w_{max}/h$	0.0005751	0.005751	0.05744	0.5214	
$k$ 値	0.05751	0.05751	0.05744	0.05214	0.0575

表-4 非線形解析結果 ( $a/b=5.0$ )

$qa^4/Eh^4$	0.01	0.1	1	線形解 (厳密解)
$w_{max}/h$	0.001743	0.01741	0.1607	
$k$ 値	0.1743	0.1741	0.1607	0.175

示した。変形が大きくなるに従って、荷重増分に対する変位増分が減少する傾向は明確に見出される。

なお、本解析の場合、 $a/b$  が小さいほど、等分布荷重が小さいほど収束が速く、式(9)における  $p$  は 2~3、各摂動回数は 3~5 回でほとんど収束している。ただし、 $a/b > 10$  で等分布荷重が大きくなれば、発散現象の生じることも確認されている。

### 5. 結 び

本論文では、薄肉構造部材を解析する際に遭遇する高階多元、非定数係数線形常微分方程式、あるいは非線形常微分方程式を摂動法で解く手法について検討した。さらに、収束条件についても検討し、収束判定方法を提案した。得られた結果を要約すると次のとおりである。

(1) 先に提示した薄肉構造部材に関する定数係数常微分方程式の解法は、摂動法の適用で容易に非定数係数線形常微分方程式、非線形常微分方程式の解法に拡張することが可能である。

(2) 収束判定法としては、2種類の方法、すなわち Green 関数に基づく方法と固有値解析に基づく方法があるが、実際問題への適用は両方もきわめて難しい。しかし、第2番目の方法を適用し、重みつき残差法による離散化後に固有値解析を行うならば、種々の制約を避けることができ、一定の手順で容易に収束判定することができる。

(3) 薄肉円筒殻の応力解析、穴あき円板の大変形解析に前述の方法を適用した結果は満足すべきものであり、本論文で述べた摂動解法ならびに収束判定法の有効なことが確認された。

謝 辞：本研究を行うにあたり、種々のご討議をい

ただいた電力中央研究所原子力構造研究室 青柳 栄氏  
に感謝の意を表します。

#### 参 考 文 献

- 1) 中村秀治：管路，薄肉はりなどの線形常微分方程式の一  
数値解析法，土木学会論文報告集，No. 271, 1978.
- 2) 中村秀治：円筒，円錐形状をもつ管路のシェルとしての  
応力解析，土木学会論文報告集，No. 285, 1979.
- 3) 中村秀治：数値誤差の改善を考慮した伝達マトリックス  
法の提案，土木学会論文報告集，No. 289, 1979.
- 4) Schmidt, R. and D.A. Dadeppo : Several Perturbation  
Solution in the Non-linear Theory of Circular Plates  
and Membranes, Industrial Mathematics, Vol. 25,  
Part 2, pp. 83~96, 1975.
- 5) Ames, W.F. : Non-linear Partial Differential Equa-  
tions in Engineering, Academic Press, 1965.
- 6) Bellman, R. : Perturbation Techniques in Mathe-  
matics, Physics, and Engineering, Athena Series,  
Holt, Rinehart and Winston, 1963.
- 7) Kantorovich, L.V. and V.I. Krylov : Approximate  
Methods of Higher Analysis, Translated by Benster,  
C.D., Interscience Publishers, pp. 97~103, 1958.
- 8) Zurmühl, R. : Matrizen und ihre Technischen An-  
wendungen, Springer-Verlag, 1964.
- 9) Smith, B.T., J.M. Boyle, J.J. Dongarra, B.S. Garbow,  
Y. Ikebe, V.C. Klema and C.B. Moler : Matrix  
Eigensystem Routines-EISPACK Guide, 2nd ed.,  
Springer-Verlag, 1976.
- 10) Finlayson, B.A. : The Method of Weighted Residuals  
and Variational Principles, Academic Press, 1972.
- 11) Chang, C.H. : An Asymptotic Solution of Conical  
Shells of Constant Thickness, AIAA, Vol. 5, No. 11,  
pp. 2028~2033, 1967.
- 12) Timoshenko, S.P. and S. Woinowsky-Krieger : Theory  
of Plates and Shells, McGraw-Hill, pp. 58~63, 1959.

(1983.5.27・受付)