

乾燥砂中のトンネルの周辺に生ずるアーチ作用の研究

STUDY ON THE ARCH ACTION ABOVE THE TUNNEL DRIVEN
IN THE COHESIONLESS SAND

小野 一良*・山田 幹雄**

By Kazuyoshi ONO and Mikio YAMADA

1. 緒 言

乾燥砂または粒状土中に掘削されたトンネル覆工には非常にわずかの土圧しか作用しないことが知られている。これは砂のアーチ作用によるといわれ、この現象を解明する目的をもってこれまでに多くの模型実験が行われてきた。その多くは測定箱の中に乾燥砂を詰め、あるいはアルミ棒を水平にして重ね、箱の底面に設けた落し戸を徐々に降下させた。このときに落し戸に作用する圧力の変化を測定し、または側面より砂層またはアルミ棒の移動の過程を観察された^{1)~4)}。また砂層の上から一様な分布荷重をかけたときにその荷重が落し戸上に伝達される割合を測定した場合もある⁵⁾。落し戸を降下させたときには図-1に示すごとく長円形内の砂またはアルミ棒が落し戸とともに下方に移動し、この図において h と $2a$ との比は円形落し戸において 0.5 となり¹⁾、2次

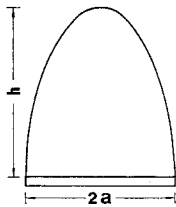


図-1
落し戸とともに下方
に移動する粒状体

元の場合には 0.86~1.2 になるとされている^{2),4)}。また落し戸に作用する荷重は落し戸が降下を開始した直後に最低となり、その後は沈下の進行とともにわずかに増加し、あるいはほぼ一定に保たれることが報告されている^{1),2),4)}。しかして最低圧力の大きさは落し戸とともに移動する長円形内の砂の重量にほぼ一致するとされている^{1),4)}。落し戸上にこの長円形に相当するブロックを載せて降下させたときにはブロックが落し戸から浮き上がって落し戸に作用する圧力が消滅したことが報告されている¹⁾。これは長円形のブロックに上から作用する土圧が非常に小さく、ブロックの降

下時に周辺の砂層との間に生ずる摩擦力に打ち勝てないのでブロックが浮き上がったとみるべきである。

一般にトンネルの覆工の上半は円弧となっており、このような覆工に作用する土圧を落し戸を用いて測定することは上述の問題が解決されないので不可能である。よってここに述べる研究では砂層その他の粒状体の中に空気圧で膨らませたゴムまたはビニールチューブおよびボールを埋め込み、この空気圧を徐々に抜いて上部の粒状体を支持し得る最低圧力およびその後の圧力の変化を測定した。この方法によれば円筒面または球面上に直接作用する土圧の大きさを知ることができ、トンネル土圧解明の有力な一手段となる。

このようなトンネル土圧を理論的に解明する方法として Bierbaumer および Terzaghi によって代表される理論があり^{6),7)}、またサイロの中の粒状体について圧力の分布を計算する方法として Janssen の理論がある。これらの理論はいずれもトンネル上部の土砂またはサイロに詰めた粒状体が下方に移動するにあたり、周辺の壁との間の摩擦力によってその重量の大部分が支持され、その残りが下方に伝達されるとしたものである。

以上を摩擦説とよぶこととし、これらの説はすべてトンネルの両側に垂直の壁ができることを仮定しているが、土かぶりが高くなったときにこの壁が小さい側圧で安定を保つことができるかどうか疑問がある。しかし少なくとも実験装置の中では垂直の壁の存在を認めてもよいようである。さらに問題となるのは壁に挟まれた内側で応力の水平方向における変動を無視していることであり、応力解析上矛盾を含んでいる。

次に真のアーチ説とよばれるものがあり、これは模型実験でみられた落し戸上に生ずるアーチの形状を長円または円弧の組合せで表現し、この中に含まれる土砂の重量が土圧として覆工に作用すると考えるのである。このアーチ自体は自立するだけでなく、その上の土砂の重量を支持すると仮定している。このアーチの形状を土圧曲

* 正会員 工博 金沢工業大学教授

** 学生会員 工修 金沢工業大学大学院博士課程

線より理論的に導いた論文もある¹⁾。

このアーチ説で問題になるのは乾燥砂で作られたアーチが安定であるためには少なくともアーチの軸方向の応力に主働土圧係数を掛けただけの圧力がアーチの半径方向に作用しなくてはならないということである。この圧力はトンネルの覆工より反力として伝達されなくてはならない。この圧力は一般にアーチと落し戸の間に含まれる砂の重量に比べてはるかに少ないため従来の研究では無視されていたと考えられる。アーチの頂点における砂中の垂直応力を0と仮定してこれより下部の応力解析をなした論文もある²⁾。

著者は円形トンネルまたは球面をもつ空洞の頂部に沿って乾燥砂によるアーチが形成されたときこのアーチの形状を保つためにはどれだけの圧力をアーチの半径方向に加える必要があるかを理論的に導き、これをもってトンネルまたは空洞に作用する最低圧力とした。すなわち従来の説に比べて乾燥砂によるアーチが自立することを否定したことに差がある。

2. 実験装置および使用材料

種々の直径をもつゴムまたはビニールチューブおよびボールを空気圧をもって膨らませた後に 図-2 に示すごとき測定箱の底に据え付けた。ゴムチューブは自動車の車輪に使われていたもので膨らませたときの直径は 11, 15.3, 17.3 cm の 3 種類であった。ビニールチューブとしては直径 15 cm より 27 cm に至る数種で

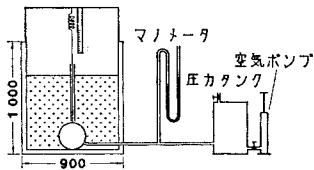


図-2 トンネル土圧測定装置

あり、ボールの直径は 30 cm, 36 cm の 2 種とした。この上に砂, 小砂利または中砂利を填充した。砂としては 1.2 mm のふるいをを用いて細かい粒子を捨て, 1.2~5 mm の粒径とした。小砂利としては砂と砂利の中間に相当する 5~10 mm とし, 中砂利としては粒径 5~20 mm とした。これらの粒度曲線を 図-3 に示し, その他の物理的性質を 表-1 に示した。摩擦係数は 1 面せん断試験機により求め, これより内部摩擦角および主働土圧係数を導いた。安息角は砂または砂利の山を作り, その斜面の勾配より求めた。

表に示すごときせん断試験より求めた摩擦角は安息角に比べてはるかに大きい。今回の実験においては比較的に圧力の小さい範囲に限られていたので砂利の内部摩擦角としては 表-1 の値よりいくらか小さい場合も考慮した方がよいと考えられる。内部摩擦角として砂と砂利

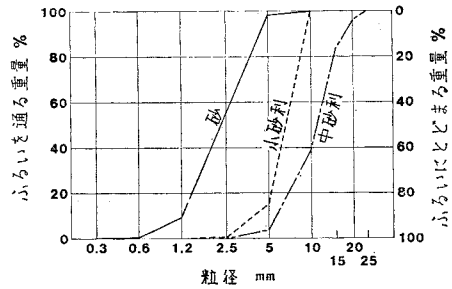


図-3 粒度曲線

表-1 実験に用いた材料の物理的性質

		砂	小砂利	中砂利
粒 径	mm	1.2~5	5~10	5~20
密 度	kg/m ³	1 460	1 620	1 690
摩 擦 係 数		0.87	1.13	
内部摩擦角	度	41	48	
主働土圧係数		0.208	0.147	
安 息 角	度	34	35	34

の中間値 45° とすれば主働土圧係数は 0.172 となる。後に述べる計算値においては砂利の主働土圧係数として 0.15 と 0.17 の 2 種を使用し, 砂に対しては 0.21 とする。

以上に述べた砂または砂利をチューブまたはボールの側方および上に一層ごとに敷きながらしながら填充した。その高さはチューブまたはボールの上 30, 40 または 50 cm とした。図-2 に示すごとくチューブまたはボールの口にはビニール管を接続し, 途中で分岐し, 一方はマノメータに通じ, 他方は排気孔に接続されている。チューブおよびボールの頂面に水糸を接着して軟らかいばねで上方に引き, 水糸につけた標点の移動量をもってチューブまたはボールの変形量とした。水糸が砂または砂利を通過する区間は細い管の中を通すことによって周囲の摩擦が水糸の移動に及ぼす影響を除いた。

3. 測定結果

測定結果の数例を 図-4 または 6 に示した。この中で 図-4 はチューブの変形量と圧力の変動との関係を示している。チューブを埋設するときすなわち実験の当初にはチューブ内の圧力をかぶり圧よりいくらか大きくしたが, チューブ埋設後に空気を徐々に抜き, 図に示すごとく空気圧がかぶり圧よりはるかに低下してもチューブの変形はほとんど生じなかった。しかして空気圧が水柱で 20~50 mm となったときに最低圧力に到達した。これよりさらに空気を抜けば変形が進行し, これに伴って圧力が徐々に増加する。変形量が 40~80 mm となったときに圧力の増加は停止し, その後はほぼ一定に保たれる。一般にチューブの変形は測定箱の中央に近い 1 点

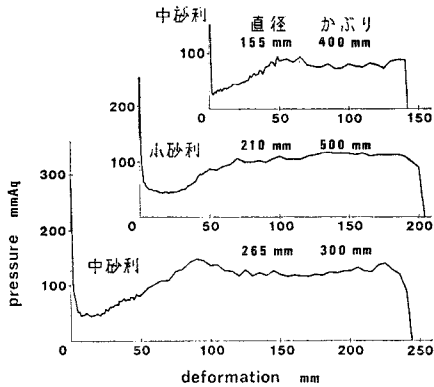


図-4 ビニールチューブの変形に伴う空気圧の変化

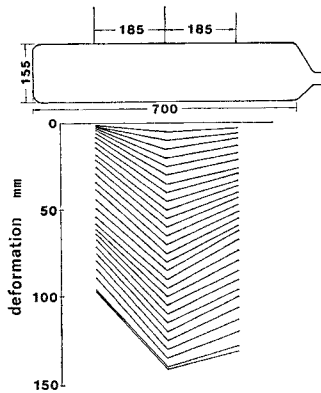


図-5 ビニールチューブ変形の過程

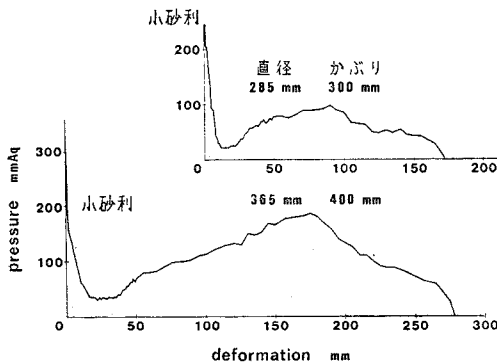


図-6 ボールの変形に伴う空気圧の変化

で測定したのであるが、同時に3か所で測定した場合もある。変形過程の一例を図-5に示したが、測定箱の中央で変形が始まり、これに遅れて両端の変形が進むものようである。

ボールについて測定した数例を図-6に示す。チューブの場合と同様に当初は空気を抜くに伴って空気圧はすみやかに低下するが、変形の進行は非常に小さい。

空気圧が水柱で20~40 mm になったときに最低圧力となる。その後は空気を抜くに伴ってボールの変形は進行し、また圧力は徐々に増加して最高圧力に達する。これより、さらにボール内の空気を抜けば圧力は徐々に低下して0に達する。このときボールは完全につぶれたことになる。

以上に述べた測定結果の中で実用的にはトンネルの崩壊を防ぐに必要とする最低圧力およびいったん崩壊を生じた後に生ずる最高圧力が最も重要であると考えられる。よって今後は最低および最高圧力についてのみ論ずることとする。種々の直径のチューブおよびボールについて砂、小砂利、中砂利のかぶりを変えて測定したが、かぶりの差による影響を見出すことはできなかった。よってかぶりの影響を無視してチューブまたはボールの直径と最低および最高圧力との関係を図-7~10に示した。これらの図に記入した直線は砂利または砂の主働土

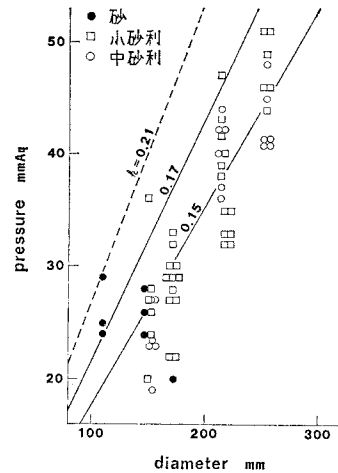


図-7 ビニールチューブの変形初期に現われる最低圧力

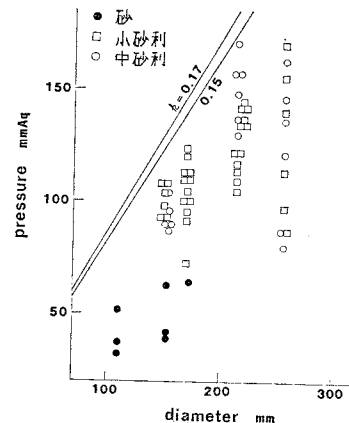
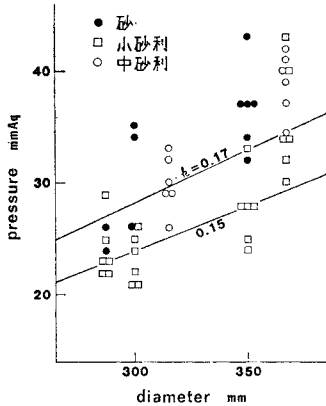
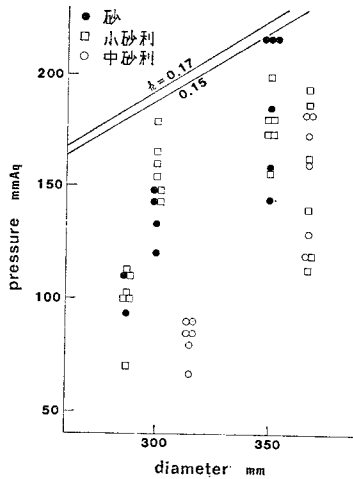


図-8 ビニールチューブの変形の進行に伴って現われる最高圧力



図—9 ボールの変形初期に現われる最低圧力



図—10 ボールの変形の進行に伴って現われる最高圧力

圧係数を 0.15, 0.17 または 0.21 としたときの理論的数値であり、その理論については次節で述べることにする。

図—7 によればチューブより得られた最低圧力は同一の直径に対してもそのばらつきが多く、また粒状体の粒径の差による影響も明らかではないが、全体的にみればチューブの直径にほぼ比例するとみることができる。また 図—9 によればボールの直径とボールより得られた最低圧力との間にも比例関係が認められる。

図—8 にはチューブの直径と最高圧力との関係が示されているが、この間に比例関係の存在することが認められる。図—10 にはボールの直径と最高圧力との関係が示されているが、比例関係の存在は明らかではない。特に中砂利を用いた実験において最高圧力の値が低いが、最高圧力は使用材料の影響を多く受けるものようである。

4. トンネルの覆工に作用する土圧の応力解析

これまでになされた多くの実験または前節で述べた実験によれば乾燥砂の下にある落し戸を下げたときまたは砂の中に埋めたチューブ内の空気圧を下げたときにこの周辺の砂は非常に小さい圧力で支持され、その大きさは土かぶりの厚さに関係のないことが確かめられた。よって著者は堆積した砂層の中に応力の小さい状態が成立したとすればこの上の砂層の重量を受けるためにはどのような応力状態があり得るのかについて理論的解析を試みた。

砂の堆積層の中に応力が 0 となる点または 0 に近い箇所が存在すると仮定してこの点を原点 O とする。水平方向に x 軸をとり、垂直上方に z 軸をとる。まず 2 次元の場合を考慮することとして x 軸に直角をなす水平方向には応力の変化はないとする。砂の単位体積重量を γ とし、点 P における x 方向、z 方向の圧縮応力をそれぞれ σ_x, σ_z とし、せん断応力を τ とする。これらの応力は次元解析によれば r と長さとの積として表わされなくてはならない。長さとしては点 P の座標または土かぶり厚さが考えられるが、土かぶりに関係のない応力の状態を求めるためには σ_x, σ_z, τ は次式によって表現されなくてはならない。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= r r f(\theta) \\ \sigma_z &= r r g(\theta) \\ \tau &= r r h(\theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 r, θ は z 軸を基線とした場合の点 P の極座標である。 $f(\theta), g(\theta), h(\theta)$ は θ の関数であり、次式で示す応力のつり合い条件式を満足しなくてはならない。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \frac{\partial \tau}{\partial x} + \gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

式 (2) に式 (1) を代入すれば次式が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} f(\theta) \sin \theta + f'(\theta) \cos \theta - h(\theta) \cos \theta \\ \quad + h'(\theta) \sin \theta &= 0 \\ g(\theta) \cos \theta - g'(\theta) \sin \theta - h(\theta) \sin \theta \\ \quad - h'(\theta) \cos \theta + 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (3)$$

砂層の中に応力の小さい箇所が存在するためにはこの上に砂のアーチが形成され、これより上の砂の重量はこのアーチによって支持され、左右に導かれると推定される。アーチの中ではアーチの軸方向に最大主応力 σ_1 が作用し、アーチの半径方向に最小主応力 σ_2 が作用すると考えられる。これらの大きさおよび傾斜角 α は次式によって導かれる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_z) \pm \frac{1}{2} \{ (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4 \tau^2 \}^{1/2} \dots (4)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_z} \dots\dots\dots(5)$$

砂層の主働土圧係数を k とすればこのようなアーチが安定を保つためには σ_z は $k\sigma_1$ より大きくなることが要求される。この限界においては

$$\sigma_z = k\sigma_1 \dots\dots\dots(6)$$

となる。式 (6) に式 (4) を代入すれば次式が導かれる。

$$(1-k)^2(\sigma_x + \sigma_z)^2 = (1+k)^2\{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau^2\} \dots\dots\dots(7)$$

上式に式 (1) を代入すれば

$$(1-k)^2\{f(\theta) + g(\theta)\}^2 = (1+k)^2[\{f(\theta) - g(\theta)\}^2 + 4\{h(\theta)\}^2] \dots\dots\dots(8)$$

上式を θ で微分すれば

$$(1-k)^2\{f(\theta) + g(\theta)\}\{f'(\theta) + g'(\theta)\} = (1+k)^2[\{f(\theta) - g(\theta)\}\{f'(\theta) - g'(\theta)\} + 4h(\theta)h'(\theta)] \dots\dots\dots(9)$$

一般に任意の θ に対して $f(\theta), g(\theta), h(\theta)$ の値が得られたときには式 (3), (9) によって $f'(\theta), g'(\theta), h'(\theta)$ が求められる。式 (3), (9) をさらに θ で微分すれば $f''(\theta), g''(\theta), h''(\theta)$ を求める式が得られる。したがって $\Delta\theta$ を微小量とすれば $f(\theta + \Delta\theta), g(\theta + \Delta\theta), h(\theta + \Delta\theta)$ は次式によって求められる。

$$\left. \begin{aligned} f(\theta + \Delta\theta) &= f(\theta) + f'(\theta)\Delta\theta + \frac{1}{2}f''(\theta)\Delta\theta^2 \\ g(\theta + \Delta\theta) &= g(\theta) + g'(\theta)\Delta\theta + \frac{1}{2}g''(\theta)\Delta\theta^2 \\ h(\theta + \Delta\theta) &= h(\theta) + h'(\theta)\Delta\theta + \frac{1}{2}h''(\theta)\Delta\theta^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

いま式 (3), (8) を満足する応力状態がトンネルの掘削によってトンネルの周辺に発生したと考えてその領域を A とする。また砂層が乱されない状態で堆積している領域を C とすれば、C 内では深さ h における σ_z は $r h$ となる。また σ_x も σ_z に比例して増加すると考えられる。式 (1) によれば A の領域内においてはすべての応力が r に比例して増加するので領域 A 内の応力と C 内の応力とがほぼ一致する境界線が存在し得ると考えられる。しかしすべての応力が同時に接続するためには A と C との間に移り変わりの領域 B が必要となり、この間

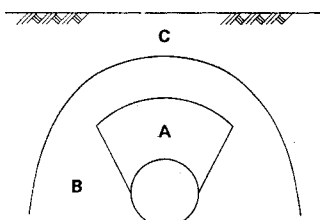


図-11 トンネル周辺に生ずる応力状態の区分

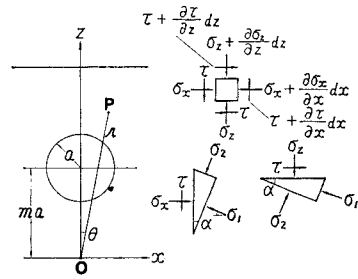


図-12 トンネル周辺に生ずる応力

係を 図-11 に示した。領域 B 内では一般に式 (6) に示すごとき限界の状態には達していないと考える。今後は領域 A についてのみ応力解析を進める。

図-12 に示すごとくトンネル覆工外周の半径を a とし、トンネル中心の座標を $(0, ma)$ とすればトンネル覆工の頂点の座標は $(0, (m+1)a)$ となる。応力は z 軸を中心として左右対称となるので $f(\theta), g(\theta)$ は偶関数となり、 $h(\theta)$ は奇関数となる。したがって

$$\left. \begin{aligned} f'(0) &= 0, & g'(0) &= 0 \\ h(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

式 (3) および (8) において $\theta=0$ と置けば

$$g(0) - h'(0) + 1 = 0 \dots\dots\dots(12)$$

$$g(0) = k f(0) \dots\dots\dots(13)$$

式 (5) によれば $\theta=0$ の近くで主応力の傾斜角 α は次式によって求められる。

$$\tan 2\alpha = \frac{2h'(0)\theta}{f(0) - g(0)} \dots\dots\dots(14)$$

上式に式 (12), (13) を代入すれば、

$$\tan 2\alpha = \frac{2\{k f(0) + 1\}\theta}{(1-k)f(0)} \dots\dots\dots(15)$$

これまでに発表された多くの論文によれば落し戸の上の砂のアーチが形成された場合には砂のアーチと落し戸との間に含まれる砂の重量が落し戸に作用する荷重となることが報告されているので砂のアーチの形状とトンネルの覆工の形状が一致したとき覆工に作用する圧力が最低になると推定される。このような場合には覆工の面に沿って頂点より x だけ離れた点における最大主応力の方向 α は次の関係を満足することが要求される。

$$\sin \alpha = \frac{x}{a} \dots\dots\dots(16)$$

x が r に比べて十分に小さい範囲内では覆工の外周において

$$\left. \begin{aligned} r &= (m+1)a \\ x &= (m+1)a \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

となる。式 (15), (16), (17) より

$$f(0) = \frac{1}{1 - 2k + (1-k)m} \dots\dots\dots(18)$$

覆工の頂点近くにある乾燥砂中の応力は式 (1), (12),

(13), (18) により

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1+m}{1-2k+(1-k)m} \cdot \tau a \\ \sigma_z &= \frac{k(1+m)}{1-2k+(1-k)m} \cdot \tau a \\ \tau &= \frac{(1-k)(1+m)}{1-2k+(1-k)m} \cdot \tau x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

以上の計算過程によって $f(0), g(0)$ および $h'(0)$ が決定されたので式 (3), (9), (10) により θ を 0 から順次増加した場合の $f(\theta), g(\theta), h(\theta)$ が求められる。

これまでに述べたところによってAの領域内の応力はすべて解析が可能となるが、これらの式には m が含まれており、この大きさは座標の原点の選び方によっていかようにも変化する。しかるにその位置を決めるべき理論的の根拠が見当たらない。 m の値としては負となる場合も考え得るが、式 (19) によれば m が負になるとこれらの応力は急速に大きくなり、覆工の頂部において比較的小さな応力を得ようとする当初の目的に合致しない。次に Bierbaumer または Terzaghi の説によればトンネル覆工上部の土圧はトンネルからの高さにかかわらずほぼ一定の解が導かれる。このような解は m を無限大とすることによって得られる。よって m の値としては 0 と無限大がその限界と考えられるのでこれらの場合について考察を進める。

まず $m=0$ とすれば式 (12), (13) および (18) によって

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{1-2k}, & g(0) &= \frac{k}{1-2k} \\ h'(0) &= \frac{1-k}{1-2k} \end{aligned} \right\} \dots\dots(20)$$

となり、これを出発点としてすべての点における応力が

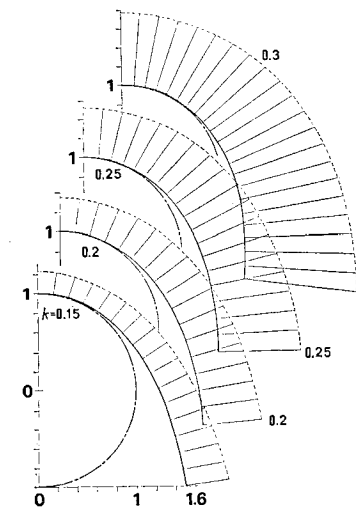


図-13 トンネル周辺に生ずる主応力の方向および大きさ ($m=0$)

計算される。最大主応力の方向は式 (5) によって求められる。表-1 によれば k は 0.15 または 0.2 に近いが、一般の設計計算ではさらに大きな土圧係数が使用される場合が多いので $k=0.25$ および 0.3 を加えることにした。 $\theta=0$ を出発点として最大主応力の方向を次から次へと接続した結果を図-13 に太い実線で示した。この図における鎖線は半径 $a=1$ とした覆工の外周を示す。図に示すごとく最大主応力の方向は k の値にかかわらずほぼ一致している。 θ が大きくなるに従ってしだいに覆工の線より外方に離れていく。この曲線に沿って覆工があれば覆工の面には全然せん断力が作用しないことになる。

最小主応力は この曲線に 直角に作用し、 $r=1$ としてその大きさを図上に示した。このように仮定しなくても図に示された最小主応力はこの圧力に等しい重量となる砂の厚さで表わされているとみてもよい。最大主応力の大きさは図には示されていないが、最小主応力の $1/k$ 倍となる。

覆工の頂点の近くにおいては

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{1-2k} \tau a, & \sigma_z &= \frac{k}{1-2k} \tau a \\ \tau &= \frac{1-k}{1-2k} \tau x \end{aligned} \right\} \dots\dots(21)$$

となり、この σ_z は覆工の頂点において覆工が支持すべき最低圧力となる。図に示すごとく最小主応力の値は頂点より離れるに従ってしだいに増加する。 $\theta=0, \pi/4$ および $\pi/2$ となるとき最小主応力の値を表-2 に示す。図-13 および表-2 によれば $\theta=\pi/4$ における最小主応力は頂点における最小主応力の 1.11~1.18 倍になっている。 $\theta=\pi/2$ においてはさらに大きくなるが、ここまでくると最大主応力の線がトンネル覆工の線より遠く離れているのでこの表に示す最小主応力をそのまま円形トンネルの覆工に作用する圧力とすることに問題がある。

以上に述べたごとく θ の増加に伴い、最小主応力の値はいくらか増加するが、その差は少ないので $\theta=0$ における最小主応力をもって砂のアーチを支持するために必要とする最低の圧力と考えることができる。式 (21) および表-2 に示すごとく σ_z の値は k の変化によって大きく変動するので k の値を的確に決めることが大きな問題となる。

表-2 最大主応力線に直角に作用する最小主応力

	$k=0.15$	$k=0.2$	$k=0.25$	$k=0.3$
$\theta=0$	$0.214 \tau a$	$0.333 \tau a$	$0.500 \tau a$	$0.750 \tau a$
$\theta=\frac{\pi}{4}$	$0.249 \tau r$ $=0.253 \tau a$	$0.380 \tau r$ $=0.386 \tau a$	$0.558 \tau r$ $=0.566 \tau a$	$0.821 \tau r$ $=0.830 \tau a$
$\theta=\frac{\pi}{2}$	$0.271 \tau r$ $=0.333 \tau a$	$0.409 \tau r$ $=0.492 \tau a$	$0.594 \tau r$ $=0.698 \tau a$	$0.861 \tau r$ $=0.987 \tau a$

次に m を無限大とした場合を考察する。これは r を無限大としたことに相当する。覆工の頂点近くにおける応力は式 (19) において m を無限大と置けば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{1-k} r a, & \sigma_z &= \frac{k}{1-k} r a \\ \tau &= r x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

が得られる。また r が無限大となるため A の領域内においては z の変化に対してすべての応力が一定値をとると考えられる。したがって式 (2) において

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots(23)$$

と置くことができる。このときには式 (22) に示した σ_x および τ は $x=0$ の付近に限らず、任意の x に適用される。この値を式 (7) に代入して σ_z を求めれば

$$\sigma_z = \frac{r a}{2k} \left\{ \frac{1+k^2}{1-k} - (1+k) \sqrt{1-4k \left(\frac{x}{a} \right)^2} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

式 (24) によれば σ_z は x とともに増加し、

$$x = a / \sqrt{4k} \dots\dots\dots(25)$$

となるときの最大値となる。このとき σ_z および τ は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{z, \max} &= \frac{r a}{2k} \cdot \frac{1+k^2}{1-k} \\ \tau_{\max} &= \frac{r a}{2\sqrt{k}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

乾燥砂の内部摩擦角を φ とすれば

$$k = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \dots\dots\dots(27)$$

$$\frac{\tau_{\max}}{\sigma_x} = \frac{1-k}{2\sqrt{k}} = \tan \varphi \dots\dots\dots(28)$$

x の値が式 (25) を越えれば σ_z の値は存在しない。これは A の領域が存在しないことを意味する。式 (25) に示す位置以内に垂直の壁が存在し、壁と乾燥砂との間の摩擦係数が $\tan \varphi$ より大きければ以上に導いた応力状態は成立することが可能となる。

$a=1$ とし、 $k=0.15, 0.2, 0.25$ および 0.3 として最大主応力の方向を計算し、次から次へと接続した結果を図-14 に実線で示した。図の鎖線は覆工の外周を示す。トンネルの頂点では乾燥砂の作るアーチの曲率がトンネルの外周の曲率に一致するとしても頂点を離れるに従ってアーチの軸はしだいに外方にそれることが認められる。式 (25) によれば $k=0.3$ のときには $x=0.913 a$ が以上の諸式の適用される限界となり、 $k=0.25$ のときには $x=a$ が限界となる。これより内側に垂直の壁が存在しないときにはトンネルの頂点において砂の作るアーチの曲率と覆工の曲率とが一致すると的前提条件を捨て、式 (25) に示す x が垂直壁の位置となるように a を決めなくてはならない。

図-14 にはこのような乾燥砂の形状を保つためにアーチの半径方向から加えるべき圧力の大きさを書き加え

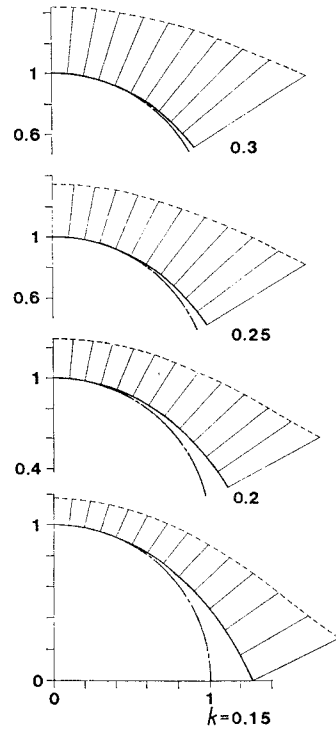


図-14 トンネル周辺に生ずる主応力の方向および大きさ ($m=\infty$)

た。ここに示した圧力の大きさはその圧力に等しい重量となる乾燥砂の厚さで表わされている。頂点から遠ざかるに従ってアーチに加えるべき横圧力の値が急に大きくなっている。よってトンネルの頂点における圧力の値をもって全部の圧力を代表させることには問題がある。

式 (22) を式 (21) に比較し、または 図-14 を 図-13 に比較すれば $m=\infty$ とした場合に覆工の頂点で必要とする圧力は $m=0$ とした場合に比べて小さいが、頂点より離れるに従って逆転することが認められる。実験結果と対照するにはなるべく圧力の変動が少ないことが望ましいので $m=0$ とした場合の方が有利となる。ただしトンネルの両側に垂直の壁の存在を仮定できる場合には式 (25) によって a を定めて $m=\infty$ とすることも意義があり、従来唱えられてきた摩擦説との関連が深い。

$m=0$ と $m=\infty$ との中間の場合も考えられるが、以上に述べた 2 つの場合より推定されるのでここでは省略する。

5. ボールの表面に作用する土圧の応力解析

前節と同様な考え方をボールの表面に作用する土圧の解析に適用する。ボールの中心を通過して上下方向に z 軸を引き、 z 軸に直角をなす放射方向を s 軸とする。 s 軸

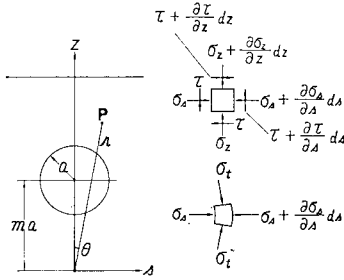


図-15 ボールの周辺に生ずる応力

方向の圧縮応力を σ_s とし、 z 軸に直角をなす円周方向の圧縮応力を σ_t とする。微小要素に作用する応力のつり合いの条件より次式が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s + s \frac{\partial \sigma_s}{\partial s} - s \frac{\partial \tau}{\partial z} - \sigma_t &= 0 \\ s \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \tau - s \frac{\partial \tau}{\partial s} + \tau s &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

z 軸を含む平面内の主応力の大きさおよび方向は式 (4) および (5) において σ_x の代わりに σ_s を代入して得られる。 z 軸を含む平面内において主応力が限界の状態にあると仮定すれば式 (7) において σ_x の代わりに σ_s とおいた式が得られる。トンネルの場合と同様に考えて σ_s, σ_z および τ を次式で表わす。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= \tau r f(\theta) \\ \sigma_z &= \tau r g(\theta) \\ \tau &= \tau r h(\theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

σ_t は最大主応力 σ_1 に一致すると仮定すれば式 (4) および (7) において σ_x の代わりに σ_s とおいて

$$\sigma_t = \frac{1}{1+k} (\sigma_s + \sigma_z) = \frac{\tau r}{1+k} \{f(\theta) + g(\theta)\} \dots\dots\dots (31)$$

が得られる。これらの式を式 (29) に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} f(\theta)(1+\sin^2\theta) + f'(\theta)\sin\theta\cos\theta \\ - h(\theta)\sin\theta\cos\theta + h'(\theta)\sin^2\theta \\ - \{f(\theta) + g(\theta)\}/(1+k) &= 0 \\ g(\theta)\sin\theta\cos\theta - g'(\theta)\sin^2\theta - h(\theta)(1+\sin^2\theta) \\ - h'(\theta)\sin\theta\cos\theta + \sin\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

任意の θ について $f(\theta), g(\theta), h(\theta)$ の値が得られたときには式 (32) および (9) より $f'(\theta), g'(\theta), h'(\theta)$ が求められる。またこれらの式をさらに微分すれば $f''(\theta), g''(\theta), h''(\theta)$ の値を求める計算式が得られる。 $d\theta$ を微小量とするとき $f(\theta+d\theta), g(\theta+d\theta)$ および $h(\theta+d\theta)$ は式 (10) によって求められる。 $f(\theta), g(\theta)$ は θ に関して偶関数となり、 $h(\theta)$ は θ に関して、奇関数となることに注意すれば式 (32) より次式が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} f'(0) &= 0, \quad g'(0) = 0 \\ g(0) - 2h'(0) + 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

$$\left. \begin{aligned} 2(1+k)f(0) + (2+3k)f''(0) - g''(0) &= 0 \\ h''(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

式 (13) および (33) を式 (14) に代入すれば主応力の方向 α は

$$\tan 2\alpha = \frac{kf(0) + 1}{(1-k)f(0)} \theta \dots\dots\dots (35)$$

によって求められる。ボールの頂点付近では z 軸を含む平面内における最大主応力の方向はボールの面に平行であると仮定すれば α は次式を満足しなければならない。

$$\sin \alpha = \frac{s}{a} = \frac{r \sin \theta}{a} = (m+1) \sin \theta \dots\dots\dots (36)$$

α が小さい角であるとするれば式 (35), (36) より

$$f(0) = \frac{1}{2-3k+2(1-k)m} \dots\dots\dots (37)$$

したがってボールの頂点近くにおける応力は次式によって計算される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s = \sigma_t &= \frac{1+m}{2-3k+2(1-k)m} \tau a \\ \sigma_z &= \frac{k(1+m)}{2-3k+2(1-k)m} \tau a \\ \tau &= \frac{(1-k)(1+m)}{2-3k+2(1-k)m} \tau s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

これらの値を出発点としてさきに述べた方法により、順次 θ を増加した場合の応力の値が計算される。 m の値についてはこれを定めるべき根拠がないのでトンネルの場合と同様に 0 または無限大とした場合を考察する。

まず $m=0$ としたときには式 (37) より

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2-3k}, \quad g(0) = \frac{k}{2-3k} \\ h'(0) &= \frac{1-k}{2-3k} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

$\theta=0$ を出発点として最大主応力の方向を延長した場

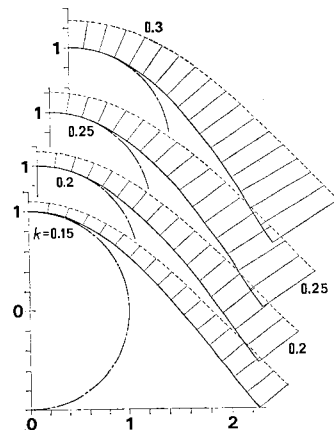


図-16 ボールの周辺に生ずる主応力の方向および大きさ ($m=0$)

表-3 最大主応力線に直角に作用する最小主応力

	$k=0.15$	$k=0.2$	$k=0.25$	$k=0.3$
$\theta=0$	$0.097 \gamma a$	$0.143 \gamma a$	$0.200 \gamma a$	$0.273 \gamma a$
$\theta=\frac{\pi}{4}$	$0.129 \gamma r$ $=-0.134 \gamma a$	$0.186 \gamma r$ $=-0.193 \gamma a$	$0.254 \gamma r$ $=-0.263 \gamma a$	$0.339 \gamma r$ $=-0.349 \gamma a$
$\theta=\frac{\pi}{2}$	$0.152 \gamma r$ $=0.227 \gamma a$	$0.217 \gamma r$ $=0.316 \gamma a$	$0.292 \gamma r$ $=0.416 \gamma a$	$0.384 \gamma r$ $=0.532 \gamma a$

合を 図-16 に示した。主働土圧係数を 0.15, 0.2, 0.25 および 0.3 とした場合を示したが、主応力の方向はほぼ一致している。ボールの頂点から遠ざかるに従って、ボールの面から離れていく。覆工の頂点近くにおける応力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s = \sigma_t &= \frac{1}{2-3k} \gamma a \\ \sigma_z &= \frac{k}{2-3k} \gamma a, \quad \tau = \frac{1-k}{2-3k} \gamma s \end{aligned} \right\} \dots\dots (40)$$

となり、この σ_z が実験で得られた最低圧力に対応すると考えられる。 $\gamma a=1$ として最大主応力の方向に直角に作用する最小主応力の大きさをこの図に書き加えた。 θ の増加に伴って、 σ_z は増加する。表-3 に $\theta=0, \pi/4$ および $\pi/2$ における最小主応力の大きさを示した。

表-3 によれば $\theta=\pi/4$ における最小主応力は $\theta=0$ における最小主応力の 1.28~1.38 倍に達する。 k の増加に伴いこの倍率は 1 に近づき、また σ_z の値は k の値に大きく支配されるので k をいくらか大きく仮定すれば式 (40) の σ_z をもってボールに作用する最低圧力とすることができる。

次に式 (38) において $m=\infty$ と置けばボールの頂点近くの応力として次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s = \sigma_t &= \frac{1}{2(1-k)} \gamma a \\ \sigma_z &= \frac{k}{2(1-k)} \gamma a, \quad \tau = \frac{1}{2} \gamma s \end{aligned} \right\} \dots\dots (41)$$

これらの応力は式 (22) の 1/2 に相当する。 r が無限大となるため z の変化に対してはすべての応力は一定値をとることになる。式 (29) に式 (23) の関係を入れれば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s + s \frac{\partial \sigma_s}{\partial s} - \sigma_t &= 0 \\ -\tau - s \frac{\partial \tau}{\partial s} + \gamma s &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (42)$$

$s=0$ のときに $\tau=0$ となることに注意すれば

$$\tau = \frac{1}{2} \gamma s \dots\dots (43)$$

が得られる。式 (42) の σ_t に式 (31) を代入すれば

$$\sigma_s + s \frac{\partial \sigma_s}{\partial s} - \frac{1}{1+k} (\sigma_s + \sigma_z) = 0 \dots\dots (44)$$

式 (7) の σ_x の代わりに σ_s を入れ、 τ に式 (43) を代入した後この式を s で微分すれば

$$(1-k)^2 (\sigma_s + \sigma_z) \left(\frac{\partial \sigma_s}{\partial s} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial s} \right)$$

$$= (1+k)^2 \left\{ (\sigma_s - \sigma_z) \left(\frac{\partial \sigma_s}{\partial s} - \frac{\partial \sigma_z}{\partial s} \right) + \gamma^2 s \right\} \dots\dots (45)$$

s のある値に対して σ_s と σ_z とが与えられているときには式 (44), (45) によって $\partial \sigma_s / \partial s$ と $\partial \sigma_z / \partial s$ が求められる。これらの式をもう一回 s で微分すれば $\partial^2 \sigma_s / \partial s^2$ と $\partial^2 \sigma_z / \partial s^2$ を求める式が得られる。これらの微分係数を用いれば $s=0$ における σ_s と σ_z との値を出発点として順次 s を大きくした場合の応力の値が計算できる。

$k=0.15, 0.2, 0.25$ および 0.3 として最大主応力の方向を求め、順次接続した曲線を 図-17 に示した。図に示すごとくボールの頂点から遠ざかるに従ってボールの面から大きく離れる。この線の上に最小主応力の値を記入した。

式 (40) と (41) とを比べれば $s=0$ のとき $m=\infty$ における σ_z は $m=0$ における σ_z より小さいが、図-17 に示すごとく $m=\infty$ とした場合の最小主応力は s の増加に伴い急激に増加する。したがって実験において空気圧の減少に伴いボールの頂点より砂の崩壊が始まったことを説明するのに不都合となる。よって $m=0$ と仮定した方が実際の砂の中の応力状態に近いと考えられる。しかし $m=\infty$ と仮定することは z 方向における応力の変化を認めないことになり、Janssen の理論と関連が深い。

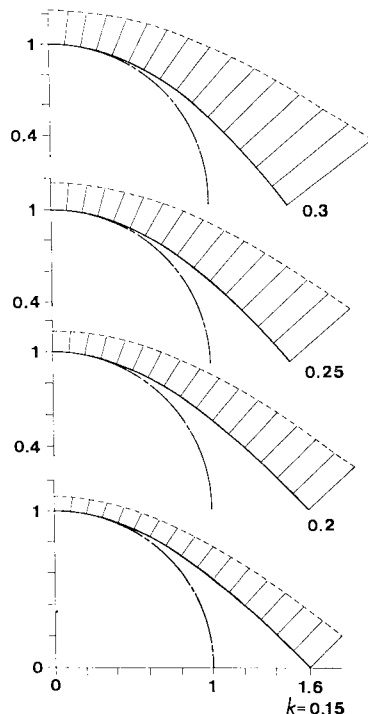


図-17 ボールの周辺に生ずる主応力の方向および大きさ ($m=\infty$)

表-4 垂直圧力の平均値を最小とするための条件

		$k=0.15$	$k=0.2$	$k=0.25$	$k=0.3$
平行壁	b/a	0.64	0.71	0.75	0.78
	平均圧力	$0.531 \gamma b$	$0.656 \gamma b$	$0.791 \gamma b$	$0.940 \gamma b$
サイロ	b/a	0.60	0.68	0.75	0.80
	平均圧力	$0.320 \gamma b$	$0.393 \gamma b$	$0.469 \gamma b$	$0.552 \gamma b$

以上に導いた理論はサイロの中に填充された粒状体の応力解析にも適用されるが、この際アーチの頂点における曲率半径 a をいくらに選ぶかが問題となる。主働土圧係数を 0.15, 0.2, 0.25 および 0.3 として計算した結果によればサイロの半径 b と曲率半径 a との比を 0.6 ~ 0.8 とした場合にサイロの中の垂直圧力の平均値は最低となり、その大きさを表-4 に示した。 b/a は表-4 に示す値を中心として相当広い範囲に変化させても垂直圧力の平均値には大きな変動はない。

同様に $2b$ の間隔で平行な垂直壁があるとき、この間に填充された粒状体の中の垂直圧力の平均値を最低とするには壁の間に渡されるアーチの曲率半径 a をいくらにしたらよいかという問題もあり、計算結果を表-4 に示した。

6. 考 察

以上に導いた計算式をチューブの実験で得られた測定値に対照することとし、表-1 によって小砂利および中砂利に対しては $\gamma=1.65 \text{ gf/cm}^3$ (16.2 kN/m^3)、 $k=0.15$ または 0.17 とする。これは内部摩擦角を 48° または 45° としたことに対応する。 $m=0$ と仮定して式 (21) によって計算した結果を図-7 に書き加えた。 $k=0.15$ は測定値のほぼ中央を通り、 $k=0.17$ は測定値の上限を通ることが認められる。砂に対しては $\gamma=1.46 \text{ gf/cm}^3$ (14.3 kN/m^3)、 $k=0.21$ として計算した結果は測定値の上限に一致した。

次に最大圧力の測定値に比較するためにはチューブの上半分がつぶれたと仮定してその体積に相当する砂利の重量をその支持面積で割り、さきに計算した σ_z に加えれば図-8 に示した計算値が得られる。この線は測定値のほぼ上限にある。実験より得られた最高圧力が計算値より低い理由としてはチューブはその中央部より順次両端に向かって崩壊するので崩壊した砂利は崩壊箇所の左右に連なる広い面積で支持されるためと考えられる。

ボールについて $m=0$ 、 $k=0.15$ または 0.17 として式 (40) より σ_z を計算した数値を図-9 に記入した。計算値は測定値のほぼ中央を通過する。ボールがつぶれる過程で得られた最高圧力は上記の σ_z に崩壊した砂利

の重量が加わったものとして図-10 に示した。一般に測定値が計算値に比べてはるかに低い理由はボールがつぶれる過程でボールの上に堆積した砂利はここに 2 次アーチを作り、その重量の多くがボールの周辺に伝達されたためと考えられる。

7. 結 論

乾燥砂または粒状体の堆積の中に掘削された円形トンネルまたは円天井をもつ空洞は非常に小さい圧力でその形を維持できることが知られている。その圧力の大きさは乾燥砂または砂利の中にビニールチューブまたはボールを空気圧で膨らませて埋め込み、この空気圧を徐々に低下してチューブまたはボールが変形を始めるときの圧力を測定することによって知ることができた。

この現象はアーチ作用とよばれ、チューブまたはボールの外周に沿って砂のアーチが形成されたためと考えられる。このアーチが安定であるためにはアーチの軸方向の圧力に主働土圧係数を掛けただけの圧力がトンネルの覆工または円天井より作用しなくてはならない。この圧力が覆工に作用する最低土圧になると考えられ、計算値は測定値にほぼ一致することが確かめられた。

謝 辞：この実験は金沢工業大学土木工学科卒業研究生諸君の協力のもとに実施されたものであり、ここに厚く感謝する。

参 考 文 献

- 1) 小野諒兄・眞井耕象：乾燥砂層に於ける垂直土圧，土木学会誌，第24巻，第5号，昭和13年5月。
- 2) 伊藤富雄・藤井清司・小副川徹：トンネルの周辺におけるアーチ作用の研究，土木学会第23回年次学術講演会講演概要集，III-107，1968。
- 3) 村山朝郎・松岡 元：粒状土地盤の局部沈下現象について，土木学会論文報告集，第172号，1969。
- 4) 村山朝郎・松岡 元：砂質土中のトンネル土圧に関する基礎的研究，土木学会論文報告集，第187号，1971。
- 5) Getzler, Z., A. Komornik and A. Mazurik: Model Study on Arching above Buried Structures, Proc. A. S.C.E. SM 5, 1968.
- 6) Bierbaumer: Die Dimensionierung des Tunnelmauerwerks, 1913.
- 7) Terzaghi, K.: Theoretical Soil Mechanics, John Wiley & Sons, New York, 1943.
- 8) 伊藤富雄：砂層中に掘った導坑の坑頂圧に関する理論的研究，土木学会第14回年次学術講演会講演概要集，II-53，1959。

(1983.2.17・受付)