

## 拡張カルマン・フィルターを用いた同定問題の 各種振動系への応用

### IDENTIFICATION PROBLEM OF SOME SEISMIC SYSTEMS BY EXTENDED KALMAN FILTER

星 谷 勝\*・斉 藤 悦 郎\*\*

By Masaru HOSHIYA and Etsuro SAITO

#### 1. はじめに

Winner による定常信号を用いた周波数領域の解析は、古典制御理論といえる。それに対して、Kalman<sup>1),2)</sup>による時系列解析と、状態空間表示をもとにした線形システム理論の方法論は、現代制御理論とよばれ、多くの実際面での応用を可能とした。そして、航空・機械・電気等の工学分野はもちろんのこと、幅広く多くの分野<sup>3)</sup>において、制御問題、推定問題、同定問題等の解析に有効な方法となっている<sup>4)</sup>。同定問題は、入出力が測定可能な場合、その中のシステムパラメータを推定しようとするものである。土木構造物の動特性を検討する目的で、多くの実験や観測等が実施され、膨大な入出力データが得られているが、ばらつきが多いために、これらのデータは十分に活用されていないように思われる。しかしながら、Kalman による現代制御理論を用いるならば、同定問題は、ばらつきや誤差の多い入出力データをもとにした動特性の推定方法として、非常に有効な手段となる。

さて、土木工学への応用例をみると、非構造分野への応用が多く、構造分野への応用は、ほとんど行われていないといつてよい。同定問題のデータ処理方法としては、一括してデータの取り込みを行い、一括して処理するバッチ処理がある。土岐・佐藤ら<sup>5)</sup>は、自己回帰移動平均 (AR-MA) モデルを用い、解析途中で得られる係数から、間接的に構造物の動特性を推定している。一方本論で扱う Kalman filter 理論を適用すると、データを逐次入力しながら逐次処理していくシーケンシャル処理であるので、変動に対して追従性がよく、また計算容量が少なくすみ、マイクロコンピュータ程度の計算機

においても十分計算処理<sup>6)</sup>ができるなどの利点がある。日野<sup>7)</sup>らは、Kalman filter 理論を用い、システム状態量をパラメーター行列への読み替えにより、大気汚染、水文流出系への応用を試みた。これらの同定方法は、システムの物理モデルの定式化が困難な場合には有効である。機械工学の分野では、最適化手法と制御理論を用いて、物理モデルを直接組み込み、シーケンシャル処理により、復元力特性が1つの非線形関数で表わせる系と、固有振動数を既知としたバイリニア系について、それぞれのパラメーターの同定を行っている<sup>8)~10)</sup>。また、このように、物理モデルを直接組み込み、シーケンシャル処理ができる同定方法としては、拡張 Kalman filter 理論<sup>11)</sup>を用いることによっても可能である<sup>12),13)</sup>。拡張 Kalman filter 理論は、非線形の状態方程式と観測方程式を、基準軌跡について線形化し、Kalman filter 理論と類似のアルゴリズムを構成したものである。そして、システム状態変数ベクトルに同定するパラメーターを直列に組み込むことにより、パラメーター推定の同定問題へと拡張することができる。この方法を用いれば、Kalman filter 理論と同様に、状態方程式と観測方程式とに分離できる。この方法は、状態変数と、観測変数との関係が明確にされていなければならないが、観測可能な変数とはまったく別のものでよいことになる。D. G. Carmichael<sup>12)</sup>は、この理論をコンクリートのクリープ問題と、線形1自由度系動的の問題に適用しているが、状態予測ステップにおける離散化において、基準軌跡の追従性が悪く、時間刻みをかなり小さくしなければならない。また Shinozuka ら<sup>13)</sup>は、多自由度系に対して、各質点の観測データが得られることを前提として、沖合の構造物に適用している。しかしながらこれらの応用例では、有限個の観測データから同定を行うことによる同定結果の安定性や、初期条件の与え方による同定可能な範囲について、ほとんど検討がなされていない。本論文は、① 線形1自由度系、② 固有振動数をも未知とし

\* 正会員 Ph.D. 武蔵工業大学教授 土木工学科

\*\* 正会員 工修 フジタ工業(株)技術研究所(現・武蔵工業大学土木工学科応用力学研究室研究生)

た, 粘性減衰を含んだバイリニア系, ③ バイリニア系の等価線形化, ④ 各質点の観測データが得られるものとした多自由度系, ⑤ ある限られた質点でしか観測データが得られないとした, 観測波形不足の多自由度系, の各振動系の同定問題を取り上げ, 拡張 Kalman filter 理論の適用性と, 同定結果の整合性について論じたものである. 本論では, 同定結果の安定性評価方法を提案し, 同定問題を数値的に検討した. また, これらの振動系に対して, 初期条件の与え方による同定結果への影響度についても数値的に検討を行っている.

## 2. 拡張カルマン・フィルターによる同定方法と, 同定結果の安定性評価方法

### (1) 拡張カルマン・フィルター<sup>11)</sup>

カルマン・フィルターは, 線形離散型状態方程式と線形離散型観測方程式を基本式として, 漸化的な最適状態量推定のアルゴリズムを構成したものである. これに対して, 拡張カルマン・フィルターは, 非線形連続型状態

$$P(t_{k+1}|t_k) = \Phi[t_{k+1}, t_k; \hat{X}(t_k|t_k)] P(t_k|t_k) \Phi^T[t_{k+1}, t_k; \hat{X}(t_k|t_k)] \dots\dots\dots (4)$$

$$\hat{X}(t_{k+1}|t_{k+1}) = \hat{X}(t_{k+1}|t_k) + K[t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)] \times [y_{t_{k+1}} - h(\hat{X}(t_{k+1}|t_k), t_{k+1})] \dots\dots\dots (5)$$

$$P(t_{k+1}|t_{k+1}) = [I - K[t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)] M\{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)\} \\ \times P(t_{k+1}|t_k) [I - K\{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)\} M\{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)\}]^T \\ + K[t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)] R(k+1) K^T[t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)] \dots\dots\dots (6)$$

$$K[t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)] = P(t_{k+1}|t_k) M^T[t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)] [M\{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)\} \\ \times P(t_{k+1}|t_k) M^T\{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)\} + R(k+1)]^{-1} \dots\dots\dots (7)$$

ここに

$\hat{X}(t_k|t_k)$ :  $Y_{t_k}$  が与えられたときの  $t_k$  時間における状態推定ベクトル (最適推定値) ( $n \times 1$ )

$P(t_k|t_k)$ :  $\hat{X}(t_k|t_k)$  と真の値  $X(t_k)$  との差の共分散行列 ( $n \times n$ )

$\hat{X}(t_{k+1}|t_k)$ :  $Y_{t_k}$  が与えられたときの  $t_{k+1}$  時間における状態推定ベクトル ( $n \times 1$ )

$P(t_{k+1}|t_k)$ :  $\hat{X}(t_{k+1}|t_k)$  と真の値  $X(t_{k+1})$  との差の共分散行列 ( $n \times n$ )

$K[t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)]$ :  $t_{k+1}$  時間でのフィルターゲイン行列 ( $n \times m$ )

$Y_k = \{y_1 \dots y_k\}$

$I$ : 単位行列 ( $n \times n$ )

となり, 初期の最適推定値  $\hat{X}(t_0|t_0)$  と初期の推定誤差の共分散行列  $P(t_0|t_0)$  が与えられれば, 式 (3)~式 (7) を用い漸化的に最適推定値を求めることができる.

なお式 (6), 式 (7) の変換行列は,

方程式と非線形離散型観測方程式を基本式としたものである. この基本式に対するアルゴリズムは, カルマン・フィルターアルゴリズムに, 非確率関数である基準軌跡を導入することにより, 構成されている.

非線形連続型状態方程式と非線形離散型観測方程式を

$$dX_t/dt = f(X_t, t) \quad X_{t_0} \sim N(\hat{X}_{t_0}, P_{t_0}) \dots\dots\dots (1)$$

$$y_{t_k} = h(X_{t_k}, t_k) + v_k \dots\dots\dots (2)$$

ただし,  $X_{t_0} \sim N(\hat{X}_{t_0}, P_{t_0})$ ;  $X_{t_0}$  は, 平均値  $\hat{X}_{t_0}$ , 分散  $P_{t_0}$  のガウス分布,

$v_k$ : ガウス白色雑音 ( $m \times 1$ )

$$E[v_k] = 0$$

$$E[v_k v_l^T] = R(k) \delta_{kl} \quad (E[\ ] : \text{期待値})$$

( $\delta_{kl}$ : クロネッカー・デルタ関数)

$X_t, X_{t_k}$ : システムの状態変数 ( $n \times 1$ )

$y_k$ : 観測ベクトル ( $m \times 1$  ( $m \leq n$ ))

として表わすと, 拡張カルマン・フィルターアルゴリズムは,

$$\hat{X}(t_{k+1}|t_k) = \hat{X}(t_k|t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\hat{X}(t|t_k), t) dt \dots\dots\dots (3)$$

$$M[t_k; \hat{X}(t_k|t_k)] = \left[ \frac{\partial h_i(X_{t_k}, t_k)}{\partial x_j} \right]_{X_{t_k} = \hat{X}(t_k|t_k)} \dots\dots\dots (8)$$

また式 (4) の遷移行列は,

$$\Phi[t_{k+1}, t_k; \hat{X}(t_k|t_k)] \cong I + \Delta F[t_k; \hat{X}(t_k|t_k)] \dots\dots\dots (9)$$

$$F[t_k; \hat{X}(t_k|t_k)] = \left[ \frac{\partial f_i(X_t, t)}{\partial x_j} \right]_{X_t = \hat{X}(t_k|t_k)} \quad (\Delta : \text{時間刻み})$$

として表わされる.

### (2) 同定問題への拡張<sup>12), 13)</sup>

非線形状態方程式 (1) の右辺は, 入力を含めたものとして読み替え, 同定するパラメーターは, システム状態ベクトルと直列に組み込む. そして拡張カルマン・フィルターのアルゴリズムを用いることにより, システム状態変数の最適推定値と, パラメーターの最適推定値を同時に求めることができる.

(3) 同定結果の安定性評価基準の提案

ここでは、拡張カルマン・フィルタを有効に用いて、効率的な同定とその結果の精度を高める、重み付きグローバルな繰り返し法(EK-WG工法)と評価基準を提案した。

われわれは、ある有限個の観測データから、任意の初期条件のもとで同定を行う。このため同定結果が本当に安定した結果であるかの疑問が残る。そこで同定結果が初期条件の影響を受けなければ安定である、という基本的な考え方をもとに、図-1のアルゴリズムを構成した。このアルゴリズムは、任意の初期値  $X_0$  での同定結果  $\hat{X}(t_s|t_s)$  を初期値  $\hat{X}(t_0|t_0)$  として再び同定を行う方法である。そしてこのグローバルな繰り返しにより、 $\hat{X}(t_0|t_0)$  と  $\hat{X}(t_s|t_s)$  の値がほぼ等しくなる  $\hat{X}(t_s|t_s)$  を、安定した同定結果であると判断するものである。 $P(t_0|t_0)$  は初期値  $\hat{X}(t_0|t_0)$  の動きやすさを意味したもので、可制御性であれば、 $P(t_s|t_s)$  の値は、かなり小さくなる。この理由からアルゴリズム中に導入した重み  $W$  は、各グローバルな繰り返し初期の活性化による、不安定な同定結果の判断しやすさと、安定速度を高める効果を意図したものである。このアルゴリズムを用いても、パラメータの同定結果がある値に漸近してこない場合には、

$$\begin{aligned}
 q_{ik} &= y_{ik} - \hat{x}_i(t_k|t_k) \\
 r_i &= \frac{\sum_{k=1}^S q_{ik}^2}{\sum_{k=1}^S y_{ik}^2} \\
 \bar{\beta} &= \frac{1}{\alpha'} \sum_{i=1}^{\alpha'} r_i \\
 \bar{\theta} &= \left\{ \sum_{i=1}^{\alpha'} (r_i - \bar{\beta})^2 \right\}^{1/2}
 \end{aligned} \tag{10}$$

ここで、 $S$ : 観測波形のデータ数

$\alpha'$ : 観測波形の波形数

の評価値  $\bar{\theta}$  を用い、 $\bar{\theta}_{min}$  の評価基準を導入することにより、その判断を行った。この  $\bar{\theta}_{min}$  は、各観測波形と最適推定値の差の正規化2乗平均 ( $r_i$ ) が、バランスよ

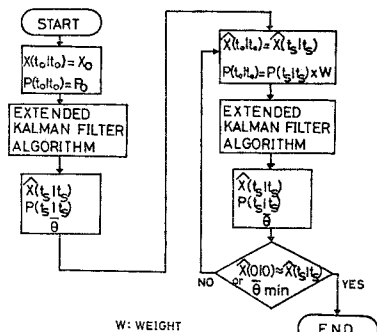


図-1 同定結果の安定性評価のアルゴリズム

く最小になる値を意味したものである。

3. 1自由度系の同定

(1) 同定に用いる観測波形

観測波形には、各モデルに対して算出した応答波形に、2乗平均値の1%の雑音を付加して用いた。モデルは、線形系1ケース、バイリニア系3ケースで、表-1に各パラメータの値を示した。入力加速度波形は、各ケースとも同一のものをい用い、等価線形化への簡便さから、正弦波(固有振数1.13 Hz)とし、最大加速度1.0 m/s<sup>2</sup>、継続時間15 s、サンプル間隔0.01 sとした。表-2に、各応答波形の2乗平均値を示した。

表-1 1自由度系モデルのパラメータ値

パラメータ モデル	$\omega_0$ (rad·s <sup>-1</sup> )	$\beta$	$\alpha$	$X_0$ (m)
B10*	7.07	0.1	1.0	—
B9	7.07	0.1	0.9	0.05
B7.5	7.07	0.1	0.75	0.05
B5	7.07	0.1	0.5	0.05

\* 線形系  
 $\omega_0, \beta, \alpha, X_0$  は後述

表-2 応答波形の2乗平均値(1自由度系)

波 モデル	応答変位 (m <sup>2</sup> )	応答速度 (m <sup>2</sup> ·s <sup>-2</sup> )	応答加速度 (m <sup>2</sup> ·s <sup>-4</sup> )
B10	4.29×10 <sup>-3</sup>	2.16×10 <sup>-1</sup>	10.7
B9	3.27×10 <sup>-3</sup>	1.64×10 <sup>-1</sup>	8.2
B7.5	2.44×10 <sup>-3</sup>	1.22×10 <sup>-1</sup>	6.1
B5	1.91×10 <sup>-3</sup>	9.56×10 <sup>-2</sup>	4.7

(2) 線形系

a) 状態方程式と遷移行列の誘導

運動方程式は

$$\ddot{x} + 2\beta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = -\ddot{x}_0 \tag{11}$$

$$\beta = c/2\sqrt{mk}, \omega_0^2 = k/m$$

で与えられる。ここで、 $\beta$ : 減衰定数、 $\omega_0$ : 固有円振動数、 $x$ : 応答変位、 $\ddot{x}_0$ : 入力加速度、である。そして

$$u = -\ddot{x}_0$$

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x}$$

とおき、システムの状態空間表示が得られる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -2\beta\omega_0x_2 - \omega_0^2x_1 - u \end{bmatrix}$$

次に同定すべきパラメータを

$$x_3 = \beta$$

$$x_4 = \omega_0$$

とおき、パラメータが定常であるとする式(1)に対応する非線形の状態方程式(12)が得られる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -2x_3x_4x_2 - x_4^2x_1 - u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(12)$$

次に離散化した遷移行列は、式 (9) から

$$\Phi(t_{k+1}, t_k; \hat{X}(t_k|t_k)) = \begin{bmatrix} 1 & \Delta & 0 & 0 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(13)$$

が得られる。

ただし

$$\begin{aligned} \phi_{21} &= -\Delta \hat{x}_4^2(t_k|t_k) \\ \phi_{22} &= 1 - 2\Delta \hat{x}_3(t_k|t_k) \hat{x}_4(t_k|t_k) \\ \phi_{23} &= -2\Delta \hat{x}_4(t_k|t_k) \hat{x}_2(t_k|t_k) \\ \phi_{24} &= -2\Delta \{ \hat{x}_3(t_k|t_k) \hat{x}_2(t_k|t_k) \\ &\quad + \hat{x}_4(t_k|t_k) \hat{x}_1(t_k|t_k) \} \end{aligned}$$

また、変位を観測波形とした場合の変換行列 (8) は

$$M[t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)] = [1, 0, 0, 0]$$

として表わされる。

**b) 同定結果**

パラメーターに対する初期の誤差の共分散  $P_{33}(t_0|t_0)$ ,  $P_{44}(t_0|t_0)$  に対して  $10^{-2} \sim 10^4$ , 観測波形に含まれる雑音の共分散  $R$  に対して  $10^{-1} \sim 10^{-8}$ , また  $\omega_0$  の初期値として,  $0 \sim 360$  の各範囲内の任意の初期条件を仮定しても, 同定結果に影響を与えず, 1回のグローバルな繰返しで十分安定であることがわかった。また  $P_{33}(t_0|t_0)$ ,  $P_{44}(t_0|t_0)$  に対しては, 数回のグローバルな繰返しを行えば,  $10^{-8} \sim 10^5$  の範囲まで可能であることがわかった。なお,  $P_{11}(t_0|t_0)$ ,  $P_{22}(t_0|t_0)$  の値は 0.001, また  $\beta$  の初期値としては, 最大値 1.0 を与えた。本物理モデルは, 最も単純なモデルであることから, 広範囲の初期条件を許容でき, 同定結果の安定性も高いことがわかった。同定結果を数値的に示せば, 真の値  $\beta=0.1$ ,  $\omega_0=7.07$  に対して,  $\hat{\beta}=0.1001$ ,  $\hat{\omega}_0=7.07$  であった。

**(3) バイリニア系**

**a) 状態方程式と遷移行列の誘導**

粘性減衰を考慮した運動方程式は

$$\ddot{x} + 2\beta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2g(x) = -\ddot{x}_0 \dots\dots\dots(14)$$

復元力:  $F(x) = kg(x)$

与えられる。また  $g(x)$  は, 図-2 より

$$\begin{aligned} \overline{FC}: g(x) &= x & -X_e \leq x \leq X_e \\ \overline{BD}: g(x) &= \alpha x + (1-\alpha)X_e & \dot{x} > 0 \\ \overline{ED}: g(x) &= x + (1-\alpha)(X_e - X) & X - 2X_e \leq x \leq X \\ \overline{AE}: g(x) &= \alpha x - (1-\alpha)X_e & \dot{x} < 0 \\ \overline{AB}: g(x) &= x - (1-\alpha)(X' + X_e) \end{aligned}$$

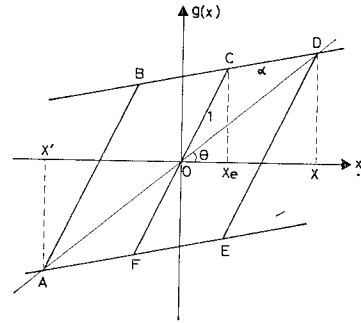


図-2 バイリニア系の復元力特性

$$X' \leq x \leq X' + 2X_e$$

与えられる。

ただし,  $\alpha$ : 弾塑性傾斜率,  $X_e$ : 降伏変位

ここで

$$u = \ddot{x}_0, x_1 = x, x_2 = \dot{x}$$

また同定すべきパラメーターを

$$x_3 = \beta, x_4 = \omega_0, x_5 = X_e, x_6 = \alpha$$

とおき, パラメーターが定常であるとする, 式 (1) に対応する状態方程式 (15) が得られる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -2x_3x_4x_2 - x_4^2g' - u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(15)$$

ただし  $g' = g(x_1, x_3, x_6)$

次に離散化した遷移行列は, 式 (9) から

$$\Phi(t_{k+1}, t_k; \hat{X}(t_k|t_k)) = \begin{bmatrix} 1 & \Delta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} & \phi_{25} & \phi_{26} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(16)$$

が得られる。ただし

$$\begin{aligned} \phi_{21} &= -\Delta \hat{x}_4^2(t_k|t_k) \{ \partial g' / \partial x_1 \}_{X = \hat{X}(t_k|t_k)} \\ \phi_{22} &= 1 - 2\Delta \hat{x}_3(t_k|t_k) \hat{x}_4(t_k|t_k) \\ \phi_{23} &= -2\Delta \hat{x}_4(t_k|t_k) \hat{x}_2(t_k|t_k) \\ \phi_{24} &= -2\Delta \hat{x}_3(t_k|t_k) \hat{x}_2(t_k|t_k) \\ &\quad - 2\Delta \hat{x}_4(t_k|t_k) \{ g' \}_{X = \hat{X}(t_k|t_k)} \\ \phi_{25} &= -\Delta \hat{x}_4^2(t_k|t_k) \{ \partial g' / \partial x_5 \}_{X = \hat{X}(t_k|t_k)} \\ \phi_{26} &= -\Delta \hat{x}_4^2(t_k|t_k) \{ \partial g' / \partial x_6 \}_{X = \hat{X}(t_k|t_k)} \end{aligned}$$

**b) 粘性減衰が既知の場合**

ここでは,  $X_e$  の初期値の与え方が問題となる。変位観測波形の最大値を越えた値として, この値を与えると,  $\alpha$  および  $X_e$  の同定結果は, 初期値と等しい値となり, またその  $P_{66}(t_s|t_s)$ ,  $P_{55}(t_s|t_s)$  も  $P_{66}(t_0|t_0)$ ,  $P_{55}(t_0|t_0)$

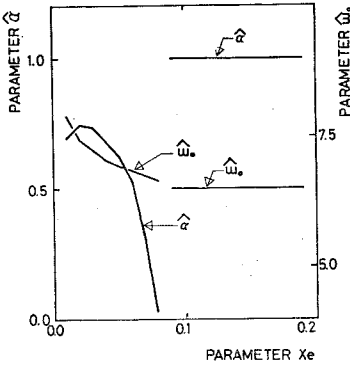


図-3  $X_e$  をパラメトリックにして  $\alpha, \omega_0$  を同定した場合

と等しい値となる。そしてこのとき得られる  $\hat{\omega}_0$  は、バイリニア系を線形系の物理モデルで置き換えたことを意味した等価固有円振動数となった(後述(4)参照)。そこでこの問題は、 $X_e$  を初期においてある程度推定する次の操作が必要となる。図-3は、 $X_e$  の誤差の共分散値  $P_{55}(t_0|t_0)$  を 0.0 として固定し、 $X_e$  の値をパラメトリックに変化させて同定を行ったものである。この図から、 $X_e$  の値が変位観測波形の最大値を越えた範囲において、 $\alpha, \omega_0$  の同定結果は、それぞれ初期値、等価固有円振動数と等しい値となるが、 $X_e$  の値が小さくなるに従い、意味のある値( $\hat{\alpha}, \hat{\omega}_0$ とも変化し、正の値)として同定されてくるのがわかる。そして、この範囲の  $X_e$  を任意に定め(表-3)、初期値として  $x_1 \sim x_6$  の同定を行った。表-4は、表-3の初期条件を用い、変位を観測波形とした場合の同定結果を示したものである。ここでは、重み 20 を乗せグローバルな繰り返しを行い、数回の繰り返しで十分安定した同定結果が得られた。なお重みの値については、後述の多自由度系において、 $W=1 \sim 100$  に対してその収束速度を数値的に検討

表-3 バイリニア系に用いる初期条件 (粘性減衰が既知の場合)

初期の最適推定値		初期の誤差の共分散値	
$\hat{x}_1(t_0 t_0)$ ( $x$ )	0.0	$P_{11}(t_0 t_0)$	0.001
$\hat{x}_2(t_0 t_0)$ ( $\dot{x}$ )	0.0	$P_{22}(t_0 t_0)$	0.001
$\hat{x}_3(t_0 t_0)$ ( $\beta$ )	0.1	$P_{33}(t_0 t_0)$	0.0
$\hat{x}_4(t_0 t_0)$ ( $\omega_0$ )	10.0	$P_{44}(t_0 t_0)$	$10^4$
$\hat{x}_5(t_0 t_0)$ ( $X_e$ )	? $\sim$ 0.04	$P_{55}(t_0 t_0)$	$0.0 \rightarrow 10^4$
$\hat{x}_6(t_0 t_0)$ ( $\alpha$ )	1.0	$P_{66}(t_0 t_0)$	$10^4$

ただし、 $P_{ij}(t_0|t_0) = 0 \quad i \neq j$   
 $R = 10^{-3}$

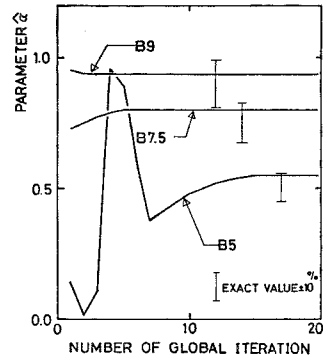
表-4 粘性減衰が既知の場合の同定結果

パラメーター モデル	初期値		同定結果		
	$\omega_0$	$X_e$	$\alpha$		
B9	7.00	0.052	0.90	—	—
B7.5	7.00	0.049	—	0.77	—
B5	6.95	0.052	—	—	0.46
真の値	7.07	0.050	0.90	0.75	0.50

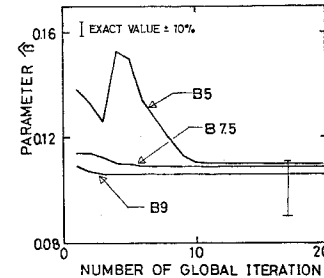
を行っている。本ケースでは、安定性がよいため  $W=5$  以上の重みでは、ほとんど収束速度が同様となった。

e) 粘性減衰も未知の場合

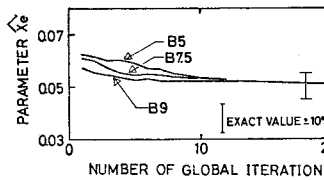
初期条件は、3.(3), b) と同じ値を用いた。ただし、 $\beta$  の初期値は、最大の 1.0 とした。変位波形のみを観測波形として用いた場合には、粘性減衰と履歴減衰との分離ができず、安定した同定結果は、得られなかった。一方同時に速度波形を観測波形として用いれば、重み付きのグローバルな繰り返しを行うことにより、安定した同定結果が得られた(図-4)。この図より、 $\alpha$  の値が減



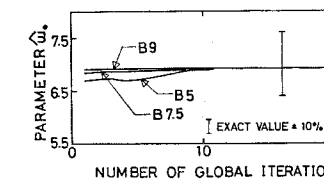
(a) パラメーター  $\alpha$



(b) パラメーター  $\beta$



(c) パラメーター  $X_e$



(d) パラメーター  $\omega_0$

図-4 バイリニア系の同定結果

少するに従い，1回目のグローバルな繰り返しによる同定結果が不安定となり，特に  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\alpha}$  の値が安定するまで，かなりの重み付きのグローバルな繰り返しが必要であることがわかる．なおここでは **b)** と同様に重み  $W=20$  を用いた．

(4) バイリニア系の等価線形化

バイリニア系の等価線形化は，図-2 を用いて

$$\omega_{\text{equ}} = \omega_0 \tan \theta \dots\dots\dots (17)$$

$$\beta_{\text{hequ}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\Delta W}{W}$$

$$\beta_{\text{equ}} = \beta + \beta_{\text{hequ}} \dots\dots\dots (18)$$

ここで， $\omega_{\text{equ}}$ ：等価な固有円振動数  
 $\beta_{\text{hequ}}$ ：履歴減衰  
 $\beta_{\text{equ}}$ ：等価な減衰定数  
 $W$ ：履歴曲線 ABDE の面積  
 $\Delta W$ ： $\Delta ODX$  の面積

として与えられる<sup>14)</sup>．ここでは，システムが線形系を構成するものと仮定し，バイリニア系 B9, B7.5, B5 モデルの変位波形を観測波形に用いて同定を行った．同定結果  $\hat{\omega}_0$ ,  $\hat{\beta}$  は，グローバルな1回の繰り返しで十分安定であり，任意の初期条件に対しても，ほとんど影響を受けないことがわかった．また，この同定結果は，式(17),(18)より求めた，等価な固有円振動数，等価な減衰定数とよい一致を示し(表-5)，一つの等価線形化の方法として有効な手法であることを示唆している．

表-5 等価線形化の同定結果

パラメーター		モデル		
		B9	B7.5	B5
同定結果	$\hat{\omega}_0$	6.88	6.77	6.70
	$\hat{\beta}$	0.1157	0.1344	0.1539
式(17),(18)	$\omega_{\text{equ}}$	6.79	6.53	6.34
	$\beta_{\text{equ}}$	0.1160	0.1366	0.1580

4. 多自由度系の同定

(1) 同定に用いる観測波形

同定に用いる観測波形は，1自由度系と同様に，モデルに対して応答計算を行い，応答波形(表-7)の2乗平均値に対して1%の雑音を付加した応答波形を用いた．モデルは，2自由度系とし，表-6に各パラメーターの値を示した．入力加速度波形には，0.1 Hz~10.0 Hz

表-6 モデルのパラメーター値(2自由度系)

パラメーター	$m$	$K$	$C$
質点	(tf·s <sup>2</sup> ·m <sup>-1</sup> )	(tf·m <sup>-1</sup> )	(tf·s·m <sup>-1</sup> )
1	2.756	382.71	6.50
2	4.593	574.06	10.27

表-7 応答波形の2乗平均値(2自由度系)

波形状点	応答変位 (m <sup>2</sup> )	応答速度 (m <sup>2</sup> ·s <sup>-2</sup> )	応答加速度 (m <sup>2</sup> ·s <sup>-4</sup> )
1	2.765×10 <sup>-5</sup>	1.898×10 <sup>-8</sup>	0.251
2	8.882×10 <sup>-6</sup>	6.603×10 <sup>-8</sup>	0.165

の有帯域白色雑音<sup>15)</sup>を用い，最大加速度 1.0 m/s<sup>2</sup>，継続時間 15 s，サンプル間隔 0.01 s とした．

(2) 状態方程式の誘導

a) 質量が既知の場合

質点系 ( $n$  自由度) の運動方程式は

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = -MJ\ddot{x}_0 \dots\dots\dots (19)$$

$$J = [1, \dots, 1]^T$$

で与えられる．ここで， $M$ ：質量行列， $C$ ：減衰行列， $K$ ：ばね行列， $X$ ：応答変位ベクトル，である．そして  $u = \ddot{x}_0$ ,  $X_1 = \dot{X}$ ,  $X_2 = X$

とおき，システムの状態空間表示が得られる．

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ -M^{-1}CX_2 - M^{-1}KX_1 - Ju \end{bmatrix} \dots\dots\dots (20)$$

次に同定すべきパラメーターを

$$X_3 = [x_{2n+1}, x_{2n+2}, \dots, x_{2n+n}]^T = [k_1, k_2, \dots, k_n]^T$$

$$X_4 = [x_{3n+1}, x_{3n+2}, \dots, x_{3n+n}]^T = [c_1, c_2, \dots, c_n]^T$$

とおき，パラメーターが定常であるとするとき，式(1)に対応する状態方程式が得られる．

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ -M^{-1}C_{(X_i)}X_2 - M^{-1}K_{(X_i)}X_1 - Ju \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (21)$$

ここで， $C_{(X_i)}$ ,  $K_{(X_i)}$  は， $C, K$  行列の各要素を，それぞれ状態変数  $X_1, X_3$  の各要素で置き換えたことを意味している．

b) 質量も未知な場合

同定すべきパラメーターを

$$X_3 = [x_{2n+1}, x_{2n+2}, \dots, x_{4n-1}]^T = \left[ \frac{k_1}{m_1}, \frac{k_1}{m_2}, \frac{k_2}{m_2}, \dots, \frac{k_n}{m_n} \right]^T$$

$$X_4 = [x_{4n}, x_{4n+1}, \dots, x_{5n-1}]^T = \left[ \frac{c_1}{m_1}, \frac{c_2}{m_2}, \dots, \frac{c_n}{m_n} \right]^T$$

とおく，ただしここでは

$$\frac{c_{n-1}}{m_n} = \frac{c_{n-1}}{m_{n-1}} \times \frac{k_{n-1}}{m_n} = \frac{k_{n-1}}{m_{n-1}}$$

の関係を用い， $X_4$  の変数の数を縮小している．そして式(20)を用い，式(1)に対応する状態方程式が得ら

れる。

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ -[M^{-1}C]_{(X_1)}X_2 - [M^{-1}K]_{(X_1)}X_1 - Ju \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(22)$$

ここで、 $[M^{-1}C]_{(X_1)}$ 、 $[M^{-1}K]_{(X_1)}$  は、 $M^{-1}C$ 、 $M^{-1}K$  行列の各要素を、それぞれ状態変数  $X_1$ 、 $X_2$  の各要素で置き換えたことを意味している。

(3) 観測波形が各質点で得られる場合

質量が既知の場合、質量も未知の場合とも、表-8、10の初期値のもとで、観測波形に含まれる誤差の共分散  $R$  は、 $10^{-3} \sim 10^{-9}$  の範囲内を変化させても、同定結果(表-9、11)に影響を与えないことがわかった。パラメータの初期の誤差の共分散  $P(t_0|t_0)$  の許容範囲は、表-8、10の初期値のもとで、質量が既知の場合に対して、 $1.0 \sim 10^7$ 、質量も未知な場合に対して  $1.0 \sim 10^5$  であった。また安定までのグローバルな繰り返し回数は、重み 20 として、2~3 回程度であった。一方  $R$ 、 $P(t_0|t_0)$  を上述の範囲以外の値として仮定すると、発散現象や、あるパラメータが負の値になるなどの現象が起こった。以上より、各質点の観測波形が得られる場合には、かなり任意に初期条件を仮定しても、ほとんど同定結果

に影響がなく、また同定結果の安定性も高いことがわかる。なお、各質点の観測波形は、変位波形を用いた。

表-8 初期の最適推定値 (質量が既知の場合)

$\hat{x}_1(t_0 t_0)$	$\hat{x}_2(t_0 t_0)$	$\hat{x}_3(t_0 t_0)$	$\hat{x}_4(t_0 t_0)$
0.0	0.0	0.0	0.0
$\hat{x}_5(t_0 t_0)$	$\hat{x}_6(t_0 t_0)$	$\hat{x}_7(t_0 t_0)$	$\hat{x}_8(t_0 t_0)$
100.0	100.0	1.0	1.0

表-9 質量が既知の場合の同定結果

パラメーター	$K_1$ (tf·m <sup>-1</sup> )	$K_2$ (tf·m <sup>-1</sup> )	$C_1$ (tf·s·m <sup>-1</sup> )	$C_2$ (tf·s·m <sup>-1</sup> )
真の値	382.7	570.1	6.50	10.27
同定結果 4-(3)	375.9	570.5	6.64	10.10
同定結果 4-(4)	337.7	598.9	6.54	10.39

表-10 初期の最適推定値 (質量も未知の場合)

$\hat{x}_1(t_0 t_0)$	$\hat{x}_2(t_0 t_0)$	$\hat{x}_3(t_0 t_0)$	$\hat{x}_4(t_0 t_0)$	$\hat{x}_5(t_0 t_0)$
0.0	0.0	0.0	0.0	10.0
$\hat{x}_6(t_0 t_0)$	$\hat{x}_7(t_0 t_0)$	$\hat{x}_8(t_0 t_0)$	$\hat{x}_9(t_0 t_0)$	
10.0	10.0	1.0	1.0	

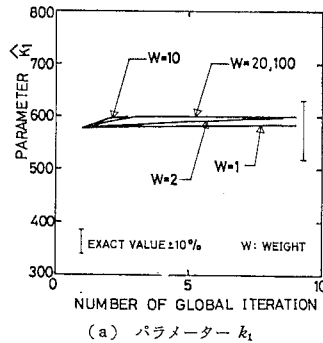
表-11 質量も未知な場合の同定結果

パラメーター	$K_1/m_1$ (s <sup>-2</sup> )	$K_1/m_2$ (s <sup>-2</sup> )	$K_2/m_2$ (s <sup>-2</sup> )	$C_1/m_1$ (s <sup>-1</sup> )	$C_2/m_2$ (s <sup>-1</sup> )
真の値	138.9	83.3	125.0	2.36	2.24
同定結果 4-(3)	138.4	77.2	119.0	2.28	2.23
同定結果 4-(4)	126.3 ~136.9	75.9 ~74.7	128.3 ~118.3	2.77 ~2.38	2.23 ~2.01

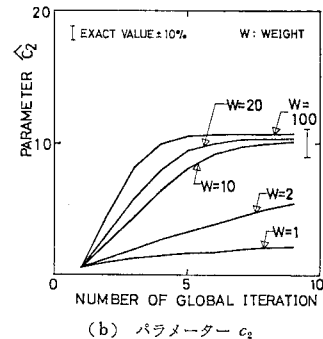
(4) 観測波形が1質点でしか得られない場合

1質点の変位波形だけが得られるものとして同定を行うと、同定結果のパラメータ値が、グローバルな繰り返しを行っても、大きな負の値となるなど、非常に悪い結果となった。そこで、ここでは、同時観測か、または変位波形を微分することにより、変位波形と同時に速度波形も観測波形として用いることができるものとした。

質量が既知の場合— $P(t_0|t_0)$  および  $R$  は、表-8の初期値を用い、それぞれ、 $10^2 \sim 10^4$ 、 $10^{-8} \sim 10^{-8}$  の範囲内の値を仮定しても、同定結果(表-9)に影響を与えなかった。この範囲は、観測波形が各質点で得られる場合に比べ、狭くなることがわかる。図-5 から1回のグローバルな繰り返しにおける  $c_1$ 、 $c_2$  の同定結果は、 $k_1$ 、 $k_2$  の同定結果に比べかなり真の値から離れていることがわかる。そして、重み、20~100 を乗せ、グローバルな繰り返しを行えば、 $c_1$ 、 $c_2$  も急速に真の値に近づくことがわかる。しかしながら、グローバルな繰り返しにおいて、重みを乗せない場合には、その安定性を判断しにくいばかりでなく、真の値に近づくまでに、かなりの繰り返しを行わなければならない。このように、1質点でしか観測波形が得られない場合には、その初期条件の許容範囲がかなり狭くなる。また特に、 $c_1$ 、 $c_2$  に対して安定までの時間がかかることがわかる。そして、本論文で提案した重みは、特にこのような不安定な同定結果の場合

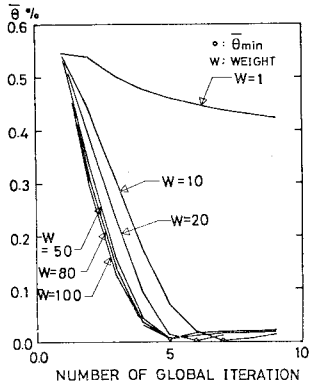
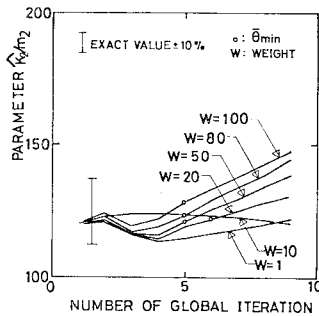
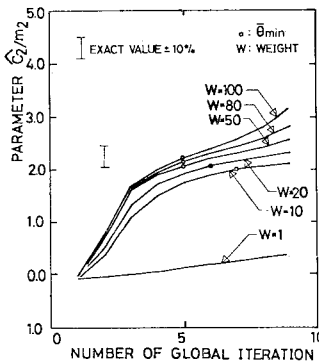


(a) パラメーター  $k_1$



(b) パラメーター  $c_2$

図-5 質量が既知の場合の同定結果 (観測波形が1質点でしか得られない場合)

(a) 各グローバルな繰返し時の評価値  $\bar{\theta}$ (b) パラメーター  $k_1/m_2$ (c) パラメーター  $c_2/m_2$ 

図—6 質量も未知の場合の同定結果 (観測波形が1質点でしか得られない場合)

合, かなり有効な方法であることが数値的に確かめられた。

質量も未知の場合——この同定問題は, これまでの同定問題に比べ, 最も厳しい条件下であり, 式 (30) の  $\bar{\theta}$  を併用することにした。1回のグローバルな繰返しにおいて,  $\frac{c_1}{m_1}, \frac{c_2}{m_2}$  は, 質量が既知の場合と同様に,  $\frac{k_1}{m_1}, \frac{k_2}{m_2}$  に比べかなり真の値から離れた値として同定される (図—6 (b), (c))。ここでは,  $\bar{\theta}$  の値を併用しており  $\bar{\theta}_{min}$  以後の計算は行う必要はないが, 参考までにその後の計算を継続させた。図—6 (b), (c) か

ら, これまでに示したように, 重みを乗せ, グローバルな繰返しを行っても, 一定値に漸近してくる傾向は現われず, 安定した同定結果を判断することができない。

図—6 (a) は, 各グローバルな繰返し時の  $\bar{\theta}$  の値を示したものであるが,  $\bar{\theta}_{min}$  の繰返し時の同定結果は, 各パラメーターとも, 真の値の  $\pm 10\%$  内 (図—6 (b), (c), 表—11) に納めることができた。このことから評価基準  $\bar{\theta}_{min}$  の有効性が確かめられた。しかしながら, 表—10 の初期値のもとで,  $R=10^{-8}, P(t_0/t_0)=10^4$  以外の初期条件においては, 発散現象を起こし, 初期条件の与え方が非常に難しいことがわかった。

## 5. おわりに

拡張カルマン・フィルタ理論を用いて, 各種振動系の同定問題を検討した。本論文で提案した同定手法の評価基準は, 同定結果の安定性の検討に適用して, その有効性が数値的に確認された。これらの結果を要約すると次のようになる。

(1) 本文中に提案した重み付きのグローバルな繰返し方法は, 同定結果の安定性評価に有効であるとともに, この重みは, 安定までの収斂速度を高める効果があることが数値的に明らかになった。またこの方法によっても安定した同定結果が得られない場合には, 同様に本文中で提案した評価基準を併用することにより, 真の値に近い同定結果が得られ, その有効性が確かめられた。

(2) 線形1自由度系, また多自由度系でも, 各質点での観測波形が得られる場合には, 同定結果の安定性が高く, 1回のグローバルな繰返しのみで十分安定した結果が得られる。また初期条件の許容範囲も広く, かなり任意の初期条件を仮定しても, 同定結果への影響は, ほとんどない。

(3) 固有振動数をも未知とした, 粘性減衰を含んだパイリニア系でも, 重み付きのグローバルな繰返しを行えば, 各パラメーターの同定が可能で, 十分安定した同定結果が得られる。そしてこの同定問題は, 非線形性の強く現われた強震波形等の実現現象の解明に有効な方法であるものと思われる。

(4) 本文中では, パイリニア系の等価線形化同定問題を取り上げた。この同定結果は, 1回のグローバルな繰返しにおいて十分安定であり, 初期条件の与え方による影響もほとんどない。そしてこの問題は, 複雑な復元力特性に対する等価線形化の方法として有効な手法であるものと思われる。

(5) 多自由度系の観測波形数不足の同定問題は, 重み付きのグローバルな繰返しを行っても, 安定した同定結果は得られないが, 本文中で示した評価基準を併用



すれば、真の値に対して  $\pm 10\%$  内の同定結果を得ることが出来る。しかしながら初期条件の与え方が難しく、今後の課題である。

参 考 文 献

- 1) Kalman, R.E. : A new approach to linear filtering and prediction problems, Trans. ASME, J. Basic Eng., Vol. 82, pp. 35~45, 1960.
- 2) Kalman, R.E. and R.S. Bucy : New result in linear filtering and prediction theory, Trans. ASME, J. Basic Eng., Vol. 83, pp. 95~108, 1961.
- 3) 有本 卓 : カルマン・フィルター, 産業図書, 1979.
- 4) 相良節夫 : 同定問題, 計測と制御, 第8巻4号, pp. 38~50, 1969.
- 5) 土岐・佐藤・生木 : 自己回帰・移動平均法による構造物の動的パラメーターの推定, 京都防災研年報, 第21号B-2, pp. 1~12, 1978.
- 6) 赤池・中川 : ダイナミックシステムの統計的解析と制御, サイエンス社, 1972.
- 7) 日野・森・吉川 : カルマン・フィルターによる大気汚染の予測, 土木学会論文報告集, 第224号, pp. 79~90, 1974-4.
- 8) Distefano, N. and A. Rath : System identification in nonlinear structural seismic dynamics, Comp. Meth. App. Mech. Eng. 5, pp. 353~372, 1975.
- 9) Distefano, N. and A. Rath : Sequential identification of hysteretic and viscous models in structural seismic dynamics, Comp. Meth. App. Mech. Eng. 6, pp. 219~232, 1975.
- 10) Distefano, N. and B. Rena-Pardo : System identification of frames under seismic load, ASCE J. Eng. Mech. Div., EM2, 1976.
- 11) Jazwinski, A.H. : Stochastic processes and filtering theory, Academic press, 1970.
- 12) Carmichael, D.G. : The state estimation problem in experimental structural mechanics, Application of statistics & probability soil and structural engineering, 3rd Inter. Conf. pp. 802~815, 1979-2.
- 13) Yun, C-B. and M. Shinozuka : Identification of nonlinear structural dynamic systems, J. Struct. Mech. 8(2), pp. 182~203, 1980.
- 14) 土質工学会編 : 土と構造物の動的相互作用, 9, 土質工学会, 1973.
- 15) 星谷 勝 : 確率論手法による振動解析, 鹿島出版会, 1974.

(1983.1.28・受付)