

無限等方弾性体内の剛体円盤の法線方向  
コンプライアンスNORMAL COMPLIANCE OF A RIGID CIRCULAR DISK IN  
AN INFINITE ELASTIC SOLID

小長井一男\*

By Kazuo KONAGAI

## 1. 緒言

杭の動的解析を、構造物は多質点系、地盤は連続体とするサブストラクチャー法で行う場合、各質点を支持する地盤の反力係数の評価が問題となる。

伯野<sup>1)</sup>は杭基礎の水平動を解析するにあたり、Penzien<sup>2)</sup>が地盤の反力係数の算定に用いたMindlinの第II解を動的なものに置き換えることで、杭に付加される質量、波動の逸散による減衰を検討した。さらに著者<sup>3)</sup>は、杭の鉛直方向の周波数応答を解析するにあたり、この伯野の発想を踏まえ、点ではなく、弾性体内の杭と等しい半径の剛体円盤の法線方向コンプライアンスを用いることで、より妥当な地盤の反力係数を算定し得ることを示した。この剛体円盤のコンプライアンスは、無限等方弾性体内の円盤状の領域に、法線方向に静的な剛板接地圧分布と等しい分布形の振動荷重を仮定して得られたものであり、地表、境界面の影響は鏡像を重ねることで表現されている。したがって、このコンプライアンスは、円盤の半径が弾性体内のせん断波の波長に対し比較的小さい状態、具体的には無次元化円振動数  $A (= \omega \cdot R_0 / V_s)$  が  $\pi/4$  以下で十分な精度をもつ近似解となっている。ここで  $\omega$  および  $R_0$  は円盤の加振円振動数、および半径であり、 $V_s$  は弾性体内のせん断波速度である。しかし、この手法を杭のみならず、軟弱地盤中のケーソンのように、地盤のせん断波の波長に対し大きなスケールをもつ構造にも適用する場合には、 $A$  が 0~10 の広い範囲での無限等方弾性体内の剛体円盤のコンプライアンスを提供する必要がある。

この種の混合境界値問題の解法は、半無限等方弾性体上の剛体円形フーチングの振動問題を取り扱った論文<sup>4)~6)</sup>の中で詳細に検討されている。これらの解法は大別して2つの種類に分類できる。

1つはLysmer<sup>4)</sup>によって提唱されたRing methodである。これは、円盤を同心円状のリングに分割し、各リングの中では接地圧分布が等しいとして、円盤面の変位が均一であるという境界条件を満たすようこれを合成する手法である。Lysmerはこの手法で $A$ が0~8の範囲で半無限等方弾性体上の剛体円盤の鉛直方向コンプライアンスを算定している。この手法は考え方が単純でわかりやすく、また円盤のみならず、周辺弾性体の応力・変位の算定も容易であるが、円盤の接地圧分布の半径方向への変化が著しい場合、リングの分割数、幅の設定に細心の注意を払わなければならない。

いま1つの解法は第2種Fredholm積分を解く手法である。Robertson<sup>5)</sup>は半無限弾性体上の剛体円形フーチングに関するこの種の問題がSneddon<sup>6)</sup>によって検討された積分方程式を解く問題に帰着することを示した。Luco<sup>6)</sup>はその積分を数値的に実行し、 $A$ が0~10の広範囲にわたる剛体円形フーチングのコンプライアンスを算定している。この方法は理論的には厳密解を与えるものの、数値解析がきわめて難しく、弾性体のポアソン比が0.5のとき以外は、 $A$ が2以上になるとしだいに誤差が大きくなる。

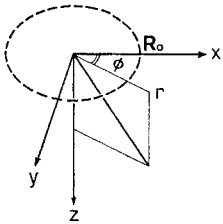
無限等方弾性体内の剛体円盤の法線方向コンプライアンスを求める場合にも上記2つの方法を適用し得るが、著者はここで新たな近似解法を導入する。この解法は無限等方弾性体内の剛体円盤(質量0)を加振したときの接触圧分布を、静的な剛板の接触圧分布形を含む数種類の分布形の線形結合で表現するものである。この手法は既知の接触圧分布を合成するという点で、LysmerのRing methodと同じ範疇に属するが、合成する接触圧分布の1つとして、静的な剛板分布を含むため、 $A$ の小さい領域では、少数の接触圧分布形の合成で、精度の高い解を求め得る利点がある。この手法で、無限等方弾性体内の剛体円盤の法線方向コンプライアンスを、 $A$ が0~10の範囲で算定し、先に発表した論文<sup>4)</sup>の適用範囲

\* 正会員 工博 長岡技術科学大学助教授

( $A < \pi/4$ ) を拡張することが、本研究の目的である。

2. 解析手法

円盤の中心を原点、円盤を含む面を  $z=0$  として円筒



図一 円盤と円筒座標

座標  $(r, \phi, z)$  を 図一 に示すように設定する。無限等方弾性体内の半径  $R_0$  の剛体円盤の中心に  $z$  軸方向振動荷重  $Q \cdot e^{i\omega t}$  が加わったときの円盤面上での接触圧分布  $q(r) \cdot e^{i\omega t}$  は既知の接触圧分布  $f_j(r) \cdot e^{i\omega t}$  の線形和として、次のように表現する。

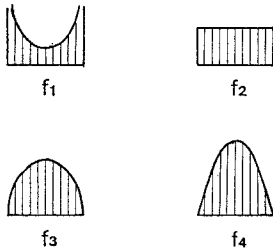
$$q(r) \cdot e^{i\omega t} = \begin{cases} \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot f_j(r) \cdot e^{i\omega t} & |r| < R_0 \\ 0 & |r| > R_0 \end{cases} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $i$ ：虚数単位 ( $=\sqrt{-1}$ )、 $\omega$ ：加振円振動数、 $t$ ：時間、 $\alpha_j$ ：未定係数

式 (1) の中の  $n$  が大きいほど解の精度は向上するが、ここでは簡便に  $n=4$  とし、以下に示す 4 種類の分布形を  $f_j$  として用いる。

- ① 剛体円盤の静的接触圧分布 ( $f_1$ )
- ② 一様分布 ( $f_2$ )
- ③ 楕円分布 ( $f_3$ )
- ④ 放物線分布 ( $f_4$ )

① から ④ に移行するにつれ、接触圧は円盤の縁から中央に集中する。静的接触圧分布 (①) のほかに ②~④ の分布形を選んだのは、これらが次に示す  $p$  なるパラメータを含んだ一つの式で表現されるため、数値計算上の取扱いが容易であることによる。



図二  $f_j$  の概形

$$f_j(r) = \begin{cases} \frac{p+1}{\pi R_0^2} \left(1 - \left(\frac{r}{R_0}\right)^2\right)^p & |r| < R_0 \\ 0 & |r| > R_0 \end{cases} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $p=(j-2)/2$

式 (2) 右辺の係数  $\frac{p+1}{\pi R_0^2}$  は、この  $f_j$  を円盤面内で積分して 1 となるように付けられたものである。したがって剛体円盤の加振力の振幅  $Q$  は

$$Q = \sum_{j=1}^n \alpha_j \dots\dots\dots (3)$$

と表記される。便宜上、分布形  $f_j$  を Fourier-Bessel の積分公式で表現しておく。

$$f_j(r) = \int_0^\infty k \cdot F_j(k) \cdot J_0(kr) dk \dots\dots\dots (4)$$

ここに、

$$F_j(k) = \int_0^\infty r \cdot f_j(r) \cdot J_0(kr) dr \dots\dots\dots (5)$$

$k$ ：積分変数

$J_\nu(x)$ ： $\nu$  階の第 1 種 Bessel 関数

式 (5) に式 (2) を代入することで

$$F_j(k) = \frac{(p+1)}{\pi R_0^2} \int_0^{R_0} r \left(1 - \left(\frac{r}{R_0}\right)^2\right)^p \cdot J_0(kr) dr \dots\dots\dots (6)$$

を得る。式 (6) の右辺の積分は Sonnine の第 1 有限積分を用いて解析的に実行でき、 $F_j(k)$  は最終的に次のように書ける。

$$F_j(k) = \frac{p+1}{\pi} \frac{2^p \Gamma(p+1)}{(kR_0)^{p+1}} J_{p+1}(kR_0) \dots (7)$$

ここに、 $\Gamma(x)$ ：Gamma 関数

無限等方弾性体内の円盤状の領域 ( $r < R_0, z=0$ ) に  $f_j(r) \cdot e^{i\omega t}$  なる接触圧分布が加えられたときの  $z$  方向変位  $u_{zj}$  は、この  $F_j(k)$  を用いて著者<sup>3)</sup>により次のように与えられている。

$$u_{zj}(r, z) = \frac{e^{i\omega t}}{2 \rho \omega^2} \int_0^\infty F_j(k) \times \left( kn_1 e^{-n_1 z} - \frac{k^3}{n_2} e^{-n_2 z} \right) \cdot J_0(kr) dk \dots (8)$$

ここに、 $n_1^2 = k^2 - \frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu}$ 、 $n_2^2 = k^2 - \frac{\rho \omega^2}{\mu}$

$\rho$ ：弾性体の密度

$\lambda, \mu$ ：Lamé の定数 ( $\mu$ ：せん断弾性係数)

この  $u_{zj}$  は、 $f_j$  の円盤面内での積分値が 1 であることから、コンプライアンスとしての次元 ( $LF^{-1}$ ) を有する。この  $u_{zj}$  を用いると、式 (1) より剛体円盤を  $Qe^{i\omega t}$  なる力で加振したときの弾性体の  $z$  方向変位  $u_z$  は

$$u_z(r) = \sum_{j=1}^4 \alpha_j \cdot u_{zj}(r, 0) \dots\dots\dots (9)$$

と与えられる。これが剛体円盤の変位であることから

$$u_z(r) = w \cdot e^{i\omega t} \quad r < R_0 \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 $w$ ：定数

が成立する。 $r < R_0$  で異なる 4 点を選び注 1)、その点で式 (10) を満足するような連立方程式を解くことで式 (9) 右辺の未定係数  $\alpha_j$  を決定できる。したがって剛体円盤の法線方向コンプライアンス  $W$  は最終的に

注 1)  $A$  の値が大きくなると、4 点の選び方が問題になる。合成する接触圧分布形にもよるが、なるべく直径を等分するような間隔で点をとると精度のよい解が得られるようである。ここでは  $r/R_0=0.1, 0.4, 0.7, 1.0$  の 4 点で  $U_z(r)=1 \cdot e^{i\omega t}$  とおいており、この 4 点は後出の 図三 の中に○印で示す。

$$W = w/Q = w / \sum_{j=1}^4 \alpha_j \dots\dots\dots (11)$$

と求めることができる。

### 3. 数値解析

剛体円盤のコンプライアンスを算定するためには、式(8)右辺の積分を数值的に実行する必要がある。この数値積分の技巧に関しては文献 3) に詳しく述べられており、同じ手順で容易に解を得ることができる。

すでに 2. で述べた手順に従って円盤面内の接触圧分布を合成し、これにより、円盤を含む面 ( $z=0$ ) に生ずる  $z$  方向変位  $u_z$  を  $r/R_0$  の関数として 図-3 に示す。  $r/R_0 \leq 1$  の領域では  $u_z \approx 1$  であり、円盤がほぼ剛体として挙動している様子が認められる。この図は、文献 3) の 図-5 と比較したとき、 $A$  のさらに広い範囲で、無限等方弾性体内の剛体円盤の法線方向コンプライアンスのより精度の高い解が得られることを意味しており、本手法の妥当性を示すものである。  $r/R_0 > 1$  の領域では、 $u_z$  の実部と虚部は、 $r/R_0$  が増すにつれて振幅を減ずる正弦曲線のような形状を示すが、この曲線の 1 波長 (無次元量) に  $A$  を乗じたものは、ほぼ  $2\pi$  に等しい。これは  $r$  方向にせん断波が逸散していく様子を表現するものである。

Poisson 比 0.5, 1/3 について無限等方弾性体内の剛体円盤の  $z$  方向コンプライアンス  $W$  を算定したものを 図-4 に示す。横軸には  $A$  を、縦軸には静的なコンプラ

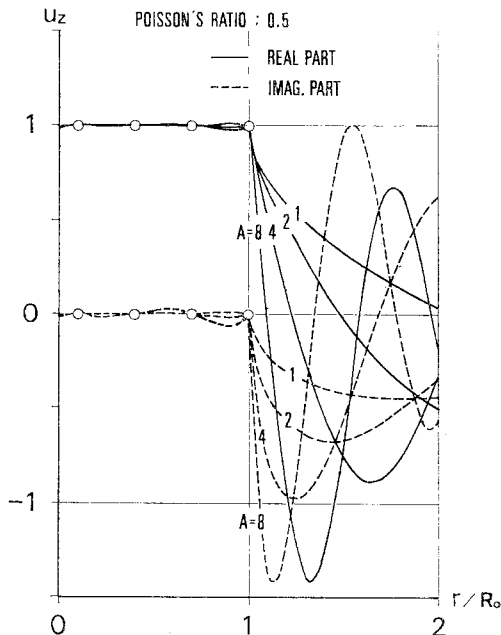


図-3 円盤を含む平面上の  $z$  方向変位

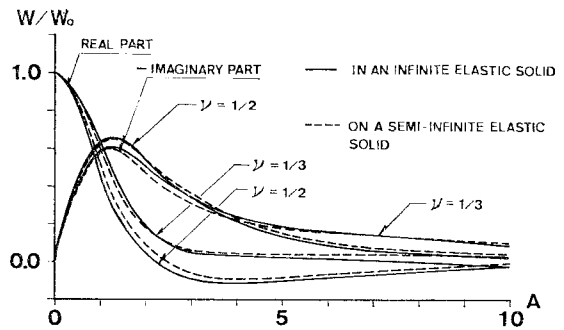


図-4 剛体円盤の法線方向動的変位応答倍率

イアンス  $W_0$ ) でノーマライズした動的コンプライアンス、いわゆる変位応答倍率をとっている。またこの図には Luco ら<sup>9)</sup> によって算定された半無限等方弾性体上の剛体円盤の上下方向の動的変位応答倍率の厳密解を破線で併記する。実線と破線がきわめてよく一致することは興味深い。無限等方弾性体内の剛体円盤の静的コンプライアンス  $W_0$  が半無限等方弾性体上の剛体円形フーチングの静的コンプライアンスの 1/2 にほぼ等しいことから、この図は、 $A$  の広い領域 (0~10) で半無限等方弾性体上の剛体円盤の上下方向コンプライアンスが、無限媒体内の剛体円盤の法線方向コンプライアンスに鏡像を重ねるだけの簡便な方法で近似し得ることを示している。この場合、仮想表面 ( $z=0$ ) 上でせん断応力  $\sigma_{zr}$  は 0 とならず、Rayleigh 波は考慮されていない。半無限媒体内部の点加振の問題でも、無限媒体内の点加振時の変位解、いわゆる動的 Kelvin 解に、その鏡像を重ねただけでは仮想表面上で  $\sigma_{zr}=0$  とならないのでこの分の補正を考えなければならないが、こうした補正項の寄与は、加振点から遠く離れない限り、きわめて小さいことが伯野<sup>11)</sup>、松岡・八幡<sup>10)</sup> により検証されている。円盤が地表以下にある場合にも、Rayleigh 波の影響はさらに小さくなるため、鏡像を重ねるだけの簡便法で地表面の影響を十分考慮し得るものと考えられる。

### 4. 結 語

本研究の成果を以下にとりまとめる。

(1) 著者が剛体円盤の法線方向コンプライアンス算定に用いた手法では、4 種類の既知の接触圧分布を合成して剛体円盤の接触圧分布としているが、これらの分布は一律に  $\nu$  なるパラメーターを含んだ一つの式 (式 (2)) で表現されるので、数値計算が容易である。

(2) この手法により無次元化振動数  $A (= \omega \cdot R_0 / V_s)$  が 0~10 の範囲で精度のよいコンプライアンスの近似解を得ることができた。したがって、先に発表した論

文<sup>3)</sup>の適用範囲 ( $A < \pi/4$ ) は大きく拡張され、これを大規模な基礎構造物の動的解析の一手段として供することが可能となった。

(3) この際、地表面の影響は円盤の鏡像を置くことで表現する方法が考えられるが、この手法が工学的に十分妥当であることが示された。

本研究を遂行するにあたっては、東大工学部土木工学科 松本嘉司教授より有益なご助言を賜りました。また数値計算にあたっては、長岡技術科学大学大学院生 谷 巖君 (現・熊谷組) に協力いただきました。深甚な謝意を表します。

#### 参 考 文 献

- 1) Hakuno, M. : Evaluation of dynamic properties of pile foundation based on wave dissipation theory, Proc. of 5th WCEE, 1973.
- 2) Penzien, J., C.F. Scheffey and R.A. Parmelee : Seismic analysis of bridges on long piles, Proc. of ASCE, Vol. 90, No. EM 3, June, 1964.
- 3) 小長井一男 : 鉛直加振を受ける杭の応答特性に関する研究, 土木学会論文報告集, No. 325, pp. 11~21, 1982.
- 4) Lysmer, J. and F.E. Richart : Dynamic response of footings to vertical loading, ASCE, Vol. 92, No. SM 1, pp. 65~91, Jan., 1966.
- 5) Robertson, I.A. : Forced vertical vibration of a rigid circular disc on a semi-infinite elastic solid, Proc. of Camb. Phil. Soc., Vol. 62, Series. A, 1966.
- 6) Luco, J.E. and R.A. Westmann : Dynamic response of circular footings, ASCE, Vol. 97, No. EM 5, pp. 1381~1395, Oct., 1971.
- 7) Veletsos, A.S. and Y.T. Wei : Lateral and rocking vibration of footings, ASCE, Vol. 97, No. SM 9, pp. 1227~1249, Sept., 1971.
- 8) Shah, P.M. : On the dynamic response of foundation systems, a Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy in Univ. of Rice, 1968.
- 9) Erdelyi, A. and I.N. Sneddon : Fractional integration and dual integral equations, I.N. Canad. J. Math. 14, pp. 685~693, 1962.
- 10) 松岡 理・八幡夏恵子 : 三次元均質等方弾性体動問題の基本解とその応用 [Mindlin 問題] その 2, 建築学会論文報告集, 第 293 号, pp. 35~43, 1980.

(1983.3.30・受付)