土木学会論文報告集
第340号・1983年12月
【討　　議】

桜井孝昌
長谷川彰夫
西野文雄　共著

# "弾性シェルの有限変位問題の一定式化（英文）" への討議

（土木学会論文報告集 330 号・1983 年 2 月掲載）

▶討議者 (*Discussion*)——平嶋政治・依田照彦（早稲田大学）・井浦雅司（東京電機大学）
*By Masaharu Hirashima, Teruhiko Yoda and Masashi Iura*

シェルの幾何学的非線形問題の基礎式をテンソル手法を用いて誘導し，定式化の際，境界条件式について工夫された点には，有限変位問題に関心をもつ者として，興味深く読まさせていただきました．しかしながら，本論文中にはシェルの有限変位理論として統一のとれていない部分があると思われるので，ここに問題として提起したい．なお，記号等は特に断わらない限り著者らと同一のものを用いた．

## （1） 平衡方程式（13）について

Kirchhoff の応力テンソルおよび変形前の単位体積当たりの物体力を用いて平衡方程式を表わすと次式のようになる[5]．

$$(\sqrt{g}\,\sigma^{ij}\hat{\boldsymbol{g}}_j)_{,i}+X^k\boldsymbol{g}_k\sqrt{g}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{a})$$

ここに，$g$ は変形前の共変計量テンソル $g_{ij}$ を用いて $g=\det|g_{ij}|$ と表わされる．変形後の共変微分を用いて式(a) を書き直すと，

$$\sigma^{ij}|_i\hat{\boldsymbol{g}}_j+\underline{\sigma^{kj}(\Gamma_{ki}{}^i-\hat{\Gamma}_{ki}{}^i)\hat{\boldsymbol{g}}_j}+X^k\boldsymbol{g}_k=0 \quad \cdots(\mathrm{b})$$

となる．一方，変形前の共変微分を $(\ )\|_i$ で表わすと，式 (a) は

$$\sigma^{ij}\|_i\hat{\boldsymbol{g}}_j+\underline{\sigma^{ik}(\hat{\Gamma}_{ki}{}^j-\Gamma_{ki}{}^j)\hat{\boldsymbol{g}}_j}+X^k\boldsymbol{g}_k=0 \quad \cdots(\mathrm{c})$$

と表わされる．著者らの平衡方程式 (13) においては，式 (b) の実線部分が無視された形となっており，この項を無視することは，オーダ的には式 (c) の点線部分を無視することと同じであり，結果的に $\sigma^{ij}|_i=\sigma^{ij}\|_i$ を意味する．すなわち，変形前後における共変微分の差異がなくなり，有限変位理論における基礎式として式 (13) を用いることは不適当と思われる．

## （2） 式（22）の $\boldsymbol{\sigma}^{ij}=\boldsymbol{\sigma}^{ji}$ について

Kirchhoff の応力テンソルが対称性を有していることは既往の研究で示されている[5]．著者らは $\hat{\boldsymbol{a}}_3$ 軸回りのモーメントのつり合い式を応力テンソルの対称性より，恒等的に成り立つとしているが，シェル理論においては，断面力で表示する方が一般的であり，Koiter[12]，Simmonds and Danielson[13] は断面力表示による法線回りのつり合い式を有効に利用している．

## （3） 構成方程式（70）について

文献 5) の p. 50 下から 5 行目では，材料が "linear" であることが明記されているので，式 (70) の上の行の "… for isotropic homogeneous elastic continua …" という表現には，"linear" の文字が必要と思われる．さらに，式 (70) の成立は，多くの文献で示されているように，微小ひずみの仮定のもとで成立するものであり，このことが文中に述べられていないのは不自然と思われる．

## （4） 結論について

p. 158 右側上から 6 行目〜10 行目の文章において，"the finite displacement shell theory" とあるが，この有限変位シェル理論には当然幾何学的境界条件式も含まれるものと思われる．そうすると，すぐ上の文章において，metric and curvature tensors が未知数として用いられているとあるが，境界条件式 (58・a) によれば，さらに変位成分も未知数として使用されていることになる．すなわち，従来の変位成分のみを未知数とする方法に比べ，多くの未知数を用いていることになる．平衡方程式を簡略化するだけの目的ならば，Cauchy (Euler) の応力テンソルを用いる方がよく[11]，理論展開上さらには数値計算を行う場合に，変位成分のほかに metric and curvature tensors を用いるとどのような利点があるのかご教示願いたい．

### 参考文献

12) Koiter, W.T. : On the dynamic boundary conditions in the theory of thin shells, Proc. of K.N.A.W., pp. 117〜126, 1964.
13) Simmonds, J.G. and D.A. Danielson : Nonlinear shell theory with a finite rotation vector, Proc. of K.N.A. W., pp. 460〜478, 1970.

▶回答者 (*Closure*)……——————桜井孝昌(豊田工業高専)・長谷川彰夫・西野文雄(東京大学)

著者らの論文に対し，貴重なご討議をいただき感謝いたします．

本報告は弾性シェルの有限変位理論について簡明でかつ精度上統一のとれた定式化を行うことを目的としたものです．

定式化の過程で微小ひずみの条件を必要とするところがあり，それが明示されていなかったため不明確な内容となった部分があったことを認めます．以下，ご討議の項目に従って回答します．

(**1**) 平衡方程式 (13) について

ご指摘の式 (b) および式 (c) の下線部の項は，平衡方程式の定式化において変形後の基底ベクトル $\hat{\boldsymbol{g}}_i$ を用いたのに対し，応力テンソルとしては変形前の断面積に作用する Kirchhoff の応力テンソルを用いたため，式 (a) において $\sqrt{g}$ が現われた結果生じた項である．

$\sqrt{g}$ に対応する変形後の項を $\sqrt{\hat{g}}$ とすると，$\sqrt{\hat{g}}/\sqrt{g}\fallingdotseq 1$ と近似した場合に式 (13) が成り立つ．この近似は変形前，後の体積の変化量を無視したことに対応し，微小ひずみの条件を適用したことになる[4]．したがって，式 (13) は微小ひずみの条件のもとで成り立つ平衡方程式である．

$\sigma^{ij}$ を変形後の断面積に作用する Cauchy の応力テンソルとし，変形後の単位体積当たりで定義した物体力成分を改めて $X^k$ と定義すれば，式 (13) は厳密な式となる．ただし，この場合は $X^k$ として本文 p. 157 右側の下より 25 行目に示した物体力を用いる必要がある．しかし，式 (70) の応力-ひずみ関係式においても，討議 (**3**) で指摘されているように，微小ひずみの条件が適用されているため，平衡方程式においてもこの条件を用いることで定式化における精度上の矛盾は生じないと考えられる．

(**2**) 式 (22) の $\sigma^{ij}=\sigma^{ji}$ について

応力テンソルの対称性はひずみテンソルの対称性とフックの法則を表わす応力-ひずみ関係式で保証されている．したがって，$\hat{\boldsymbol{a}}^3$ 軸回りのモーメントのつり合い式はこの応力テンソルの対称条件より恒等的に成り立つ．したがって，この対称条件に基づいて作られた合応力，合モーメント表示のつり合い式は，式 (17) および式 (24) のつり合い条件を満足する解を自動的に満足している恒等式である．このため，本論文ではこの恒等式をつり合い条件式の基本式からは除いた．ただし，指摘されているように近似解を補正するうえで解析上有効に利用される場合もある．合応力，合モーメントで表わした $\hat{\boldsymbol{a}}^3$ 軸回りのモーメントのつり合い式は

$$\hat{\varepsilon}_{\gamma\delta}(\hat{N}^{\delta\gamma}+\hat{M}^{\beta\gamma}\hat{b}_{\beta}{}^{\delta})=0$$

となる[7]ことを付記しておく．

(**3**) 構成方程式 (70) について

ご指摘のとおり，材料線形性および微小ひずみの仮定のもとに式 (70) が成り立つ．

(**4**) 結論について

数値計算を行う場合は本論文で未知数として用いた metric および curvature tensors を，本文 p. 157 の右側下より 14 行目から p. 158 の左側上より 4 行目までに述べたようにして，変位成分で表わす必要がある．しかし，理論式を表示する場合は，式に現われる項の物理的意味が理解できる形で簡明に表現することが好ましく，この意味で変位より metric および curvature tensors を未知量として用いた方がよいと思われる．

平衡方程式に関しては討議 (**1**) で述べたとおりである．