

## 内部点源による 2 次元半無限弾性体表面の動的応答

DYNAMIC RESPONSE ON THE SURFACE OF AN ELASTIC HALF-SPACE  
UNDER THE BURIED LINE SOURCES

平島 健一\*・ジャン・アッケンバッハ\*\*

By Ken-ichi HIRASHIMA and Jan D. ACHENBACH

## 1. 緒 言

半無限体の表面あるいは内部に時間依存性の荷重や転位(変位の食い違い)等が発生した場合の表面における力学的応答特性は地盤上の衝撃や移動荷重, 地震による波動, あるいは最近注目を集めている材料の非破壊検査のための Acoustic Emission 技法等における基本的な問題であって従来よりかなりの数の研究が実施されている。この種の問題, 特に基盤内部に点源ないし分布源が存在する問題に対しては地震の発生機構に関連して 1960 年代より多くの地震学者によって精力的な取り組みがなされ最近ではその挙動の定量的な議論ができる程度にまで発展してきているといっても過言ではない<sup>1)</sup>。それらのうち奥行方向に一定な線荷重あるいは線転位(変位の食い違い)が存在する場合のいわゆる 2 次元な半無限体の動的応答に関する研究成果のうち, 解析的なアプローチを用いて閉じた形の解析ないしは精度のよい近似解を求めることを試みているものとして Garvin<sup>2)</sup>, Mitra<sup>3)</sup>, Payton<sup>4)</sup>, Niazzy<sup>5)</sup>, Brock<sup>6)</sup>, 著者ら<sup>7)</sup>, Madariga<sup>8)</sup> および Bouchon & Aki<sup>9)</sup> 等が列挙できるが, これらの論文では波動源の作用, 発生による初期挙動を含めた非定常な取り扱いがなされているとともに当然のことながら表面の存在による Rayleigh 波の影響についても一応の検討考察が行われている。著者らのここでの取り扱いは上述の成果をより一般化して定式化を行うとともに基本的な内部波動源(地震関係におけるせん断型転位のみだけでなく単一力(single force)が作用する場合および Acoustic Emission 関係でより重要な開口型転位も含む)によって生じる表面の応答を, 具体的な数値結果を通して示すことを目的としたものである。解

析手法は空間について Fourier 変換, 時間について Laplace 変換(以下 Fourier-Laplace 変換と略称)した変位に関する基本方程式(Navier の方程式)を同じく Fourier-Laplace 変換した表面あるいは内部に存在する時間依存の, 与えられた荷重ないし転位の初期ならびに境界条件のもとで変換領域の解(Fourier 逆変換後の像空間での解)として求め, Laplace 逆変換を Cagniard-DeHoop の手法<sup>10), 11)</sup>を用いて実領域での解に変換する方式を採用する。

## 2. 基本方程式と Fourier-Laplace 変換領域での形式解

変位表示した線形弾性体の運動方程式すなわち, Navier 方程式のうち奥行方向(y方向とする)の変位  $v$  が一定ないし零であるような 2 次元な場合には次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} C_T^2 \nabla^2 u + (C_L^2 - C_T^2) \cdot (u_{,x} + w_{,z})_{,x} \\ = u_{,tt} - \hat{F}_x(x, z, t), \\ C_T^2 \nabla^2 w + (C_L^2 - C_T^2) \cdot (u_{,x} + w_{,z})_{,z} \\ = w_{,tt} - \hat{F}_z(x, z, t). \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} C_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}, \quad C_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \\ \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned} \right\} \dots\dots (2)$$

であって,  $\lambda, G$  は Lamé の定数,  $C_L, C_T$  はそれぞれ縦波, 横波の伝播速度を表わす。 $\rho$  は媒体の密度, また  $u, w$  は  $x, z$  方向の変位であり,  $\hat{F}_x, \hat{F}_z$  は単位質量当たりの, 一般的に時間  $t$  に依存する体積力である。なおコンマ(,)後の添字はその文字の座標による偏微分を表わすものとする。

次に, 構成関係式(応力-ひずみ関係式)として等質・等方性を仮定し, 幾何学関係式(ひずみ-変位関係式)

\* 正会員 工博 山梨大学助教授 工学部土木工学科

\*\* Ph.D. ノースウェスタン大学教授 工学部土木・応用数学科 Walter P. Murphy Professor

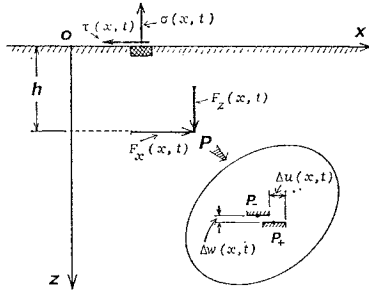


Fig. 1 Half-plane under the surface loads and the buried force and dislocation sources.

を用いれば応力成分  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{xz}$  および  $\tau_{zz}$  は変位  $u$  および  $w$  を用いて次のように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx} &= (\lambda + 2G)u_{,x} + \lambda w_{,z}, \\ \tau_{zz} &= (\lambda + 2G)w_{,z} + \lambda u_{,x}, \\ \tau_{xz} &= G(u_{,z} + w_{,x}). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

さて、ここで座標  $(x, z)$  を Fig. 1 に示したように  $z$  方向を表面からの深さ方向、 $x$  方向を水平方向にとるものとし、いまたとえば変位  $u$  についての変換に注目して、座標  $x$  に関して次のような Fourier 変換を考える。

$$u^*(k, z; t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, z; t) e^{-ikx} dx. \dots (4)_1$$

この逆変換は次式となる。

$$u(x, z; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u^*(k, z; t) e^{ikx} dk. \dots\dots\dots (4)_2$$

続いて式 (4)<sub>1</sub> の時間  $t$  に関して次のような Laplace 変換を考える。

$$\bar{u}^*(k, z; p) = \int_0^{\infty} u^*(k, z; t) e^{-pt} dt. \dots\dots (5)_1$$

この逆変換は次のように表わされる。

$$u^*(k, z; t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta - i\infty}^{\zeta + i\infty} \bar{u}^*(k, z; p) e^{pt} dp. \dots\dots\dots (5)_2$$

ここに、 $\zeta$  は Laplace 積分の収束座標とよばれるものである。

以上の変換関係式を一般化して適用すると式 (1), (3) はそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} C_T^2 \bar{u}_{,zz}^* - (p^2 + C_L^2 k^2) \bar{u}^* + ik(C_L^2 - C_T^2) \bar{w}_{,z}^* &= -\bar{F}_x^*, \\ C_L^2 \bar{w}_{,zz}^* - (p^2 + C_T^2 k^2) \bar{w}^* + ik(C_L^2 - C_T^2) \bar{u}_{,z}^* &= -\bar{F}_z^*. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau}_{xx}^* &= \rho C_L^2 (ik \bar{u}^* + m_2 \bar{w}_{,z}^*), \\ \bar{\tau}_{zz}^* &= \rho C_L^2 (ik m_2 \bar{u}^* + \bar{w}_{,z}^*), \\ \bar{\tau}_{xz}^* &= \rho C_T^2 (\bar{u}_{,z}^* + ik \bar{w}^*). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

ここに、

$$m_2 = 1 - 2C_T^2/C_L^2. \dots\dots\dots (8)$$

次に表面および内部波動源における境界条件を考えよう。いま Fig. 1 に示した半無限体の表面に時間関数の外荷重応力  $\sigma(x, t)$  および  $\tau(x, t)$  が作用し、同時に深さ  $z=h$  の内部の位置に同じく時間関数の物体力  $F_x(x, t)$ ,  $F_z(x, t)$  が作用するとともに転位 (変位の食い違い)  $\Delta u(x, t)$ ,  $\Delta w(x, t)$  が生じたものとする。このことを式で表示すれば次のように書き表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zz}|_{z=0} &= \sigma(x, t), \quad \tau_{xz}|_{z=0} = \tau(x, t), \\ [u]_{z=h-0}^{z=h+0} &= u|_{z=h+0} - u|_{z=h-0} = \Delta u(x, t), \\ [w]_{z=h-0}^{z=h+0} &= w|_{z=h+0} - w|_{z=h-0} = \Delta w(x, t), \\ [\tau_{xz}]_{z=h-0}^{z=h+0} &= \tau_{xz}|_{z=h+0} - \tau_{xz}|_{z=h-0} = -F_x(x, t), \\ [\tau_{zz}]_{z=h-0}^{z=h+0} &= \tau_{zz}|_{z=h+0} - \tau_{zz}|_{z=h-0} = -F_z(x, t). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)_{1-6}$$

式中の添字の  $\pm$  は  $z=h+0$  および  $z=h-0$  のように  $z=h$  での下, 上からの極限值を示すものである。また、無限遠点における放射の条件より

$$u|_{x,z \rightarrow \infty} = w|_{x,z \rightarrow \infty} = 0. \dots\dots\dots (9)_{7,8}$$

が成立しなければならない。

これらの境界条件の Fourier-Laplace 変換 (以下 F-L 変換と略記する) をとり、式 (7) を考慮すると次のような式が求められる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_{,z}^* + ik \bar{w}^* &= \frac{1}{\rho C_T^2} \bar{\tau}^*, \quad \text{at } z=0, \\ \bar{w}_{,z}^* + ik m_2 \bar{u}^* &= \frac{1}{\rho C_L^2} \bar{\sigma}^*, \quad \text{at } z=0, \\ [\bar{u}^*]_{z=h-0}^{z=h+0} &= \Delta \bar{u}^*, \quad [\bar{w}^*]_{z=h-0}^{z=h+0} = \Delta \bar{w}^*, \\ [\bar{u}_{,z}^*]_{z=h-0}^{z=h+0} &= -\left( ik \Delta \bar{w}^* + \frac{\bar{F}_x^*}{\rho C_T^2} \right), \\ [\bar{w}_{,z}^*]_{z=h-0}^{z=h+0} &= -\left( ik m_2 \Delta \bar{u}^* + \frac{\bar{F}_z^*}{\rho C_L^2} \right). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

F-L 変換後の支配方程式 (6) の右辺を零とおいた同次解は境界 (放射) 条件 (9)<sub>7,8</sub> を考慮すれば、一般に次のような形式で求められる。

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } 0 \leq z < h \text{ に対して,} \\ \bar{u}^* &= A_1 e^{-\nu_L z} + B_1 e^{-\nu_T z} + C_1 e^{\nu_T z} + D_1 e^{-\nu_T z}, \\ \bar{w}^* &= \frac{\nu_L}{ik} A_1 e^{-\nu_L z} - \frac{\nu_L}{ik} B_1 e^{-\nu_L z} \\ &\quad - \frac{ik}{\nu_T} C_1 e^{\nu_T z} + \frac{ik}{\nu_T} D_1 e^{-\nu_T z}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)_{1,2}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{b) } h < z < \infty \text{ に対して,} \\ \bar{u}^* &= B_2 e^{-\nu_L z} + D_2 e^{-\nu_T z}, \\ \bar{w}^* &= -\frac{\nu_L}{ik} B_2 e^{-\nu_L z} + \frac{ik}{\nu_T} D_2 e^{-\nu_T z}. \end{aligned} \right\} \dots\dots (11)_{3,4}$$

ここに、

$$\nu_L = \left( k^2 + \frac{p^2}{C_L^2} \right)^{1/2}, \quad \nu_T = \left( k^2 + \frac{p^2}{C_T^2} \right)^{1/2}. \dots (12)$$

これらの解を式(7)に代入整理するとF-L変換後の応力成分が次のように書き表わされる。

a)  $0 \leq z < h$  に対して,

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau}_{xx}^* &= \frac{\rho C_T^2}{ik} \left( \frac{p^2}{C_T^2} - 2\nu_L^2 \right) (A_1 e^{\nu_L z} + B_1 e^{-\nu_L z}) \\ &\quad + 2ik\rho C_T^2 (C_1 e^{\nu_T z} + D_1 e^{-\nu_T z}), \\ \bar{\tau}_{zz}^* &= \frac{\rho C_T^2}{ik} (k^2 + \nu_T^2) (A_1 e^{\nu_L z} + B_1 e^{-\nu_L z}) \\ &\quad - 2ik\rho C_T^2 (C_1 e^{\nu_T z} + D_1 e^{-\nu_T z}), \\ \bar{\tau}_{xz}^* &= 2\rho C_T^2 \nu_L (A_1 e^{\nu_L z} - B_1 e^{-\nu_L z}) \\ &\quad + \rho C_T^2 \left( \nu_T + \frac{k^2}{\nu_T} \right) (C_1 e^{\nu_T z} - D_1 e^{-\nu_T z}). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)_{1-3}$$

b)  $h < z < \infty$  に対して,

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau}_{xx}^* &= \frac{\rho C_T^2}{ik} \left( \frac{p^2}{C_T^2} - 2\nu_L^2 \right) B_2 e^{-\nu_L z} \\ &\quad + 2ik\rho C_T^2 D_2 e^{-\nu_T z}, \\ \bar{\tau}_{zz}^* &= \frac{\rho C_T^2}{ik} (k^2 + \nu_T^2) B_2 e^{-\nu_L z} \\ &\quad - 2ik\rho C_T^2 D_2 e^{-\nu_T z}, \\ \bar{\tau}_{xz}^* &= -2\rho C_T^2 \nu_L B_2 e^{-\nu_L z} \\ &\quad - \frac{\rho C_T^2}{\nu_T} (k^2 + \nu_T^2) D_2 e^{-\nu_T z}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)_{4-6}$$

以上に示した6個の未知係数  $A_1, B_1, C_1, D_1, B_2$  および  $D_2$  をもつ一般解を境界条件式(10)に代入すれば、それらの未知量に関する6個の連立1次方程式が得られる。その連立方程式を解けば付録Aに示したように、与えられた表面および内部領域での既知量  $\sigma, \tau, \Delta u, \Delta w, F_x$  および  $F_z$  のF-L変換された値すなわち、 $\bar{\sigma}^*, \bar{\tau}^*, \bar{\Delta u}^*, \bar{\Delta w}^*, \bar{F}_x^*$  および  $\bar{F}_z^*$  を用いて  $A_1, B_1, \dots, D_2$  が陽な形で求められる(付録の式(A・1)参照)。それらの式中の分母に現われる  $R_{\pm}$  は周知のRayleigh関数に、ある比例係数が付与したものであって、後でみるようにこの項に関連してRayleighの表面波が発生することになる。

なお、この  $A_1, B_1, \dots, D_2$  の求められた値において  $\Delta u = \Delta w = F_x = F_z = 0$  とすれば著者の一人の先に取り扱った問題<sup>2)</sup>に、また  $\sigma = \tau = \Delta u = \Delta w = 0$  とすればGarvinの取り扱った問題<sup>3)</sup>に、また  $\Delta u = \Delta w = 0$  とすればPaytonの取り扱った基礎関係式の結果<sup>4)</sup>にそれぞれ一致、ないし対応したものになる。したがってたとえば、表面上に外荷重応力として衝撃荷重、移動集中ないし分布荷重等が作用した場合の非定常応答は次節で述べる解析例の特殊化(すなわち、 $h=0$  とおき  $\Delta u = \Delta w = F_x = F_z = 0$  とした取り扱い)ないし並列的な考察( $h=0$  において  $\sigma = \tau = \Delta u = \Delta w = 0$  とおく代わりに  $F_x(x, 0; t) = -\tau(x, t), F_z(x, 0; t) = -\sigma(x, t)$  とした取扱い)によって得られることになる(文献7)を参照)。さらにそれらで

Rayleigh波の影響を無視すればSneddon<sup>12)</sup>, Cole & Huth<sup>13)</sup>, Niwa & Kobayashi<sup>14)</sup> らの与えた定常解に一致するのは当然である。しかし、ここでは地震の発生機構やAcoustic Emission問題の挙動解析(原波形解析)に資するための基本的な解法の提案と二、三の数値結果を示すことを目的とするため表面荷重は零(すなわち  $\sigma = \tau = 0$ )とし、領域内部にのみ波動源が存在する場合について考えてゆくことにする。もちろん、表面荷重も同時に作用する問題はここで得られた結果に表面荷重のみが作用するとして得られた結果<sup>2)</sup>とを単に重ね合わせてやればよい。

### 3. 具体的な問題の解析解と数値計算例

#### (1) 深さ $z=h$ に、時間に関し階段関数的に作用する集中力

Fig. 2の右上図に示されているように深さ  $z=h$  の位置に  $x$  軸方向に作用する集中荷重  $F_x^0$  のみが依存する場合、すなわち

$$F_x(x, t) = F_x^0 \cdot \delta(x) \cdot H(t). \dots\dots\dots (14)$$

で与えられるような場合を考えるものとする。したがって、この場合の未知係数  $A_1, B_1, \dots, D_2$  は付録Aの式(A・1)において  $\sigma = \tau = \Delta u = \Delta w = F_z = 0$  と置いてやればよく、その結果次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{2\rho}{F_x^0} A_1 &= -\frac{k^2}{p^3 \nu_L} e^{-\nu_L h}, \\ \frac{2\rho}{F_x^0} C_1 &= \frac{\nu_T}{p^3} e^{-\nu_T h}, \\ \frac{2\rho}{F_x^0} B_1 &= \frac{1}{p^3 R_-} \left\{ -\frac{k^2 R_+}{\nu_L} e^{-\nu_L h} \right. \\ &\quad \left. + 4\nu_T k^2 (k^2 + \nu_T^2) e^{-\nu_T h} \right\}, \\ \frac{2\rho}{F_z^0} D_1 &= \frac{1}{p^3 R_-} \{ 4k^2 \nu_T (k^2 + \nu_T^2) e^{-\nu_L h} \\ &\quad - \nu_T R_+ e^{-\nu_L h} \}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

なお、 $B_2, D_2$  も式(A・1)から簡単に陽な形式で求められるが、ここでは通常測定、観測が可能な自由表面( $z=0$ の面)における応力、変位、変位速度等の力学量を解明することに限定するため、 $B_2, D_2$  等についてはここでは具体的に書き出さない。

これらの係数を式(11)および(13)に代入し、Fourier逆変換を行うとともに、 $z=0$ の表面上での非零の応力  $\tau_{xx}$  および変位速度  $\dot{u}, \dot{w}$  のLaplace変換形を書き出すと次のようになる<sup>注1)</sup>。

注1) ここで、変位  $u, w$  ではなく変位速度を対象としたのは後述のCagniard-DeHoopの手法が適用できるからである。なお102頁の脚注2)を参照のこと。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{4\pi}{C_T^2 F_x^0} \bar{\tau}_{xx}(x, 0; p) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mu_L} \left\{ i\eta(1/C_T^2 - 2\mu_L^2) \right. \\
 &+ \frac{1}{F_-} [i\eta(1/C_T^2 - 2\mu_L^2)F_+ + 8i\eta^3\mu_L\mu_T(\eta^2 + \mu_T^2)] \left. \right\} e^{-\rho(h\mu_L - i\eta x)} d\eta \\
 &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2i\eta\mu_T - \frac{1}{F_-} [4i\eta\mu_T(1/C_T^2 - 2\mu_L^2)(\eta^2 + \mu_T^2) + 2i\eta\mu_T F_+] \right\} e^{-\rho(h\mu_T - i\eta x)} d\eta, \\
 \frac{4\pi\rho}{F_x^0} \bar{u}(x, 0; p) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mu_L} \left\{ -\eta^2 + \frac{1}{F_-} [-\eta^2 F_+ + 4\eta^2\mu_L\mu_T(\eta^2 + \mu_T^2)] \right\} e^{-\rho(h\mu_L - i\eta x)} d\eta \\
 &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \mu_T + \frac{1}{F_-} [4\mu_T\eta^2(\eta^2 + \mu_T^2) - \mu_T F_+] \right\} e^{-\rho(h\mu_T - i\eta x)} d\eta, \\
 \frac{4\pi\rho}{F_x^0} \bar{w}(x, 0; p) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ i\eta + \frac{1}{F_-} [-i\eta F_+ + 4i\eta^3(\eta^2 + \mu_T^2)] \right\} e^{-\rho(h\mu_L - i\eta x)} d\eta \\
 &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -i\eta + \frac{1}{F_-} [4i\eta\mu_L\mu_T(\eta^2 + \mu_T^2) - i\eta F_+] \right\} e^{-\rho(h\mu_T - i\eta x)} d\eta.
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

なお、Fourier 逆変換した上式を得る際に変数変換  $k = p\eta$  を施しており、この変更に伴って式 (15) に現われた係数  $\nu_L, \nu_T, R_{\pm}$  は次のような  $\mu_L, \mu_T, F_{\pm}$  に置き換わっている。

$$\left. \begin{aligned}
 \mu_L &= \left( \eta^2 + \frac{1}{C_L^2} \right)^{1/2}, \quad \mu_T = \left( \eta^2 + \frac{1}{C_T^2} \right)^{1/2}, \\
 F_{\pm} &= 4\eta^2\mu_L\mu_T \pm (\eta^2 + \mu_T^2)^2.
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

次に実空間での応力・変位速度を得るためには Laplace 逆変換を実行する必要があるが、ここでは式 (16) のような無限積分の、Laplace 逆変換のための解析的手法として有名な Cagniard-DeHoop 法を用いる<sup>10), 11), 15)</sup>。そのためには変数  $\eta$  をさらに新しい変数  $t$  で次のよう

に置き換える必要がある。

$$t = -i\eta x + h\mu_C \quad (\text{ここに, } C=L \text{ または } T). \dots\dots\dots(18)$$

式 (18) の変数変換を行えば式 (16) あるいはそれに類似の式は最終的に  $\int_0^{\infty} [ ] e^{-\rho t} dt$  の形式に整理され、この結果被積分関数中の [ ] 内の式が  $\rho$  に関し独立であればその [ ] 内の式そのものが Laplace 逆変換されるべき、実空間での値にほかならず、解析的に所要の量が求められることになる。したがって式 (16) の Laplace 逆変換後の値すなわち、表面上での応力  $\tau_{xx}$ 、変位速度  $\dot{u}, \dot{w}$  は結局次のような閉じた形の解析式として求められることになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{4\pi}{C_T^2 F_x^0} \tau_{xx}(x, 0; t) &= H\left(t - \frac{r}{C_L}\right) \left[ \frac{1}{\mu_L} \left\{ i\eta(1/C_T^2 - 2\mu_L^2) \right. \right. \\
 &+ \frac{1}{F_-} [i\eta(1/C_T^2 - 2\mu_L^2)F_+ + 8i\eta^3\mu_L\mu_T(\eta^2 + \mu_T^2)] \left. \left. \right\} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right]_{\eta=\eta_L}^{\eta=\eta_L^{\dagger}} \\
 &+ H\left(t - \frac{r}{C_T}\right) \left[ \left\{ 2i\eta\mu_T - \frac{1}{F_-} [4i\eta\mu_T(1/C_T^2 - 2\mu_L^2)(\eta^2 + \mu_T^2) + 2i\eta\mu_T F_+] \right\} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right]_{\eta=\eta_T}^{\eta=\eta_T^{\dagger}}, \\
 \frac{4\pi\rho}{F_x^0} \dot{u}(x, 0; t) &= H\left(t - \frac{r}{C_L}\right) \left[ \frac{1}{\mu_L} \left\{ -\eta^2 + \frac{1}{F_-} [-\eta^2 F_+ + 4\eta^2\mu_L\mu_T(\eta^2 + \mu_T^2)] \right\} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right]_{\eta=\eta_L}^{\eta=\eta_L^{\dagger}} \\
 &+ H\left(t - \frac{r}{C_T}\right) \left[ \left\{ \mu_T + \frac{1}{F_-} [4\mu_T\eta^2(\eta^2 + \mu_T^2) - \mu_T F_+] \right\} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right]_{\eta=\eta_T}^{\eta=\eta_T^{\dagger}}, \\
 \frac{4\pi\rho}{F_x^0} \dot{w}(x, 0; t) &= H\left(t - \frac{r}{C_L}\right) \left[ \left\{ i\eta + \frac{1}{F_-} [-i\eta F_+ + 4i\eta^3(\eta^2 + \mu_T^2)] \right\} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right]_{\eta=\eta_L}^{\eta=\eta_L^{\dagger}} \\
 &+ H\left(t - \frac{r}{C_T}\right) \left[ \left\{ -i\eta + \frac{1}{F_-} [4i\eta\mu_L\mu_T(\eta^2 + \mu_T^2) - i\eta F_+] \right\} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right]_{\eta=\eta_T}^{\eta=\eta_T^{\dagger}}.
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned}
 \eta_{\pm}^C &= \frac{1}{r} (\pm t_C \sin \theta + it \cos \theta), \\
 \frac{\partial \eta_{\pm}^C}{\partial t} &= \frac{1}{r t_C} (\pm t \sin \theta + i t_C \cos \theta), \\
 (C \text{ は } L \text{ または } T \text{ をとる}) \\
 t_L &= \left( t^2 - \frac{r^2}{C_L^2} \right)^{1/2}, \quad t_T = \left( t^2 - \frac{r^2}{C_T^2} \right)^{1/2}, \\
 r &= (x^2 + h^2)^{1/2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{h}{x}, \quad (0 \leq \theta \leq \pi)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)^1$$

この結果を用いてポアソン比  $\nu=0.30$  とし、 $x/h$  をいくつか変化させて数値計算を実行したものの例が **Fig. 2** および **Fig. 3** である。図の横軸は無次元化した時刻、縦軸はそれぞれの求めるべき値を作用集中力  $F_x^0$  で無次元化して示したものである。図中において点線で描かれた結果 (下添字記号  $\infty$  を付したものは  $z \leq 0$  の領域にも、 $z \geq 0$  をしめる媒体と同じものが存在するとした無限体中の  $x$  軸上 ( $z=0$ ) の対応する量を

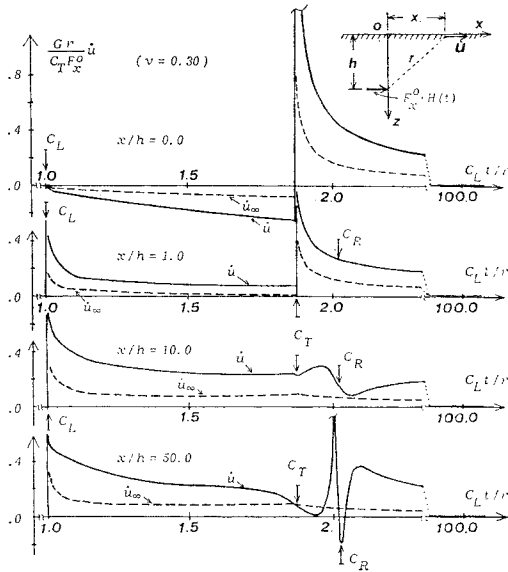


Fig. 2 Variations of surface horizontal velocity  $\dot{u}$  under the buried single force  $F_x^0 \cdot H(t)$  applied at depth  $z=h$ .

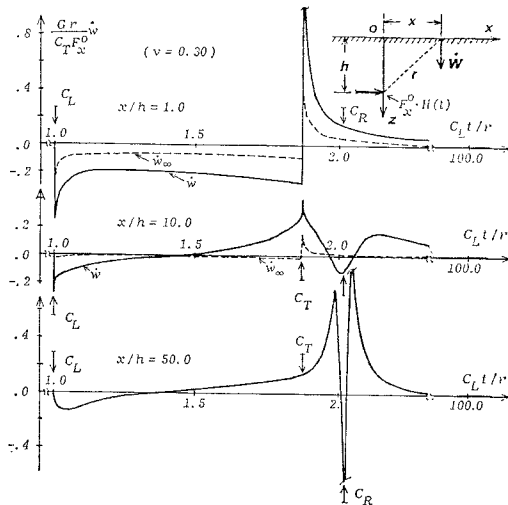


Fig. 3 Variations of surface vertical velocity  $\dot{w}$  for the same case of Fig. 2.

表わしており<sup>16), 17)</sup>, 実線のそれと比較することによって表面の存在の影響が容易に理解できる. 図には荷重の作用直後 ( $t=+0$ ) にその点源より発した縦波, 横波および Rayleigh 波の, 観測点での到達時刻の位置がそれぞれ矢線で示されている.  $x/h$  が比較的小さい間は縦波  $C_L$  の到達点で初動が特異性をもって生じ, そのあと横波  $C_T$  の到達点で変位速度に大きな特異性が生じる. 他方  $x/h$  が大きくなるに従い縦波, 横波に対する特異性は消失されるが, 今度は Rayleigh 波  $C_R$  の影響が顕著になることが観察される. もちろん, 当然のことながら無限体とした結果 (図の点線) ではこの影響が現われ

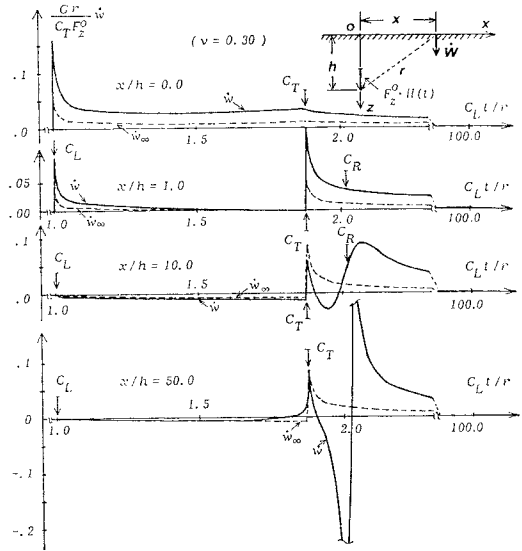


Fig. 4 Variations of surface vertical velocity  $w$  under the buried single force  $F_z^0 \cdot H(t)$  applied at depth  $z=h$ . (Scale of ordinates has an error. Factor 10.0 should be multiplied to the results shown.)

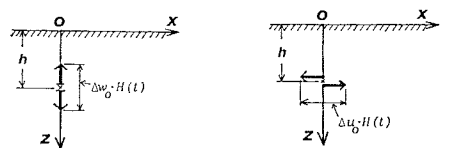
ない. 紙面の都合上応力分布の時間的推移の計算例はここに示さなかったが, 応力成分のうち表面での  $\tau_{zz}, \tau_{xz}$  を解析的に求めた結果は当然ながら恒等的に零となっており, 初めに設定した表面での応力自由の境界条件は完全に満たされているのが確認されている.

次に深さ  $z=h$  の点に鉛直下方に作用する時間的にステップ状の集中力  $F_z^0$  による結果の一例が Fig. 4 に示されている. 一般的な傾向は上述の例と同様であるが,  $x/h$  が十分大きいところでの横波, Rayleigh 波の到達前後の挙動は興味深い.

(2) 深さ  $z=h$  に, 時間に関し階段関数的に発生する転位 (変位の食い違い)

Fig. 5(a) に示すように, 点  $(0, h)$  に時間的にステップ関数  $H(t)$  の鉛直方向の変位の食い違い (開口変位)  $\Delta w_0$  が発生する場合を考えよう. すなわち,

$$\left. \begin{aligned} \sigma = \tau = F_x = F_z = \Delta u = 0, \\ \Delta w = \Delta w_0 \cdot \delta(x) \cdot H(t). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$



(a) vertically opening discrepancy of displacement. (b) horizontally shearing discrepancy of displacement.

Fig. 5 Point dislocation with step function of time at depth  $z=h$ .

この場合の係数  $A_1, B_1, \dots, D_1$  は上式を式 (A・1) に代入することにより次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{C_T^2 \Delta w_0} A_1 &= -\frac{ik(k^2 + \nu T^2)}{p^3 \nu L} e^{-\nu L h}, \\ \frac{2}{C_T^2 \Delta w_0} C_1 &= \frac{2ik\nu T}{p^3} e^{-\nu T h}, \\ \frac{2}{C_T^2 \Delta w_0} B_1 &= \frac{1}{p^3 \nu L R_-} \{-ik(k^2 + \nu T^2) R_+ e^{-\nu L h} \\ &\quad + 8ik^3 \nu L R_+ e^{-\nu T h}\}, \\ \frac{2}{C_T^2 \Delta w_0} D_1 &= \frac{1}{p^3 R_-} \{4ik\nu T(k^2 + \nu T^2)^2 e^{-\nu L h} \\ &\quad - 2ik\nu T R_+ e^{-\nu T h}\}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

これより、F-L 変換後の  $\bar{u}^*, \bar{w}^*$  は式 (11) から求められ、その結果を Fourier 逆変換すれば、 $z=0$  の表面での値  $\bar{u}$  および  $\bar{w}$  は次式のように書き表わされる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{4\pi}{C_T^2 \Delta w_0} \bar{u}(x, 0; p) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mu L} \left\{ -i\eta(\eta^2 + \mu T^2) \right. \\ &\quad + \frac{1}{F_-} [-i\eta(\eta^2 + \mu T^2) F_+ \\ &\quad + 4i\eta\mu L \mu T(\eta^2 + \mu T^2)] \left. \right\} e^{-\rho(h\mu L - i\eta x)} d\eta \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2i\eta\mu T + \frac{1}{F_-} [8i\eta^3 \mu T(\eta^2 + \mu T^2) \right. \\ &\quad \left. - 2i\eta\mu T F_+] \right\} e^{-\rho(h\mu T - i\eta x)} d\eta, \\ \frac{4\pi}{C_T^2 \Delta w_0} \bar{w}(x, 0; p) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -(\eta^2 + \mu T^2) \right. \\ &\quad + \frac{1}{F_-} [(\eta^2 + \mu T^2) F_+ \\ &\quad \left. - 4\eta^2(\eta^2 + \mu T^2)^2] \right\} e^{-\rho(h\mu L - i\eta x)} d\eta \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2\eta^2 + \frac{1}{F_-} [-8\eta^2 \mu L \mu T(\eta^2 + \mu T^2) \right. \\ &\quad \left. + 2\eta^2 F_+] \right\} e^{-\rho(h\mu T - i\eta x)} d\eta. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

この結果を Laplace 逆変換して実空間での表面変位  $u(x, 0; t)$  および  $w(x, 0; t)$  を求める操作は実質的に (1) で述べた手法と同様であるのでここではその過程および結果の式は省略する注2)。最終的に得られた数式において (1) の場合と同様に  $\nu=0.30$  を仮定し、 $x/h$  のいくつかの値の位置での、鉛直変位  $w$  の時間的推移を図示したものが Fig. 6 である。この図において  $x/h$  が十分に大きいところでは Rayleigh 波の影響が顕著となり、その到達後は静的な転位が発生した場合の無限体ならびに半無限体に対する結果<sup>18), 19)</sup> に厳密に一致した

注2) 式 (18) の下の文章で述べたように Laplace 逆変換に際して Cagniard-DeHoop 法を用いるためには被積分項の [ ] の式が  $p$  に関し独立となる必要があるため、(1) の変位速度とは違ってここでは変位そのものが解析式として求められる。

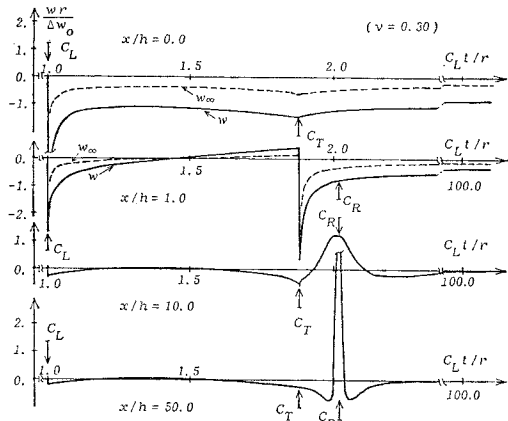


Fig. 6 Variations of surface vertical displacement  $w$  under the buried point dislocation for the case of Fig. 5 (a).

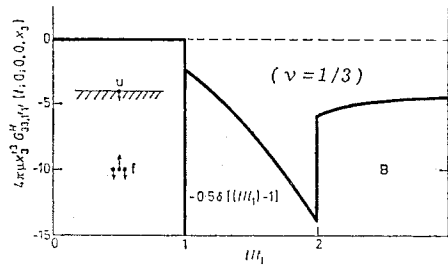


Fig. 7 Variation of vertical displacement of epicenter under the buried dipole forces (After Sinclair<sup>22)</sup>).

値に収束してゆく。ところで Fig. 7 は Wadley らの Acoustic Emmission による実験値<sup>20), 21)</sup>の、理論的な説明のために Sinclair が計算した3次元的な同種の問題(時間的にステップ関数の dipole forces による点源)の解析の結果<sup>22)</sup>を示したものであるが、これは Fig. 6 の  $x/h=0.0$  の場合のものに傾向的に一致していることが観察されよう(この Fig. 7 の横軸は縦波速度の到達時間  $t_1$  で基準化した無次元化時間を、縦軸は深さ  $x_3$  の位置に時間的ステップ関数の dipole forces が作用したときの直上点の表面(epicenter)における鉛直変位  $U$  に比例する量を、それぞれ示している)。ここでの著者らの解析例は、Wadley らの実験および Sinclair の解析の3次元的な場合とは異なるが、板状の試験片を用いた場合の測定結果との対応が可能となるものであり、自由表面を有する板状試験片による Acoustic Emmission の実験においてこの種の波形が将来において観測されることが期待されるとともに材料の破壊の発生、伝播特性等の機構解明のための基礎資料の一つとなるものと思われる。

なお、脚注に述べたような理由から、表面変位が解析

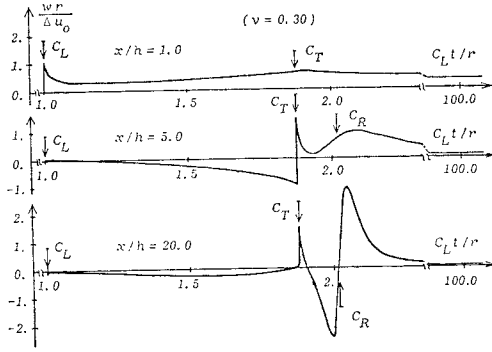


Fig. 8 Variations of surface vertical displacement  $w$  under the buried point dislocation for the case of Fig. 5 (b).

的に求められているが、表面の変位速度に対してはたとえば、移動する開口型変位の問題すなわち、式 (20) の代わりに、

$$\left. \begin{aligned} \sigma = \tau = F_x = F_z = \Delta u = 0, \\ \Delta w = \Delta w_0 \cdot H(t - x/C_0) \cdot H(x). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

と設定して、同様の手法を展開してゆけば表面の変位速度の式が閉じた解析式として求められ、したがって、その結果の式において  $c_0 = 0$  としてやれば、ここで取り扱っている問題の変位速度が得られることになる (具体的な取扱い方と結果等については次報に譲る)。

次に Fig. 5(b) のようなせん断型の転位 (double couples without moment) が1点に生じた場合の解析も上の例と同様に解析が行えるが、その数値結果の一例を Fig. 8 に示した。この形の転位は主として地震の発生機構に関して最も基本的な運動学的モデル (kinematic model) として考えられているものであり、この点震源を継続時間、震源強度、転位や crack の伝播速度、ならびにそれらの最終的な分布等といった時間、空間的に分布したものとして取り扱い得るようにすれば、通常の観測された地震波形と比較対応ができ、その結果から逆に震源においていかなる挙動が発生したかの究明が可

能となるものである。このことは非破壊検査における Acoustic Emission 信号の解明においてもまったく同様であり、最近では“原波形解析”といった言葉でよばれはじめている<sup>21), 23)</sup>、それらのより一般的な問題についての具体的な方法論、解析的取扱い、数値計算結果とその解釈、実験結果との比較対応等については紙面の都合上、次報に譲ることにする。

#### 4. 結 言

地震発生機構あるいは材料の非破壊検査における Acoustic Emission 技法の定量化のための基本的な解析手法を確立するための一資料として、2次元半無限体の表面ないし、一定深さの位置に外力あるいは転位 (変位の食い違い) が生じた場合の表面での応答を解析的に求める定式化を試みた。得られた解式を用いて二、三の基本的な、時間的にステップ関数の点源による表面応答の数値計算例を示し縦波、横波ならびに Rayleigh 波の伝播によってどのように波形が変化していくかについて明らかにした。

ここに示した計算例はごく基本的なものに限定されているが、用いた手法は一般的ないわゆる“kinematic sources”による波動問題の閉じた形の解析が、いくつかの制限条件のもとで可能となるものである。したがって現実的な時間・空間に関して分布し移動、伝播する波動源に対しても閉じた解が得られるがそれらの計算法と数値例および観測値との定量的な相関性については次報において取り扱う予定である。

#### 付録A 係数 $A_1, B_1, C_1, D_1, B_2$ および $D_2$ の解

境界条件式 (10) によって得られる6個の連立1次方程式を解くことにより、係数  $A_1, B_1, C_1, D_1, B_2$  および  $D_2$  の6個の値は具体的に次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= e^{-\nu L h} \left\{ -\frac{k^2 f_3 - f_6}{2(\nu L^2 - k^2)} + \frac{\nu T f_4 - k^2 f_5}{2\nu L(\nu T^2 - k^2)} \right\}, \\ C_1 &= e^{-\nu T h} \left\{ \frac{\nu L^2 f_3 - f_6}{2(\nu L^2 - k^2)} - \frac{f_4 - \nu T f_5}{2(\nu T^2 - k^2)} \right\}, \\ B_1 &= -\frac{1}{R_-} \left\{ 2k^2 f_1 + (k^2 + \nu T^2) f_2 \right\} + \frac{1}{2(\nu L^2 - k^2) R_-} \left\{ -(k^2 f_3 - f_6) R_+ e^{-\nu L h} \right. \\ &\quad \left. + 4(\nu L^2 f_3 - f_6) k^2 (k^2 + \nu T^2) e^{-\nu T h} \right\} + \frac{1}{2(\nu T^2 - k^2) R_-} \left\{ \frac{1}{\nu L} \cdot (\nu T f_4 - k^2 f_5) R_+ e^{-\nu L h} \right. \\ &\quad \left. - 4(f_4 - \nu T f_5) k^2 (k^2 + \nu T^2) e^{-\nu T h} \right\}, \\ D_1 &= \frac{1}{R_-} \left\{ (k^2 + \nu T^2) f_1 + 2\nu L \nu T f_2 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2(\nu L^2 - k^2) R_-} \left\{ 4(k^2 f_3 - f_6) \nu L \nu T (k^2 + \nu T^2) e^{-\nu L h} - (\nu L^2 f_3 - f_6) R_+ e^{-\nu T h} \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2(\nu T^2 - k^2)R_-} \{-4(\nu T f_4 - k^2 f_5) \nu T (k^2 + \nu T^2) e^{-\nu L h} + (f_4 - \nu T f_5) R_+ e^{-\nu T h}\}, \\
 B_2 = & - \frac{1}{R_-} \{2k^2 f_1 + (k^2 + \nu T^2) f_2\} + e^{\nu L h} \left\{ \frac{k^2 f_3 - f_6}{2(\nu L^2 - k^2)} + \frac{\nu T f_4 - k^2 f_5}{2\nu L (\nu T^2 - k^2)} \right\} \\
 & + \frac{1}{2(\nu L^2 - k^2)R_-} \{-(k^2 f_3 - f_6) R_+ e^{-\nu L h} + 4(\nu L^2 f_3 - f_6) k^2 (k^2 + \nu T^2) e^{-\nu T h}\} \\
 & + \frac{1}{2(\nu T^2 - k^2)R_-} \left\{ \frac{1}{\nu L} \cdot (\nu T f_4 - k^2 f_5) R_+ e^{-\nu L h} - 4(f_4 - \nu T f_5) k^2 (k^2 + \nu T^2) e^{-\nu T h} \right\}, \\
 D_2 = & \frac{1}{R_-} \{(k^2 + \nu T^2) f_1 + 2\nu L \nu T f_2\} + e^{\nu T h} \left\{ -\frac{\nu L^2 f_3 - f_6}{2(\nu L^2 - k^2)} - \frac{f_4 - \nu T f_5}{2(\nu T^2 - k^2)} \right\} \\
 & + \frac{1}{2(\nu L^2 - k^2)R_-} \{4(k^2 f_3 - f_6) \nu L \nu T (k^2 + \nu T^2) e^{-\nu L h} - (\nu L^2 f_3 - f_6) R_+ e^{-\nu T h}\} \\
 & + \frac{1}{2(\nu T^2 - k^2)R_-} \{-4(\nu T f_4 - k^2 f_5) \nu T (k^2 + \nu T^2) e^{-\nu L h} + (f_4 - \nu T f_5) R_+ e^{-\nu T h}\}.
 \end{aligned}
 \tag{A.1}$$

ここに,

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 f_1 = \frac{\nu T}{\rho C_T^2} \bar{v}^*, \quad f_2 = \frac{ik}{\rho C_T^2} \bar{\sigma}^*, \quad f_3 = -\Delta \bar{u}^*, \\
 f_4 = -ik \nu T \Delta \bar{w}^*, \quad f_5 = ik \Delta \bar{w}^* + \frac{1}{\rho C_T^2} \bar{F}_x^*, \\
 f_6 = -\left(1 - \frac{2C_T^2}{C_L^2}\right) k^2 \Delta \bar{u}^* + \frac{ik}{\rho C_L^2} \bar{F}_z^*.
 \end{aligned} \right\} \tag{A.2} \\
 & \left. \begin{aligned}
 \nu L = \left(k^2 + \frac{\rho^2}{C_L^2}\right)^{1/2}, \quad \nu T = \left(k^2 + \frac{\rho^2}{C_T^2}\right)^{1/2}, \\
 R_{\pm} = 4k^2 \nu L \nu T \pm (k^2 + \nu T^2)^2.
 \end{aligned} \right\} \tag{A.3}
 \end{aligned}$$

参考文献

- 1) たとえば, Aki, K. and P.G. Richards : Quantitative seismology—Theory and methods—, Freeman and Company, pp. 799~847, 1980.
- 2) Garvin, W.W. : Exact transient solution of the buried line source problem, Proc. Roy. Soc. London, Vol. A 234, pp. 528~541, 1956.
- 3) Mitra, M. : Solution of the buried source problem for an extended two-dimensional source in an elastic medium, Proc. Nat. Inst. Sci. India, Vol. A 25, pp. 236~242, 1959; Exact transient solution of the buried line source problem for an asymmetric source, ZAMP, Vol. 9, pp. 322~331, 1958; Exact solution of the buried line source problem for a uniformly moving line source, Bull. Calcutta Math. Soc., Vol. 51, pp. 109~115, 1966.
- 4) Payton, R.G. : Transient motion of an elastic half-space due to a moving surface line load, Int. J. Eng. Sci., Vol. 5, pp. 49~79, 1967; Epicenter motion of an elastic half-space due to buried stationary and moving sources, Int. J. Eng. Sci., Vol. 6, pp. 287~300, 1968.
- 5) Niazy, A. : An exact solution for a finite, two-dimensional moving dislocation in an elastic half-space with application to the San Fernando Earthquake of 1971, Bull. Seismo. Soc. Am., Vol. 65, pp. 1797~1826, 1975.
- 6) Brock, L.M. : Two basic wave propagation problems for the non-uniform motion of displacement discontinuities in a half-plane, Int. J. Eng. Sci., Vol. 17, pp. 1211~1223, 1979.
- 7) Higuchi, N. and K. Hirashima : Unsteady stresses produced in an elastic half-plane by moving loads, Theor. Appl. Mech., Vol. 27, pp. 359~370, 1977.
- 8) Madariaga, R. : A finite two-dimensional kinematic

- fault in a half-space, Publ. Inst. Geophys. Pol. Acad. Sci., Vol. A 10, pp. 33~47, 1980.
- 9) Bouchon, M. and K. Aki : Discrete wave-number representation of seismic-source wave fields, Bull. Seismo. Soc. Am., Vol. 67, pp. 259~277, 1977.
- 10) Cagniard, L. : Reflection and refraction of progressive seismic waves, (Trans. by Flinn and Dix), McGraw-Hill, p. 281, 1962.
- 11) DeHoop, A.T. : A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems, Appl. Sci. Res., Vol. B 8, pp. 349~356, 1959.
- 12) Sneddon, I.N. : The stress produced by a pulse of pressure moving along the surface of a semiinfinite solid, Rend. Cir. Mat. Palermo, Vol. 2, pp. 57~62, 1952.
- 13) Cole, J. and J. Huth : Stresses produced in a half plane by moving loads, J. Appl. Mech., Vol. 25, pp. 433~436, 1958.
- 14) Niwa, Y. and S. Kobayashi : Stresses produced in an elastic half-plane by moving loads along its surface, Mem. Fac. Eng., Kyoto Univ., Vol. 28, pp. 254~276, 1966.
- 15) Fung, Y.C. : Foundation of solid mechanics, Prentice-Hall, pp. 214~225, 1965.
- 16) Eason, G., J. Fulton and I.N. Sneddon : The generation of waves in an infinite elastic solid by variable body forces, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Vol. A 248, pp. 575~607, 1956.
- 17) Achenbach, J.D. : Wave propagation in elastic solids, North-Holland Pub., pp. 301~303, 1973.
- 18) たとえば, 川本眺万 : 応用弾性学, 共立出版, pp. 118~120, 1965.
- 19) Maruyama, T. : On two-dimensional elastic dislocations in an infinite and semi-infinite medium, Bull. Earthquake Res. Inst., Vol. 44, pp. 811~871, 1966.
- 20) Wadley, H.N.G., G.B. Scruby and G. Shrimpton : Quantitative acoustic emission source characterization during low temperature cleavage and intergranular fracture, Acta Metall., Vol. 29, pp. 399~414, 1981.
- 21) Scruby, G.B., H.N.G. Wadley and J.E. Sinclair : The origin of acoustic emission during deformation of aluminum and an aluminum-magnesium alloy, Phil. Mag., Vol. A44, pp. 249~274, 1981.
- 22) Sinclair, J.E. : Epicentre solutions for point multipole source in an elastic half-space, J. Phys. D, Appl. Phys., Vol. 12, pp. 1309~1315, 1979.
- 23) 岸 輝雄 : 原波形解析による新しい AE の展望, 材料科学, Vol. 19, pp. 261~266, 1983; 太平貴規・岸 輝雄 : AE 原波形解析による破壊の動的素過程に関する研究, 日本金属学会誌, Vol. 46, pp. 518~525, 1982.