

## 不規則分布荷重を受ける不静定ばりの共分散応答\*

COVARIANCE RESPONSES OF STATICALLY INDETERMINATE BEAMS  
WITH STOCHASTIC DISTRIBUTED LOAD

岡 林 隆 敏\*\*・浦 川 剛 志\*\*\*・吉 田 啓 三\*\*\*\*

By Takatoshi OKABAYASHI, Takeshi URAKAWA  
and Keizo YOSHIDA

## 1. はじめに

構造物の安全性を信頼性理論に基づいて評価するためには、各種の不確定要因を考慮した構造解析が基礎になる。不規則外力を受ける構造物の動的応答解析では、各種の解析手法が提案されており、複雑な構造物の不規則応答解析が可能になっている。しかし、不規則分布荷重を受ける構造物の静的応答解析では、はりのような基本的な構造要素についても、一般的な解析手法が確立していない。このような問題では不規則境界値問題となるために、応答解析は非常問題となる。したがって、従来の解析<sup>1)~4)</sup>はもっぱら Green 関数を解析的に積分する手法に限られており、このことが解析を単純な構造系に限定している主要な原因であると思われる。より一般的な解析を可能にするためには、数値解析に適した解析手法を研究する必要がある。このような観点から、著者の一人は白色雑音過程でモデル化した不規則分布荷重を受ける。一様断面ばりの解析手法について報告<sup>5)</sup>した。前報<sup>6)</sup>では、一様断面ばりの理論を示したが、本論文では、これを変断面ばりにも適用できる形に定式化した。解析例として前報<sup>6)</sup>に引き続き一様断面ばりを取り上げ、不静定ばり、ここでは固定-移動ばりと両端固定ばりの分散・共分散応答の解析解を得た。本解法によれば、従来の解法と同じく、多重積分を実行すれば解析解が得られる。しかし、本解法の有利な点は直接数値解析できる形になっていることである。

2. はりの基礎方程式と不規則応答解析の概要<sup>5), 6)</sup>

## (1) はりの基礎方程式の状態空間表示

Fig. 1 のように、分布荷重が作用するはりの要素において、 $x$  点のたわみ  $w(x)$ 、たわみ角  $\phi(x)$ 、曲げモーメント  $M(x)$  およびせん断力  $Q(x)$  の変化は 状態変数

$$X(x)^T = [w(x) \phi(x) M(x) Q(x)] \dots \dots \dots (1)$$

を用いて 次のような方程式で表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} X(x) &= A(x)X(x) + F(x) \quad (0 \leq x \leq l) \\ \text{境界条件: } X(0) &= X_0, \quad X(l) = X_l \end{aligned} \right\}$$

$$\dots \dots \dots (2)$$

ここに、 $T$  の記号は転置行列を表わしている。

左端の境界では、回転支点、固定支点および自由端について、それぞれ  $[\phi_0 Q_0]$ ,  $[M_0 Q_0]$ ,  $[w_0 \phi_0]$  の自由度がある。これを初期ベクトル  $\tilde{X}_0$  で定義すると、左端境界マトリックス  $B^{(s)}$  を用いて

$$X_0 = B \tilde{X}_0 \dots \dots \dots (3)$$

で表わされる。他方、右端境界では、移動支点、固定支点および自由端に対して、それぞれ  $[w_l M_l]$ ,  $[w_l \phi_l]$ ,  $[M_l Q_l]$  は  $0$  となる。これを終端ベクトル  $\tilde{X}_l$  と定義すると、右端の境界マトリックス  $B^{(s)}$  を用いて、右端境界条件は

$$B' X_l = \tilde{X}_l = 0 \dots \dots \dots (4)$$

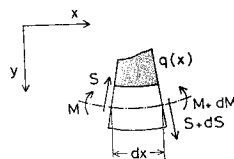


Fig. 1 Forces acting on beam element.

\* 昭和 57 年度土木学会西部支部研究発表会にて概要を発表

\*\* 正会員 工修 長崎大学助手 工学部土木工学科

\*\*\* 正会員 長崎県庁

\*\*\*\* 学生会員 長崎大学大学院学生

となる。

不規則分布荷重  $q(x)$  を、平均値 0、パワースペクトル密度  $S$  の正規白色雑音過程でモデル化する。外力ベクトル  $F(x)$  は平均値  $\mathbf{0}$  で共分散

$$E[F(x_1)F(x_2)^T] = Q(x_1)\delta(x_1 - x_2) \dots\dots(5)$$

である正規白色雑音過程ベクトル<sup>5)</sup>となる。ここに、 $E[\ ]$  は集合平均を表わす演算子である。

このような外力に対する応答は、次式で与えられる。

$$X(x) = \Phi_X(x, 0)X_0 + \int_0^x \Phi_X(x, \lambda)F(\lambda)d\lambda \dots\dots\dots(6)$$

ここに、 $\Phi_X(x_1, x_2)$  は式 (2) に関する状態遷移行列 (格間伝達マトリックス) である。

(2) 共分散応答解析

本論文では、応答の平均値まわりの変動のみに着目する。この場合、応答の共分散は、 $R_X(x) = E[X(x) \cdot X(x)^T]$  で定義される。応答の分散・共分散は、共分散方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx}R_X(x) &= A(x)R_X(x) + R_X(x)A(x)^T \\ &\quad + \Phi_X(x, 0)E[X_0F(x)^T] \\ &\quad + E[F(x)X_0^T]\Phi_X(x, 0)^T + Q(x) \end{aligned} \right\} \text{境界条件: } R_X(0) = R_0, R_X(l) = R_l \dots\dots\dots(7)$$

の解として得られる。著者の一人は前報<sup>9)</sup>において、これを初期値問題に変換して解く解法を提案した。すなわち、この方程式は、 $E[X_0F(x)^T]$ 、 $E[F(x)X_0^T]$  と  $R_0$  を求めることができるならば、初期値問題として解くことができる。

1) 境界条件と荷重の相関関数

$x=l$  とした式 (6) の右から  $F(x)^T$  を掛け、両辺に平均の操作を施す。さらに、白色雑音に関する積分を実行し、式 (3)、(4) の関係を用いると

$$B'\Phi_X(l, 0)BE[X_0F(x)^T] + B'\Phi_X(l, x)Q(x) = \mathbf{0} \dots\dots\dots(8)$$

を得る。これより  $E[X_0F(x)^T]$  が得られる。また、 $E[X_0F(x)^T] = E[F(x)X_0^T]^T$  の関係がある。

2) 初期条件の共分散

共分散方程式の解は、これを初期値問題と考えた場合、初期条件  $R_0$  による応答と、 $R_0 = \mathbf{0}$  としたときの荷重のみによる応答 (荷重項による応答) の和として与えられる。

$$R_X(x) = \Phi_X(x, 0)R_0\Phi_X^T(x, 0) + P(x) \dots\dots(9)$$

ここに、 $P(x)$  を荷重項による共分散応答とする。 $x=l$  とした式 (9) の両側より  $B'$  と  $B'^T$  を掛けると、式 (4) の関係より  $B'R_X(l)B'^T = \mathbf{0}$  となる。さらに、式 (3) の関係を用いると、

$$B'\Phi_X(l, 0)B'^T\tilde{R}_0B'^T\phi_X(l, 0)^T B'^T + B'P(l)B'^T = \mathbf{0} \dots\dots\dots(10)$$

が得られる。ここに、 $\tilde{R}_0$  は  $\tilde{X}_0$  の共分散  $E[\tilde{X}_0\tilde{X}_0^T]$  である。

3. 解析例と考察

(1) 解析モデル

解析モデルは、Fig. 2 に示した固定-移動ばりおよび両端固定ばりである。不規則分布荷重のモデルは、 $0 \leq x \leq l$  区間で定義される平均値 0、パワースペクトル密度  $S$  を有する定常正規白色雑音過程である。

これらのばりでは、左端は固定であるので、左端境界マトリックス  $B^{(s)}$  は、

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(11)$$

となる。他方、右端境界マトリックス  $B^{(s)}$  は、移動支点と固定支点について、それぞれ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(12)$$

となる。

はりの  $x$  点の変位と断面力の共分散  $R_X(x)$  の要素は、

$$R_X(x) = \begin{bmatrix} E[w(x)^2] & & & \\ E[\phi(x)w(x)]E[\phi(x)^2] & \text{(Sym.)} & & \\ E[M(x)w(x)]E[M(x)\phi(x)]E[M(x)^2] & & & \\ E[Q(x)w(x)]E[Q(x)\phi(x)] & & & \\ & & & E[Q(x)M(x)]E[Q(x)^2] \end{bmatrix} \dots\dots\dots(13)$$

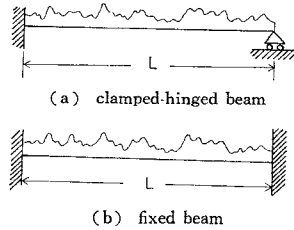


Fig. 2 Beams with randomly distributed load.

(2) 境界条件と荷重の相関関数

境界条件と荷重の相関関数は、式 (8) より得られる。

a) 固定-移動ばりの場合

$E[X_0F(x)^T]$  の 0 でない要素は、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} E[M_0q(x)] &= \frac{Sl\xi}{2}(-2 + 3\xi - \xi^2) \\ E[Q_0q(x)] &= \frac{S}{2}(2 - 3\xi^2 + \xi^3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

ただし、 $\xi = x/l$  である。

b) 両端固定ばりの場合

$$\left. \begin{aligned} E[M_0 q(x)] &= Sl\xi(-1+2\xi-\xi^2) \\ E[Q_0 q(x)] &= S(1-3\xi^2+2\xi^3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

$$E[Q_0^2] = \frac{17}{35}Sl \quad \left. \dots\dots\dots(16) \right\}$$

を得る.

(3) 左端境界条件の共分散  $\tilde{R}_0$  の決定

0でない左端境界条件の共分散  $\tilde{R}_0$  は、式(10)より得られる。一様断面ばりでは、共分散方程式の  $A(x)$  が定数行列となるので、 $E[X_0 F(x)^T]$  と  $E[F(x) X_0^T]$  が得られると、共分散方程式は解析的に解くことができる。

b) 両端固定ばりの場合

$$\left. \begin{aligned} E[M_0^2] &= \frac{1}{105}Sl^3, E[M_0 Q_0] = -\frac{11}{210}Sl^2 \\ E[Q_0^2] &= \frac{13}{35}Sl \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

a) 固定-移動ばりの場合

0でない  $R_0$  の要素として、

$$E[M_0^2] = \frac{2}{105}Sl^3, E[M_0 Q_0] = -\frac{3}{35}Sl^2 \quad \left. \dots\dots\dots \right\}$$

(4) 変位および断面力の分散・共分散応答

上記の値を用いて共分散方程式を解くと、それぞれの境界条件に対する解が得られる。

a) 固定-移動ばりの場合

分散・共分散応答は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} E[w(x)^2] &= \frac{Sl^7}{5040 E^2 I^2} \xi^4 (24-72\xi+68\xi^2-8\xi^3-21\xi^4+10\xi^5-\xi^6) \\ E[\phi(x)w(x)] &= \frac{Sl^6}{5040 E^2 I^2} \xi^3 (48-180\xi+204\xi^2-28\xi^3-84\xi^4+45\xi^5-5\xi^6) \\ E[M(x)w(x)] &= \frac{Sl^5}{210 EI} \xi^2 (-2+12\xi-17\xi^2+14\xi^4-8\xi^5+\xi^6) \\ E[Q(x)w(x)] &= \frac{Sl^4}{420 EI} \xi^2 (18-34\xi-35\xi^2+105\xi^3-63\xi^4+9\xi^5) \\ E[\phi(x)^2] &= \frac{Sl^5}{1680 E^2 I^2} \xi^2 (32-144\xi+204\xi^2-56\xi^3-84\xi^4+56\xi^5-7\xi^6) \\ E[M(x)\phi(x)] &= \frac{Sl^4}{420 EI} \xi (-8+54\xi-102\xi^2+35\xi^3+63\xi^4-49\xi^5+7\xi^6) \\ E[Q(x)\phi(x)] &= \frac{Sl^3}{210 EI} \xi (18-51\xi+105\xi^3-84\xi^4+14\xi^5) \\ E[M(x)^2] &= \frac{Sl^3}{420} (8-72\xi+204\xi^2-140\xi^3-105\xi^4+126\xi^5-21\xi^6) \\ E[Q(x)M(x)] &= \frac{Sl^2}{140} (-12+68\xi-70\xi^2-70\xi^3+105\xi^4-21\xi^5) \\ E[Q(x)^2] &= \frac{Sl}{140} (68-140\xi+140\xi^3-35\xi^4) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

たわみ、たわみ角、曲げモーメントおよびせん断力の応答の標準偏差を、等分布荷重  $q$  によるそれぞれの最大値  $\bar{w}_{max}$ ,  $\bar{\phi}_{max}$ ,  $\bar{M}_{max}$  および  $\bar{Q}_{max}$  で基準化した値を Fig. 3 に示した。なおこの図では、不規則分布荷重のパワースペクトル密度  $S$  は、 $S \cdot l/q^2 = 1$  となるように基準化している。

b) 両端固定ばりの場合

$$\left. \begin{aligned} E[w(x)^2] &= \frac{Sl^7}{1260 E^2 I^2} \xi^4 (3-11\xi+13\xi^2-2\xi^3-7\xi^4+5\xi^5-\xi^6) \\ E[\phi(x)w(x)] &= \frac{Sl^6}{2520 E^2 I^2} \xi^3 (12-55\xi+78\xi^2-14\xi^3-56\xi^4+45\xi^5-10\xi^6) \\ E[M(x)w(x)] &= \frac{Sl^5}{630 EI} \xi^2 (-3+22\xi-39\xi^2+56\xi^4-48\xi^5+12\xi^6) \\ E[Q(x)w(x)] &= \frac{Sl^4}{420 EI} \xi^2 (11-26\xi-35\xi^2+140\xi^3-126\xi^4+36\xi^5) \\ E[\phi(x)^2] &= \frac{Sl^5}{420 E^2 I^2} \xi^2 (4-22\xi+39\xi^2-14\xi^3-28\xi^4+28\xi^5-7\xi^6) \\ E[M(x)\phi(x)] &= \frac{Sl^4}{420 EI} \xi (-4+33\xi-78\xi^2+35\xi^3+84\xi^4-98\xi^5+28\xi^6) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

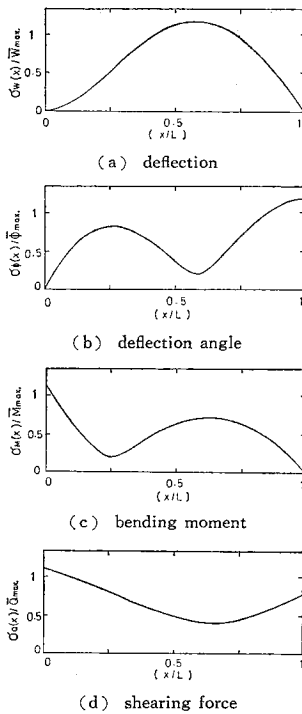


Fig. 3 Standard deviation of responses for clamped-hinged beam.

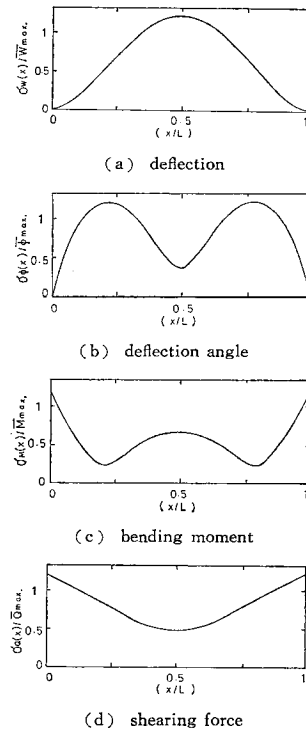


Fig. 4 Standard deviation of response for fixed beam.

$$E[Q(x)\phi(x)] = \frac{Sl^3}{210EI} \xi(11 - 39\xi + 140\xi^3 - 168\xi^4 + 56\xi^5)$$

$$E[M(x)^2] = \frac{Sl^3}{105} (1 - 11\xi + 39\xi^2 - 35\xi^3 - 35\xi^4 + 63\xi^5 - 21\xi^6)$$

$$E[Q(x)M(x)] = \frac{Sl^2}{210} (-11 + 78\xi - 105\xi^2 - 140\xi^3 + 315\xi^4 - 126\xi^5)$$

$$E[Q(x)^2] = \frac{Sl}{35} (13 - 35\xi + 70\xi^3 - 35\xi^4)$$

Fig. 4 は、両端固定ばりについてそれぞれの応答の標準偏差を、移動-固定ばりと同じ表記で図示したものである。

#### 4. おわりに

本論文では、前報<sup>5)</sup>の一樣断面ばりの共分散方程式を、変断面ばりに適用できる形に拡張した。また、解析例として、固定-移動ばりおよび両端固定ばりを考え、これらの分散、共分散応答の解析解を得た。前報<sup>5)</sup>の解析例と合わせて、はりの問題、単純ばり、片持ばり、固定-移動ばりおよび両端固定ばりに対する、変形と断面力の分散、共分散応答の解析解を得ることができた。さらに、本解法は微分方程式の解法に基づくものであり、直接数値解析が可能であることが、本解法の有利な点である。

#### 参考文献

- 1) ルジャニューティン (高岡宣善訳): 構造物の信頼性解析, 丸善, 1980-12.
- 2) Jacquot, R.G.: Nonstationary Random Column Buckling Problem, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 98, No. EM5, pp. 1173~1182, Oct., 1972.
- 3) 高岡・白木・松保: 不規則荷重によるはりの静的応答, 土木学会中国四国支部第32回学術講演会一般講演概要, pp. 33~34, 1980-5.
- 4) 高岡・白木・松保: “不規則な分布荷重を受けるはりの解析”への討議, 土木学会論文報告集, 第326号, pp. 167~172, 1982-10.
- 5) 岡林隆敏: 不規則な分布荷重を受けるはりの解析, 土木学会論文報告集, 第316号, pp. 11~21, 1981-12.
- 6) 成岡・遠田: 伝達マトリックス法 (コンピュータによる構造工学講座), 培風館, 1970-10.

(1983.4.30・受付)