

# 空間領域に選点法を用いた回転殻の 静的および動的問題の解析

STATIC AND DYNAMIC ANALYSIS OF SHELLS OF REVOLUTION  
USING THE COLLOCATION METHOD IN SPACE DOMAIN

三 上 隆\*

By Takashi MIKAMI

## 1. はじめに

殻構造は、そのすぐれた力学特性ゆえに建築・土木構造など多くの分野で広く用いられている。

さて、静的および動的問題解析の第一歩は、何らかの手法により空間領域を離散化することである。離散化手法としては FEM<sup>1)</sup> や FDM<sup>2)~4)</sup> などが用いられるが、その結果得られる連立方程式および時間に関する連立常微分方程式の係数行列は大次元となるのが一般的である。したがって、時間依存の問題では、大次元な係数行列の固有値が広い範囲に分布し、これに起因して時間領域の積分が不安定となり解が発散したり、安定に解くためには計算時間が長くなるなどの問題点も生ずる。なお、FEM では計算時間の短縮を計るため自由度の低減がなされるが、自由度の低減は直接、精度に関係するので十分な注意が必要である。さらに、対象とする荷重状態（たとえば、風荷重を受ける片持形式の殻）によっては、曲げモーメント、せん断力などの断面力諸量をたわみと同程度の精度で求めることが困難になる場合もあり、FEM では高精度の要素の開発を目指し、研究が続けられている。

選点法は定式化が容易、選点の選択によっては未知数の減少などの特性があり、空間領域の離散化手法として有望と思われるが、殻に対する適用例は少ない<sup>5)</sup>。

選点法と類似の概念に基づいた手法<sup>注 1)</sup>(Partition 法, Subdomain Collocation 法とよばれる)が、回転殻の固有値問題解析<sup>6), 7)</sup>や静的応力解析<sup>8), 9)</sup>に適用されている。しかし、この手法は領域分割の仕方に大きく依存するもので、場の大域的性質で規定される固有値問題を除き、局所的な応力・変形挙動の把握を必要とする問題への適

用は得策とは思えない。また、考察している系を支配する係数行列の導出過程では、積分を実行しなければならず、特に系が変数係数の微分方程式で与えられる場合には、煩雑さは免れない。

本研究は、回転殻の静的・動的問題を対象とし、空間領域に対する選点法の適用性を検討したものである。問題の定式化の基本的な流れは、4階の支配方程式に基づく前論文<sup>9)</sup>を踏襲するが、ここでは、仮定した試行関数の高階微分の影響が特に曲げモーメント、せん断力などに現われることを考慮し、微分階数を2階に下げた支配方程式の採用および殻の経線方向に沿う要素(領域)分割により、解の精度向上を計った。また、選点法のもっている定式過程の簡明さが、要素分割によって失われないように留意し、考察している系の係数行列がシステムチェックに得られるよう配慮した。

数値計算例では円筒殻、球殻を取り上げ、手法の妥当性や適用性の検証を行う。さらに、空間領域離散化の近似度の判定に、平均二乗残差を解析に併用すれば、本計算値はより高精度なものとなることを明らかにする。なお、動的応答問題での時間領域の積分には、直接積分法を用いた。

## 2. 回転殻の基礎方程式

回転殻の運動方程式は、円周方向 Fourier 級数展開により経線方向座標と時間に関する偏微分方程式として得られる。以下に Novozhilov の線形殻理論<sup>10)</sup>に基づき、基礎方程式を導く過程を略述する。その際、曲げモーメント、せん断力などへの数値的誤差の介入を避けるため、変位成分とともに経線方向曲げモーメントを独立な未知量として扱い、微分方程式の階数低下を計った。なお、殻は等方等質な一様な厚さとした。

Fig. 1 に示す座標系において、 $x$  軸方向(経線方向)、 $\theta$  軸方向(円周方向)、 $z$  軸方向(法線方向、内向きを

\* 正会員 工修 北海道大学助手 工学部土木工学科

注 1) ある特定の領域で 1, それ以外ではどこでも零であるような重み関数を考え、定式化する方法。

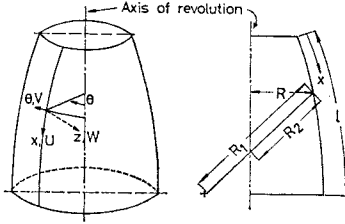


Fig. 1 Typical shell of revolution.

正)の変位をそれぞれ  $U, V, W$  で表わす。また、荷重成分、合応力成分および合モーメント成分を、それぞれ  $(P_x, P_\theta, P_z)$ ,  $(N_x, N_\theta, N_{x\theta}, Q_x, Q_\theta)$  および  $(M_x, M_\theta, M_{x\theta})$  で表示する。殻の半径を  $R$ , 主曲率半径を  $R_1, R_2$  および代表長さを  $a$  とし、殻の中央面の形を  $R=R(x)$  で与えると、無次元曲率  $r_1(=a/R_1)$ ,  $r_2(=a/R_2)$  および無次元半径  $r(=R/a)$  の間の関係式は

$$\left. \begin{aligned} r_1 r_2 &= -(dr/d\xi + r^2)/s^2 \\ dr_2/d\xi &= r(r_1 - r_2) \\ r_2 &= \sqrt{1 - (d^2 r/d\xi^2)/s^2}/r \\ r_1 r_2 &= -(d^2 r/d\xi^2)/r s^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.a \sim d)$$

となる。ここに、 $r=(dr/d\xi)/r$ ,  $\xi=x/l$  および  $s=l/a$  であり、 $l$  は経線の長さである。

さて、殻の運動方程式は次のように与えられる。

$$(rN_x)' + sN_{x\theta}^* - N_\theta(dr/d\xi) - rr_1sQ_x + ars(P_x - \rho h \partial^2 U/\partial t^2) = 0 \dots\dots\dots (2.a)$$

$$sN_\theta^* + (rN_{x\theta})' + N_{x\theta}(dr/d\xi) - rr_2sQ_\theta + ars(P_\theta - \rho h \partial^2 V/\partial t^2) = 0 \dots\dots\dots (2.b)$$

$$sr(r_1N_x + r_2N_\theta) + sQ_x^* + (rQ_x)' + ars(P_z - \rho h \partial^2 W/\partial t^2) = 0 \dots\dots\dots (2.c)$$

ここに、 $( )' = \partial( )/\partial\xi$ ,  $( )^* = \partial( )/\partial\theta$  であり、 $\rho, h$  および  $t$  は、それぞれ単位体積当たりの質量、厚さおよび時間を表わす。また、 $Q_x$  と  $Q_\theta$  は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} aQ_x &= \{(rM_x)' / s + M_{x\theta}^* - M_\theta(dr/d\xi) / s\} / r \\ aQ_\theta &= \{M_\theta^* + (rM_{x\theta})' / s + M_{x\theta}(dr/d\xi) / s\} / r \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.a, b)$$

ひずみおよび曲率と変位の関係は次のようである。

$$\left. \begin{aligned} a\varepsilon_x &= U'/s - r_1W, \quad a\varepsilon_\theta = V^*/r - r_2W + rU/s \\ a\varepsilon_{x\theta} &= V'/s + U^*/r - rV/s, \quad a\chi_x = \Phi_x'/s \\ a\chi_\theta &= \Phi_\theta^*/r + r\Phi_x/s, \\ a^2\chi_{x\theta} &= (sr_1U^*/r + r_2V^* - rr_2V + W^*/r - rW^*/r) / s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.a \sim f)$$

ここに、 $\Phi_x$  および  $\Phi_\theta$  は、それぞれ次式で定義される  $x$  および  $\theta$  方向の回転角である。

$$\left. \begin{aligned} a\Phi_x &= W'/s + r_1U \\ a\Phi_\theta &= W^*/r + r_2V \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.a, b)$$

合応力と合モーメントは次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= K(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_\theta), \quad N_\theta = K(\nu\varepsilon_x + \varepsilon_\theta) \\ N_{x\theta} &= (1-\nu)K\varepsilon_{x\theta}/2, \quad M_x = -D(\chi_x + \nu\chi_\theta) \\ M_\theta &= -D(\nu\chi_x + \chi_\theta), \quad M_{x\theta} = -(1-\nu)D\chi_{x\theta}/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.a \sim f)$$

ここに、 $K=Eh/(1-\nu^2)$ ,  $D=Eh^3/12(1-\nu^2)$  であり、 $E$  および  $\nu$  は、それぞれ弾性係数、ポアソン比である。

さらに、運動方程式の階数低下を行うための準備として、式 (6.d) および式 (6.e) より次の式を求めておく。

$$M_\theta = \nu M_x - D(1-\nu^2)\chi_\theta \dots\dots\dots (7)$$

変位  $(U, V, W)$ , 合応力  $(N_x, N_\theta, N_{x\theta})$ , 合モーメント  $(M_x, M_\theta, M_{x\theta})$  および荷重  $(P_x, P_\theta, P_z)$  を、それぞれ  $(u, v, w)$ ,  $(n_x, n_\theta, n_{x\theta})$ ,  $(m_x, m_\theta, m_{x\theta})$  および  $(p_x, p_\theta, p_z)$  を係数とする形で円周方向に Fourier 級数展開する。いま、代表応力を  $\sigma$ , 周方向波数を  $n$  と記し、一例として正弦展開される量を示すと次のとおりである。

$$\left\{ \begin{array}{l} V \\ N_{x\theta} \\ M_{x\theta} \\ P_\theta \end{array} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{ll} (\sigma a^2/Eh) v^{(n)} \\ \sigma a & n_{x\theta}^{(n)} \\ \sigma a^2 & m_{x\theta}^{(n)} \\ \sigma & p_\theta^{(n)} \end{array} \right\} \sin n\theta \dots (8)$$

また、後述する境界条件の規定に必要な諸量を、同様に Fourier 級数に展開しておく。

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_x \\ S_{x\theta} \\ T_x \end{array} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} (\sigma a/Eh)\phi_x^{(n)} \cos n\theta \\ \sigma a s_{x\theta}^{(n)} \sin n\theta \\ \sigma a t_x^{(n)} \cos n\theta \end{array} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 $\Phi_x$  は式 (5.a) で与えられ、 $S_{x\theta}$  および  $T_x$  は次式で定義される等価接線力および等価せん断力である。

$$\left. \begin{aligned} S_{x\theta} &= N_{x\theta} - r_2 M_{x\theta} / a \\ T_x &= \{(rM_x)' / s + 2M_{x\theta} - M_\theta(dr/d\xi) / s\} / (ra) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10.a, b)$$

なお、以下では Fourier 係数の添字 ( $n$ ) は省略する。

以上の諸式を用いれば、回転殻の運動方程式は式 (2.a~c) および式 (6.d) より、 $u, v, w$  および  $m_x$  に関する 2階 4元連立偏微分方程式として次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} a_1 u'' + a_2 u' + a_3 u + a_4 v' + a_5 v + a_6 w' + a_7 w \\ + a_8 m_x' + a_9 m_x = -p_x + \ddot{u} \dots\dots\dots (11.a) \\ a_{10} u' + a_{11} u + a_{12} v'' + a_{13} v' + a_{14} v + a_{15} w'' \\ + a_{16} w' + a_{17} w + a_{18} m_x = -p_\theta + \ddot{v} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11.b)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{19} u' + a_{20} u + a_{21} v'' + a_{22} u' + a_{23} v \\ + a_{24} w'' + a_{25} w' + a_{26} w + a_{27} m_x'' \\ + a_{28} m_x' + a_{29} m_x = -p_z + \ddot{w} \dots\dots\dots (11.c) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} a_{30} u' + a_{31} u + a_{32} v + a_{33} w'' + a_{34} w' + a_{35} w \\ + a_{36} m_x = 0 \dots\dots\dots (11.d) \end{aligned} \right\}$$

ここに、 $( )^* = \partial( )/\partial\tau$  であり、 $\tau' = (E/\rho)^{1/2} t/a$  は

無次元時間である。なお、係数  $a_1 \sim a_{36}$  は付録 I を参照されたい。

境界条件は、次の 4 組の対の適当な組合せによって構成される。

$$\left. \begin{array}{l} W \text{ or } T_x, \phi_x \text{ or } M_x \\ U \text{ or } N_x, V \text{ or } S_{x\theta} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (12 \cdot a \sim d)$$

ここで、4. の定式化において必要な  $N_x, S_{x\theta}, T_x$  および  $\phi_x$  の各 Fourier 係数の内容を以下に示しておく。

$$\left. \begin{array}{l} n_x = b_1 u' + b_2 u + b_3 v + b_4 w \\ s_{x\theta} = b_5 u + b_6 v' + b_7 v + b_8 w' + b_9 w \\ t_x = b_{10} u + b_{11} v' + b_{12} v + b_{13} w' + b_{14} w \\ \quad + b_{15} m_x' + b_{16} m_x \\ \phi_x = b_{17} u + b_{18} w' \end{array} \right\} \dots\dots\dots (13 \cdot a \sim d)$$

なお、係数  $b_1 \sim b_{18}$  は付録 I を参照されたい。

### 3. 選点法の概略<sup>(11), (12)</sup>

本論文では選点法を、空間領域の離散化のために用いる。ここでは、その概略を述べ 4. の準備とする。

いま、時間  $\tau$  および空間  $\xi$  に関する次のような方程式が与えられたとする。

$$Lu + \ddot{u} = 0 \quad (0 < \xi < 1, \tau > 0) \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 $L$  は 2 階の線形演算子である。さらに、空間に対する 2 個の境界条件が与えられていると仮定する。

関数  $u$  を時間と空間の積として次のように近似する。

$$u(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^{M+2} d_{i-1}(\tau) \xi^{i-1} \dots\dots\dots (15)$$

ここに、未定のパラメーターは時間の関数であり、それらを定める条件は以下のように与えられる。

式 (15) を式 (14) に代入すると残差  $R$  が生ずる。

$$R(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^{M+2} \{ d_{i-1}(\tau) L(\xi^{i-1}) + \ddot{d}_{i-1}(\tau) \xi^{i-1} \} \dots\dots\dots (16)$$

まず  $M$  個の条件は、空間領域内の  $M$  個の点 (選点) で次の条件を課すことにより得られる。すなわち

$$R(\xi_j, \tau) = 0, \quad (j=1 \sim M) \dots\dots\dots (17)$$

式 (17) は時間に関する  $M$  元常微分方程式を表わし、さらにこれに加えて、空間に対する境界条件より 2 本の方程式が得られる。これら  $(M+2)$  本の時間依存の方程式は、初期条件を介して解かれ未定係数  $d$  が決定される。

選点法による解の精度は、選点の取り方に左右される。今日では、任意でなく直交多項式の零点を選点とすることにより解の信頼性が増すことが知られている<sup>(11)</sup>。本論文では、選点として区間  $[0, 1]$  で定義される shifted Legendre 多項式<sup>(13)</sup>  $P_M^*(\xi)$  の零点  $\xi_j$  ( $j=1 \sim M$ )

を用いる<sup>注 2)</sup>。

さて、式 (15) そのものを用いて問題の定式化をすれば、物理的意味をもたない係数  $d$  を求める問題に帰着するが、本論文では関数の値、すなわち内部選点と端点 (これについては後述する) の時刻  $\tau$  における値を定める問題に変換する。まず準備として、式 (15) の  $\xi$  に関する 1, 2 次微分を求め、内部選点  $\xi_j$  ( $j=1 \sim M$ 、以後  $M$  を選点数とよぶ) および端点  $\xi_0=0, \xi_{M+1}=1$  での値を計算する。

$$\left. \begin{array}{l} u(\xi_j)_\tau \equiv u(\xi_j, \tau) = \sum_{i=1}^{M+2} d_{i-1}(\tau) \xi^{i-1} \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{\xi_j} = \sum_{i=1}^{M+2} \frac{\partial \xi^{i-1}}{\partial \xi} \Big|_{\xi_j} d_{i-1}(\tau) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi_j} = \sum_{i=1}^{M+2} \frac{\partial^2 \xi^{i-1}}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi_j} d_{i-1}(\tau) \end{array} \right\} \dots\dots\dots (18 \cdot a \sim c)$$

ここに、 $j=0, 1, \dots, M+1$ 。上式を行列表示すると

$$\left. \begin{array}{l} u_\tau = Qd_\tau, \quad u'_\tau = Cd_\tau \\ u''_\tau = Dd_\tau \end{array} \right\} \dots\dots\dots (19 \cdot a \sim c)$$

となる。ここに、添字  $\tau$  は時間を、プライムは  $\xi$  に関する微分を表わすものとする。  $(M+2) \times 1$  次のベクトル  $d_\tau, u_\tau, u'_\tau$  および  $u''_\tau$  は、次のように表わされる。

$$\left. \begin{array}{l} d_\tau^T = (d_0(\tau), d_1(\tau), \dots, d_{M+1}(\tau)) \dots\dots\dots (20) \\ u_\tau^T = (u(\xi_0)_\tau, u(\xi_1)_\tau, \dots, u(\xi_{M+1})_\tau) \\ u'_\tau{}^T = (u'(\xi_0)_\tau, u'(\xi_1)_\tau, \dots, u'(\xi_{M+1})_\tau) \\ u''_\tau{}^T = (u''(\xi_0)_\tau, u''(\xi_1)_\tau, \dots, u''(\xi_{M+1})_\tau) \end{array} \right\} \dots\dots\dots (21 \cdot a \sim c)$$

さらに、  $(M+2) \times (M+2)$  次の行列  $Q, C, D$  の成分は、

$$\left. \begin{array}{l} Q_{ji} = \xi_j^{i-1}, \quad C_{ji} = (i-1) \xi_j^{i-2} \\ D_{ji} = (i-1)(i-2) \xi_j^{i-3} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (22 \cdot a \sim c)$$

と表わされる。ここに、 $j, i=1, 2, \dots, M+2$ 。

式 (19) より  $d$  を消去すれば、時刻  $\tau$  での  $\xi$  に関する微分は、時刻  $\tau$  での内部選点と端点における関数値と結びつけられ次式で与えられる。

$$u'_\tau = Au_\tau, \quad u''_\tau = Bu_\tau \dots\dots\dots (23 \cdot a, b)$$

ここに、  $(M+2) \times (M+2)$  次の行列  $A$  および  $B$  は次のようになる。

$$A = CQ^{-1}, \quad B = DQ^{-1} \dots\dots\dots (24 \cdot a, b)$$

なお、今後は簡単のために添字  $\tau$  は省略され、式 (21) のベクトルは内部選点と端点に分離され次のように記される。たとえば、 $u$  については次式となる。

$$\left. \begin{array}{l} u_c^T = (u(\xi_1), u(\xi_2), \dots, u(\xi_M)) \\ u_e^T = (u(\xi_0), u(\xi_{M+1})) \end{array} \right\} \dots\dots\dots (25 \cdot a, b)$$

ここに、添字  $c$  は内部選点、添字  $e$  は端点を表わす

注 2)  $P_M^*(\xi)$  と Legendre 多項式  $P_M(X)$  およびそれらの多項式の零点の関係は次のようである。

$$P_M^*(\xi) = P_M(1-2\xi), \quad \xi_j = (1+X_j)/2 \quad (j=1 \sim M).$$

ものとする。

次章では、先の行列  $A$  および  $B$  を用いて回転殻の空間領域の離散化を試みる。

#### 4. 回転殻の空間領域の離散化

Fig. 2 に示すように、回転殻を回転軸に沿って  $N$  個の要素に分割する。  $k$  番目の要素を  $(k)$  要素と名付け、

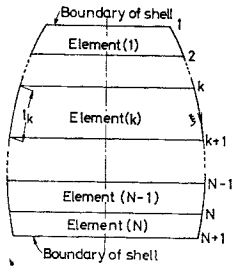


Fig. 2 Division of shell into  $N$  elements.

境界条件が指定される点を  $1, N+1$ , 分割点を  $2, 3, \dots, N$  と番号付けをする。各要素の経線の長さを  $l_k (k=1 \sim N)$  と表わし、要素は  $0 \leq \xi \leq 1$  の領域で定義されたとする。

いま、 $(k)$  要素に着目し、先に述べたように未知関数  $u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}$  および  $m_x^{(k)}$

(以下、 $(k)$  要素に関する諸

量は肩添字  $(k)$  を付けて表わす) を、式 (15) の形で表わす。このとき時間に関する未知係数の数は、1 個の要素では  $4(M+2)$ ,  $N$  個の要素では  $4(M+2)N$  となる。また、内部選点と端点における関数の 1, 2 次微分の値は、式 (23) の形で与えられる。たとえば  $w^{(k)}$  は、

$$w^{(k)} = Aw^{(k)}, w''^{(k)} = Bw^{(k)} \dots \dots (26 \cdot a, b)$$

となる。ここに、行列  $A$  および  $B$  は式 (24) で与えられ、ベクトル  $w^{(k)}$  などは式 (21) に類似な形で表わされる。

さて、 $4(M+2)N$  個の条件は、次の (1), (2) および (3) で与えられる。

##### (1) $4MN$ 個の条件

$4MN$  個の条件は、基礎微分方程式の内部選点における残差の条件を求めることによって定められる。

いま、 $(k)$  要素について考えてみる。 $(k)$  要素の未知関数を式 (11) に代入すれば、残差  $R_i^{(k)}(\xi, \tau)$  ( $i=1 \sim 4$  であり、式 (11 \cdot a \sim d) に対応する) が生ずる。したがって、まず  $4M$  個の条件は、Dirac のデルタ関数を用いれば、

$$\int_0^1 R_i^{(k)}(\xi, \tau) \delta(\xi - \xi_j) d\xi = R_i^{(k)}(\xi_j, \tau) = 0 \dots \dots (27)$$

と表現される。ここに、 $i=1 \sim 4, j=1 \sim M$ 。

上式の  $i=1$  に対する具体形を、式 (11 \cdot a) に現われる微分の階数に留意し、式 (24) の行列  $A$  と  $B$  を用いて示すと、

$$\sum_{j=1}^{M+2} [a_1^{(k)}(\xi_j) B_{i+1,j} + a_2^{(k)}(\xi_j) A_{i+1,j}]$$

$$\begin{aligned} &+ a_3^{(k)}(\xi_j) \delta_{i+1,j} u^{(k)}(\xi_{j-1}) \\ &+ \{a_4^{(k)}(\xi_j) A_{i+1,j} + a_5^{(k)}(\xi_j) \delta_{i+1,j}\} v^{(k)}(\xi_{j-1}) \\ &+ \{a_6^{(k)}(\xi_j) A_{i+1,j} + a_7^{(k)}(\xi_j) \delta_{i+1,j}\} w^{(k)}(\xi_{j-1}) \\ &+ \{a_8^{(k)}(\xi_j) A_{i+1,j} + a_9^{(k)}(\xi_j) \delta_{i+1,j}\} m_x^{(k)}(\xi_{j-1}) \\ &= -p_x^{(k)}(\xi_j) + \ddot{u}^{(k)}(\xi_j) \quad (i=1 \sim M) \dots \dots (28) \end{aligned}$$

となる。ここに、 $\delta_{i+1,j}$  ( $i+1=j$  のとき  $1, i+1 \neq j$  のとき  $0$ ) は Kronecker のデルタ記号であり、 $A_{i+1,j}$  および  $B_{i+1,j}$  はそれぞれ、行列  $A$  および  $B$  の成分を表わす。

同様に式 (27) の他の場合も、式 (28) に類似な形で表わされ、最終的に  $(k)$  要素から得られる  $4M$  個の条件は、時間に関するマトリックス微分方程式の系で、

$$\alpha_c^{(k)} \partial_c^{(k)} + \alpha_e^{(k)} \partial_e^{(k)} = p_c^{(k)} + \beta_c^{(k)} \ddot{\partial}_c^{(k)} \dots \dots (29)$$

と得られる。ここに、添字  $c, e$  はそれぞれ内部選点、端点に関する行列、ベクトルを表わす。ベクトルの具体的な内容を式 (25) の表わし方に従って示すと

$$\left. \begin{aligned} \partial_c^{(k)T} &= (u_c^{(k)T}, v_c^{(k)T}, w_c^{(k)T}, m_c^{(k)T})_{1 \times 4M} \\ \partial_e^{(k)T} &= (u_e^{(k)T}, v_e^{(k)T}, w_e^{(k)T}, m_e^{(k)T})_{1 \times 8} \\ p_c^{(k)T} &= (p_x^{(k)T}, p_\theta^{(k)T}, p_z^{(k)T}, 0)_{1 \times 4M} \\ \ddot{\partial}_c^{(k)T} &= (\ddot{u}_c^{(k)T}, \ddot{v}_c^{(k)T}, \ddot{w}_c^{(k)T}, \ddot{m}_c^{(k)T})_{1 \times 4M} \end{aligned} \right\} \dots \dots (30 \cdot a \sim d)$$

となる。また、 $\alpha_c^{(k)}, \alpha_e^{(k)}$  は、行列  $A$  と  $B$  の成分で構成される、それぞれ  $4M \times 4M, 4M \times 8$  次の行列であり、 $\beta_c^{(k)}$  は  $4M \times 4M$  次の次式で与えられる対角行列である。

$$\beta_c^{(k)} = \text{diag} \left[ \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{3M}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_M \right] \dots \dots (31)$$

全要素に対する  $4MN$  個の条件は、式 (29) を用いて、

$$\alpha_c \partial_c + \alpha_e \partial_e = -p_c + \beta_c \ddot{\partial}_c \dots \dots (32)$$

とマトリックス方程式にまとめられる。ここに、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_c &= [\alpha_c^{(1)}, \alpha_c^{(2)}, \dots, \alpha_c^{(N)}]_{4MN \times 4MN} \\ \alpha_e &= [\alpha_e^{(1)}, \alpha_e^{(2)}, \dots, \alpha_e^{(N)}]_{4MN \times 8N} \\ \beta_c &= [\beta_c^{(1)}, \beta_c^{(2)}, \dots, \beta_c^{(N)}]_{4MN \times 4MN} \\ \partial_c^T &= (\partial_c^{(1)T}, \partial_c^{(2)T}, \dots, \partial_c^{(N)T})_{1 \times 4MN} \\ \partial_e^T &= (\partial_e^{(1)T}, \partial_e^{(2)T}, \dots, \partial_e^{(N)T})_{1 \times 8N} \\ p_c^T &= (p_c^{(1)T}, p_c^{(2)T}, \dots, p_c^{(N)T})_{1 \times 4MN} \\ \ddot{\partial}_c^T &= (\ddot{\partial}_c^{(1)T}, \ddot{\partial}_c^{(2)T}, \dots, \ddot{\partial}_c^{(N)T})_{1 \times 4MN} \end{aligned} \right\} \dots \dots (33 \cdot a \sim g)$$

であり、記号  $[X^{(i)}]$  ( $i=1 \sim N$ ) は行列  $X$  が対角行的に構成されることを意味する。

##### (2) 8 個の条件

(1) 要素の境界点 1 および  $(N)$  要素の境界点  $N+1$  でそれぞれ 4 つの境界条件が規定される。いま、各点で規定される条件の 1 つが次のように与えられたとする。



示す。(1)では空間の離散化について論じ、(2)では(1)の成果を踏まえて空間を近似し、既往の時間積分スキームを用いて動的応答解析を行う。なお、数値例には基本的な形状の円筒殻と球殻を選んだ。

(1) 静的問題

a) 液圧を受ける円筒殻

1要素当たりの選点数  $M$  を決めるため、Fig. 3 に示す液圧(軸対称荷重、波数  $n=0$ )を受ける円筒殻を要素数  $N=1$ (要素分割が行われていない)で解析する。Fig. 3 に選点数  $M=7, 8, 9, 10, 11$  に対する変位  $W$  と曲げモーメント  $M_x$  を、理論値<sup>14)</sup>との比較で示す。いずれの選点数によっても、本計算値は理論値とよく一致している。なお、参考のために Fig. 4 に選点の配置状況を示す。図が示すように、選点は端点の近くに密に分布している。このような分布は、次の数値例も示すように、境界近傍の応力集中に対する追従性を高める働きをしているように思われる。

以後の計算はすべて  $M=11$  を用いることにする。もちろん、荷重状態や殻の形状によっては、これが不十分な場合もあると思われるが、そのときは要素分割数  $N$  を増すことで対処できる。

b) 一様な外圧を受ける球殻

本手法の変数係数の微分方程式への適用性および境界近傍の応力集中に対する追従性を調べるため、Fig. 5 に示す軸対称荷重(波数  $n=0$ )を受ける球殻を扱う。なお、本手法をこの球殻に適用する場合、頂点で成立す

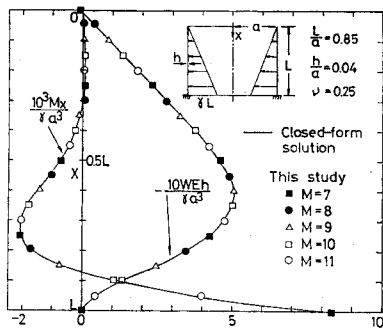


Fig. 3 Normal displacement and meridional bending moment for cylindrical shell under liquid pressure.

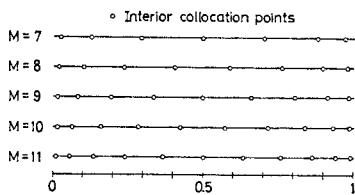


Fig. 4 Location of interior collocation points.

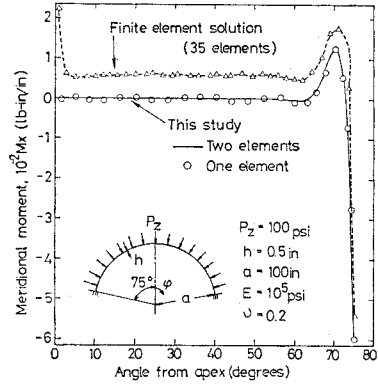


Fig. 5 Meridional bending moment for spherical cap under uniform pressure (1 in.=2.54 cm, 1 psi=6.9 kN/m<sup>2</sup>, 1 lb-in.=0.113 N-m).

る条件<sup>15)</sup>を一端における境界条件とし、 $0^\circ \leq \varphi \leq 75^\circ$  ( $\varphi$  = 経角)の範囲で解析をする。

この数値例の荷重状態の場合には、固定端近傍を除いては膜応力状態が成立し、曲げ応力の存在しない領域を生じるのが普通である。Fig. 5 に、要素数  $N=1, 2$  (等分割)に対する曲げモーメント  $M_x$  を示す。  $N=1$  では、固定端から離れた領域においては波を打つ現象がみられるものの、固定端近傍の急激な変化は十分にとらえている。一方  $N=2$  では、波を打つ現象もなく、ほぼ完全に膜応力状態が達成されている。図には参考のために、FEM(円錐台要素)による結果<sup>21)</sup>も示したが、全領域に曲げ応力が発生している。なお、曲線要素による場合には、上記の欠点は改善される<sup>16)</sup>。

c) 風荷重を受ける円筒殻

b) で示したように、解の精度は要素分割によって改善された。さらに、この点を確認するため、風荷重を受ける片持円筒殻を解析する。ただし、既往の理論値<sup>17)</sup>(Donnell 理論による)と比較するため、Donnell 理論に基づく微分方程式を用いて計算を行った。風荷重は高さ方向には一定とし、周方向の分布(波数  $n=0, 1, \dots, 6$ )は次式を用いた<sup>17)</sup>。

$$P_z = \sigma \sum_{n=0}^6 p_z^{(n)} \cos n\theta = \sigma (-0.387 + 0.338 \cos \theta)$$

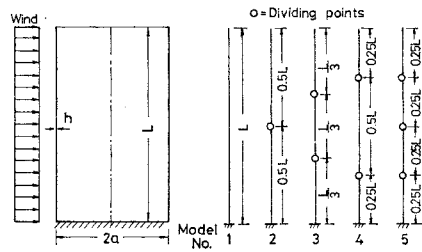


Fig. 6 Cylindrical shell under wind loading and division into elements along meridional coordinate.

$$\begin{aligned}
 &+0.533 \cos 2\theta + 0.471 \cos 3\theta \\
 &+0.166 \cos 4\theta - 0.066 \cos 5\theta \\
 &-0.055 \cos 6\theta \dots\dots\dots(46)
 \end{aligned}$$

計算は Fig. 6 に示す要素分割, 1要素 (Model No. 1, 以下 No. 1 と記す), 2要素 (No. 2), 3要素 (No. 3, 4) および 4要素 (No. 5) に対して行った. 殻の諸元は,  $L/a=3, h/a=0.005, \nu=0.3$  である.

結果 ( $W, N_x, M_x$  および  $T_x$ ) をシェル理論値の比較で Table 1 に示す. 1要素 (No. 1) の結果に着目すれば, 変位  $W$  と合応力  $N_x$  は十分な精度で求まっているが, 曲げモーメント  $M_x$  および等価せん断力  $T_x$  はかなりの誤差が生じていることがわかる. しかし, 要素分割数  $N$  を増せば,  $M_x$  と  $T_x$  は変位と同程度の精度で求まっている. 特に, No. 4 ( $N=3$ , 境界近傍を細分割) と No. 5 ( $N=4$ , 等分割) の結果は全領域で精度の

Table 1 Results for cylindrical shell under wind loading by using different types of division.

Height above base	Exact	Model No.				
		1	2	3	4	5
(a) Normal displacement, $WEh/oa^2$						
0.00 L	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.05 L	19.845	18.437	20.191	19.853	19.859	19.859
0.10 L	33.354	35.285	32.968	33.329	33.354	33.354
0.40 L	188.369	187.339	188.562	188.369	188.367	188.369
0.50 L	258.999	258.386	259.033	258.999	258.999	258.999
0.70 L	413.152	412.263	413.218	413.185	413.175	413.181
0.90 L	572.152	571.495	572.232	572.136	572.180	572.153
1.00 L	652.576	652.211	652.571	652.579	652.574	652.576
(b) Meridional stress resultant, $N_x/oa$						
0.00 L	31.972	31.953	31.974	31.971	31.972	31.972
0.05 L	29.079	28.903	29.109	29.085	29.080	29.080
0.10 L	26.165	26.236	26.123	26.166	26.163	26.163
0.40 L	11.730	11.950	11.689	11.730	11.730	11.730
0.50 L	8.143	7.849	8.142	8.143	8.143	8.143
0.70 L	2.917	2.932	2.918	2.916	2.917	2.917
0.90 L	0.326	0.325	0.325	0.326	0.326	0.326
1.00 L	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
(c) Meridional bending moment, $M_x/oa^2$						
0.00 L	-0.020 0	-0.024 1	-0.020 0	-0.020 0	-0.020 0	-0.020 0
0.05 L	0.001 2	0.002 7	0.001 7	0.001 1	0.001 2	0.001 2
0.10 L	-0.003 8	-0.000 4	-0.000 3	-0.002 5	-0.003 9	-0.003 9
0.40 L	0.000 7	0.002 2	0.000 7	0.000 7	0.000 7	0.000 7
0.50 L	0.001 1	0.001 2	0.001 1	0.001 1	0.001 1	0.001 1
0.70 L	0.002 1	0.003 5	0.002 2	0.002 1	0.002 1	0.002 1
0.90 L	0.003 2	0.004 2	0.003 1	0.003 2	0.003 2	0.003 2
1.00 L	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
(d) Effective shear force, $T_x/oa$						
0.00 L	-0.647 0	-0.829 2	-0.638 6	-0.646 7	-0.647 0	-0.647 0
0.05 L	0.033 5	0.076 0	0.035 6	0.037 0	0.033 4	0.033 4
0.10 L	-0.004 0	-0.013 2	-0.007 6	-0.004 4	-0.003 8	-0.003 8
0.40 L	-0.007 0	-0.018 0	-0.007 4	-0.007 0	-0.007 0	-0.007 0
0.50 L	-0.008 1	-0.006 5	-0.008 0	-0.008 1	-0.008 1	-0.008 1
0.70 L	-0.009 1	-0.008 2	-0.009 9	-0.008 2	-0.009 1	-0.009 1
0.90 L	-0.009 5	-0.014 1	-0.008 6	-0.009 5	-0.009 5	-0.009 5
1.00 L	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

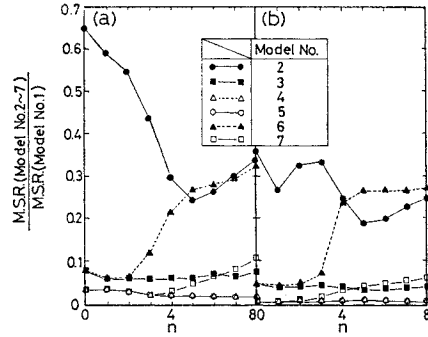


Fig. 7 Mean square residuals of (a) Eq. 11-a; (b) Eq. 11-c.

よい解が得られた. この点も含めて, 以下に要素分割数および分割パターンの解の精度に及ぼす影響を, 平均二乗残差 (M.S.R.) の面から検討する.

M.S.R. は次式で求められる.

$$M.S.R. = \left[ \sum_{i=1}^N l_i \int_0^1 R_i^2(\xi) d\xi \right]^{1/2} \dots\dots\dots(47)$$

ここに,  $l_i$  および  $R_i$  は, それぞれ ( $i$ ) 要素の経線の長さおよび残差である. 計算は前述の分割パターンに, 新たに No. 6 ( $N=2$ , 固定端より 1:2 で分割) と No. 7 ( $N=3$ , 1:1:2 で分割) を加え, 式 (46) の  $p_z^{(n)}$  を 1 と置き, 波数  $n=0, 1, \dots, 8$  に対して行った.

Fig. 7 には, Donnell 理論に基づく式 (11-a), (11-c) の M.S.R. を示す. 図の縦軸は No. 2~7 と No. 1 の残差の比である. 図より次の点がわかる. ① 分割数の増加および境界近傍の細分割は M.S.R. を減少させる. ② M.S.R. は波数  $n$  にも依存し, 一般には  $n$  の増加とともに大きくなる傾向がある. なお, 7つの分割方法のうち, No. 4 ののが適切と思われる. この分割パターンの M.S.R. は, No. 5 のそれとほぼ同じ値をとり, かつ  $n$  に依存しないものとなっている. この点は, 先程の Table 1 の結果にも反映されている.

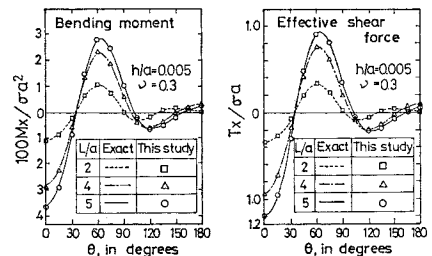
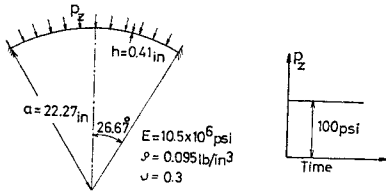


Fig. 8 Meridional bending moment and effective shear force at clamped end.



**Fig. 9** Spherical cap under pulse loading (1 in.= 2.54 cm, 1 psi=6.9 kN/m<sup>2</sup>, 1 lb/in.<sup>3</sup>=0.272 N/m<sup>3</sup>).

**Fig. 8** には、高さ半径の比  $L/a=2, 4, 5$  に対して計算した前述の風荷重 (式 (46)) による固定端の  $M_x$  と  $T_x$  の周方向分布を示す。  $L/a$  によらず理論値とよく一致している。要素分割数は3である。

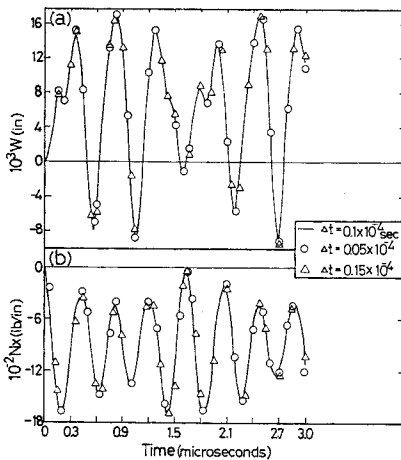
本計算値は要素分割数、要素分割パターンおよび一要素内の選点数の影響を受けるが、平均二乗残差を空間領域に対する離散化の程度の判定に用いて、残差の大きい要素の細分割あるいは一要素内の選点数を増すなどして解析すれば、本計算値はより信頼性の高いものとなる。

(2) 動的問題

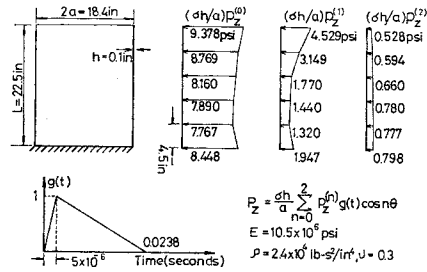
a) 衝撃荷重を受ける球殻

モデルは Klein ら<sup>18)</sup> が空間に対して FEM (42 要素の円錐台要素, 約 130 自由度) を用いて解析した, **Fig. 9** に示す衝撃荷重 (波数  $n=0$ ) を受ける球殻である。本法は 2 要素 (等分割, 約 70 自由度) で空間を近似し, 数値積分法は文献 18) と同じく, Chan ら<sup>19)</sup> のスキームにより解析した。

**Fig. 10** に頂点のたわみ  $W$  と固定端の合応力  $N_x$  の時間応答を示す。時間刻み幅  $\Delta T$  は, Klein らと同様な  $\Delta T=0.1 \times 10^{-4}$  s ( $=T_0/54$ ,  $T_0$  は 1 次固有周期) と,



**Fig. 10** Dynamic responses of spherical cap; (a) normal displacement at apex (1 in.=2.54 cm); (b) meridional stress resultant at clamped end (1 lb/in.=1.752 N/cm).



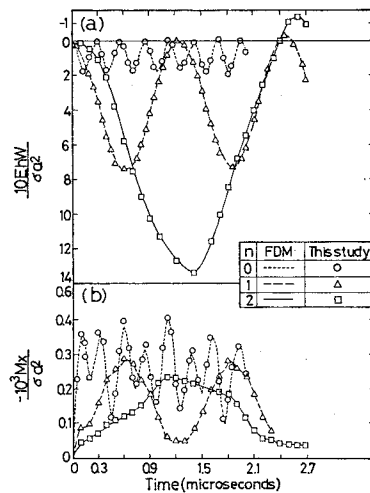
**Fig. 11** Cylindrical shell under blast loading (1 in.=2.54 cm, 1 psi=6.9 kN/m<sup>2</sup>, 1 lb-s<sup>2</sup>/in.<sup>4</sup>=0.107 N-s<sup>2</sup>/cm<sup>4</sup>).

応答に与える影響を調べるために,  $\Delta T=0.15 \times 10^{-4}$  s ( $T_0/36$ ),  $0.05 \times 10^{-4}$  s ( $T_0/108$ ) とした。図が示すように、いずれの  $\Delta T$  によっても時間応答には有意な変化は認められない。なお, FEM<sup>18)</sup> との直接的な比較は示さないが、時間応答はよく一致した。

b) 衝撃荷重を受ける円筒殻

モデルは Johnson ら<sup>3)</sup> が空間に対して FDM を適用した片持円筒殻である。荷重は周方向に  $n=0, 1, 2$  の分布をし, その時間および殻の高さ方向の分布を **Fig. 11** に示す。時間積分アルゴリズムは文献 3) と同じく Houbolt 法<sup>20)</sup> を用い, 時間刻み幅は  $\Delta T=5 \times 10^{-4}$  s とした。

自由端のたわみ  $W$  と固定端の曲げモーメント  $M_x$  の時間履歴を FDM との比較で **Fig. 12** に示す。結果はどれもよい一致を示しており, 本法によっても十分に時間応答の追跡が可能である。なお, 空間の近似は, 本法は 3 要素分割で, FDM は曲げモーメントの拘束性から差分点数 140 とした。ちなみに, 本法の未知数の数



**Fig. 12** Dynamic responses of cylindrical shell; (a) normal displacement at free end; (b) meridional bending moment at clamped end.



は FDM のそれに比べ、1/4 程度に減少している。最後に計算時間について述べる。本法の波数  $n=0, 1, 2$  に対する計算時間は約 130 秒であった。この時間は差分法のその 1/3 程度に短縮されている。使用機種は北海道大学大型計算機センターの HITAC M-200 H である。

(1), (2) の数値例は限られた形状の殻、荷重条件および境界条件に対してなされたが、それらを通じて手法の妥当性と有用性はだいたい確認できたものと思われる。

## 6. おわりに

回転殻の静的問題および動的応答問題に対して、選点法による空間領域の離散化を試み、その有効性の検討を行った。定式化においては、離散化後の連立方程式および時間に関する連立常微分方程式の係数行列が、システムチックに求められるように配慮された。

本手法による数値結果は、静的問題のみならず動的問題に対してもほぼ満足いくものであり、本手法の妥当性が検証できた。さらに、空間の離散化の近似度の判定の目安として、平均二乗残差を解析に併用するならば、本手法の結果はより高精度なものになることを数値例により示した。このことは、本手法が、特徴である簡便性を生かした効率のよい実用的解析法として、さらに発展が可能であることを示唆しているものと思われる。

最後に、本研究を遂行するにあたりご指導を賜った北海道大学工学部 芳村 仁教授に深く感謝いたします。

## 付 録 I

係数  $a_1 \sim a_{36}$  および  $b_1 \sim b_{18}$  は、次のようになる。

$$\begin{aligned} a_1 &= b/s^2, \quad a_2 = \tau a_1 \\ a_3 &= -b(\nu r_1 r_2 + r^2/s^2 + \nu_4 n^2/2r) - k r_1^2 (r^2/s^2 \\ &\quad + n^2/\nu_1 r^2) \\ a_4 &= n(1/2 + k r_1 r_2)/\nu_1 s r \\ a_5 &= -\tau n (b \nu_6/2 + k r_1 r_2 \nu_2/\nu_1)/s r \\ a_6 &= -b(r_1 + \nu r_2)/s - k r_1 (r^2/s^2 + n^2/\nu_1 r^2)/s \\ a_7 &= -b\{r_1' + r(r_1 - r_2)\}/s + k r n^2 r_1 \nu_2/\nu_1 s r^2 \\ a_8 &= -r_1/s, \quad a_9 = -\nu_4 r r_1/s, \quad a_{10} = -a_4 \\ a_{11} &= -n\{b r \nu_6/2 + k(r_1' r_2 + r r_1 r_2 \nu_2)/\nu_1\}/s r \\ a_{12} &= (1/2 + k r_2^2)/\nu_1 s^2 \\ a_{13} &= \tau(1/2 + k r_1 r_2)/\nu_1 s^2 \\ a_{14} &= -n^2(b + k r_2^2)/r^2 + (r_1 r_2 - r^2/s^2)/2 \nu_1 \\ &\quad - k r_1 r_2 (r^2/s^2 - r_2^2)/\nu_1 \\ a_{15} &= -k n r_2/\nu_1 s^2, \quad a_{16} = \nu_1 \tau a_{15} \\ a_{17} &= b n (\nu r_1 + r_2)/r - k n r_2 (r_1 r_2/\nu_1 - n^2/r^2)/r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{18} &= -\nu n r_2/r \\ a_{19} &= b(r_1 + \nu r_2)/s + k r_1 (r^2/s^2 + 2 n^2/s \nu_1 r^2) \\ a_{20} &= b r (r_1 + \nu r_2)/s + k r_1' (r^2/s^2 + 2 n^2/s \nu_1 r^2) \\ &\quad - k r r_1 (2 r_1 r_2 + r^2/s^2 - n^2/r^2)/s \\ a_{21} &= 2 a_{15}, \quad a_{22} = k n \tau (\nu_3 r_2 - 2 r_1)/\nu_1 s^2 r \\ a_{23} &= b n (\nu r_1 + r_2)/r + k n^3 r_2/r^3 \\ &\quad + k n \{r^2(\nu_3 r_1 - 2 \nu_3 r_2)/s^2 - r_1 r_2^2 \nu_3\}/\nu_1 r \\ a_{24} &= k(r^2/s^2 + 2 n^2/\nu_1 r^2)/s^2 \\ a_{25} &= -k r (2 n^2/\nu_1 r^2 + 2 r_1 r_2 - r^2/s^2)/s^2 \\ a_{26} &= -b(r_1^2 + r_2^2 + 2 \nu r_1 r_2) - k n^4/r^4 \\ &\quad + k n^2 (\nu_3 r_1 r_2 + 2 r^2 \nu_2/s^2)/\nu_1 r^2 \\ a_{27} &= 1/s^2, \quad a_{28} = \tau \nu_3/s^2 \\ a_{29} &= -\nu n^2/r^2 - \nu_4 r_1 r_2, \quad a_{30} = b k r_1/s \\ a_{31} &= b k (r_1' + \nu r r_1)/s, \quad a_{32} = b k n \nu r_2/r \\ a_{33} &= b k/s^2, \quad a_{34} = \tau \nu a_{33} \\ a_{35} &= -b k \nu n^2/r^2, \quad a_{36} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= b/s, \quad b_2 = b \tau \nu/s \\ b_3 &= b n \nu/r, \quad b_4 = -b(r_1 + \nu r_2) \\ b_5 &= -n(1 + 2 k r_1 r_2)/2 \nu_1 r \\ b_6 &= (1 + 2 r_2^2)/2 \nu_1 s, \quad b_7 = -\tau b_6 \\ b_8 &= -k n r_2/s \nu_1 r, \quad b_9 = k n r r_2/s \nu_1 \\ b_{10} &= k r_1 (r^2/s^2 + 2 n^2/\nu_1 r^2) \\ b_{11} &= -2 k n r_2/s \nu_1 r, \quad b_{12} = \tau \nu_3 b_{11}/2 \\ b_{13} &= k(r^2/s^2 + 2 n^2/s \nu_1 r^2) \\ b_{14} &= -k \nu_3 r n^2/s \nu_1 r^2, \quad b_{15} = 1/s \\ b_{16} &= \tau \nu_4/s, \quad b_{17} = r_1, \quad b_{18} = b_{15} \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} b &= 1/(1 - \nu^2), \quad k = (h/a)^2/12 \\ \nu_1 &= 1 + \nu, \quad \nu_2 = 2 + \nu, \quad \nu_3 = 3 + \nu, \\ \nu_4 &= 1 - \nu, \quad \nu_5 = 2 - \nu, \quad \nu_6 = 3 - \nu \end{aligned}$$

## 参 考 文 献

- 1) 鷲津久一郎ほか共編：有限要素法ハンドブック I 基礎編，培風館，1981。
- 2) Budiansky, B. and P.P. Radkowski : Numerical Analysis of Unsymmetrical Bending of Shells of Revolution, AIAA J, Vol. 1, No. 8, pp. 1833~1842, 1963.
- 3) Johnson, D.E. and R. Greif : Dynamic Response of a Cylindrical Shell ; Two Numerical Methods, AIAA J, Vol. 4, No. 3, pp. 486~494, 1966.
- 4) Smith, T.A. : Explicit High-Order Finite-Difference Analysis of Rotationally Symmetric Shells, AIAA J, Vol. 18, No. 3, pp. 309~317, 1980.
- 5) 三上 隆・芳村 仁：選点法による回転殻の固有振動数の解析，土木学会論文報告集，第 335 号，pp. 69~78, 1983.
- 6) Langhaar, H.L. et al. : Stability of Hyperboloidal Cooling Tower, Proc. of ASCE, Vol. 96, No. EM 5, pp. 753~779, 1970.
- 7) Stoneking, J.E. and A.P. Boreisi : A Theory for Free Vibration of Orthotropic Shells of Revolution, Nucl. Engng and Des., Vol. 14, pp. 271~285, 1970.

- 8) Langhaar, H.L. and S.C. Chu : Piecewise Polynomials and the Partition Method for Ordinary Differential Equations, Development in Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 8, Pergamon Press, pp. 553~564, 1970.
- 9) Sharma, S.K. and A.P. Boresi : Finite Element Weighted Residual Methods; Axisymmetric Shells, Proc. of ASCE, Vol. 104, No. EM4, pp. 895~909, 1978.
- 10) Novozhilov, V.V. : The Theory of Thin Shells, P. Noordhoff, 1959.
- 11) Finlayson, B.A. : The Method Weighted Residual and Variational Principles, Academic Press, 1972.
- 12) Prenter, P.M. : Splines and Variational Methods, John Wiley & Son, 1975.
- 13) Abramowitz, M. and I.A. Stegun (Eds.) : Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, 1970.
- 14) Timoshenko, S.P. and S. Woinowski-Krieger : Theory of Plates and Shells, 2nd ed., McGraw-Hill, 1959.
- 15) Greebaum, K. : Comments "Numerical Analysis of Unsymmetrical Bending of Shells of Revolution", AIAA J, Vol. 2, No. 3, pp. 590~591, 1964.
- 16) 川股重也 : コンピュータによる構造工学講座, シェル構造解析, 培風館, 1974.
- 17) Gopalacharyulu, S. and D.J. Johns : Cantilever Cylindrical Shells under Assumed Wind Pressures, Proc. of ASCE, Vol. 99, No. EM 5, pp. 943~956, 1973.
- 18) Klein, S. and R.J. Sylvester : The Linear Dynamic Analysis of Shells of Revolution by the Matrix Displacement Method, Proceedings of the 1st Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80, Wright Patterson AFB, Ohio, Oct., pp. 299~328, 1965.
- 19) Chan, S.P. et al. : Transient Analysis of Forced Vibrations of Complex Structural-Mechanical Systems, J.R. Aeronaut. Soc., Vol. 66, pp. 457~460, 1962.
- 20) Houbolt, J.C. : A Recurrence Matrix Solution for the Dynamic Response of Elastic Aircraft, J. Aeronaut. Sci., Vol. 17, pp. 540~550, 1950.
- 21) Stricklin, J.A. et al. : Improvements on the Analysis of Shells of Revolution by the Matrix Displacement Method, AIAA J., Vol. 4, No. 11, pp. 2069~2072, 1966.

(1983.4.4・受付)