土木学会論文報告集
第339号・1983年11月
【ノ　ー　ト】

総走行時間最小化配分と等時間原則配分の動的化

DYNAMIC MODELS FOR SYSTEM-OPTIMAL AND USER-OPTIMAL ASSIGNMENTS

松　井　寛*
By Hiroshi MATSUI

1. はじめに

道路網上の交通量配分に関して，J.G. Wardrop は2つの配分原則を提唱したが，その第1原則として知られている等時間原則配分は，その後 M. Beckmann ら[1]や N.O. Jφrgensen[2] によって数理計画問題として定式化できることが明らかにされた．一方第2原則は総走行時間最小化配分として知られており，これも明らかに数理計画問題として定式化される．このように Wardrop の提唱した2つの配分原則は，いずれも数理計画問題として定式化できることになり，これらの問題を実際に解くための実用的な計算アルゴリズムがすでにいくつか開発されている．

しかしながら従来の交通量配分は，通常1日交通量を対象として，終日の定常的な配分パターンを求めるという，いわば静的交通量配分問題として扱われてきた．したがって道路網交通流の短時間予測や交通制御といった交通流の時間変動を無視できないような動的問題には十分対応できない．そこで本研究では，時々刻々と変動する交通状況のもとで，上記配分原則を当てはめたときの動的交通量配分問題を取り上げ，その定式化とその解法について考察した．

2. 静的交通量配分問題

本文で提案する動的交通量配分モデルと対比するため，初めに従来の静的交通量配分モデルについて，その概要を述べてみよう．いま上記の2つの配分原則をパスフローを変量にとって定式化することにし，まず初めに以下の記号を定義する．

q_i：OD が i の OD 交通量（$i=1, 2, \cdots, r$）

x_{ij}：OD が i で経路 j を通る経路交通量（$j=1, 2, \cdots, n_i$）

X^k：リンク（道路区間）k の区間交通量（$k=1, 2, \cdots, h$）

$f_k(X^k)$：リンク k の走行時間関数

$$\delta_{ij}{}^k=\begin{cases}1：リンク\ k\ が\ OD\ i\ の経路\ j\ に含まれるとき\\0：リンク\ k\ が\ OD\ i\ の経路\ j\ に含まれないとき\end{cases}$$

このとき2つの配分原則は次のように定式化される．

a. 総走行時間最小化配分

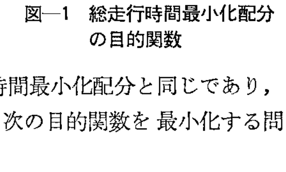
制約条件

$$\left.\begin{array}{ll}q_i=\sum_j x_{ij} & \\ X^k=\sum_i\sum_j \delta_{ij}{}^k x_{ij} & \begin{pmatrix}i=1, 2, \cdots, r\\ j=1, 2, \cdots, n_i\\ k=1, 2, \cdots, h\end{pmatrix}\\ x_{ij}\geqq 0 & \end{array}\right\}\cdots(1)$$

のもとで次の目的関数（総走行時間）を最小化する問題である．

$$J_1\equiv\sum_k X^k f_k(X^k)\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ところで上記の目的関数を図式的に表わすと，式中の $X^k f_k(X^k)$ は図—1においてリンク k 上の交通量 X^k とそのときの走行時間 $f_k(X^k)$ を2辺とする矩形の面積で表わされることになる．



図—1 総走行時間最小化配分の目的関数

b. 等時間原則配分

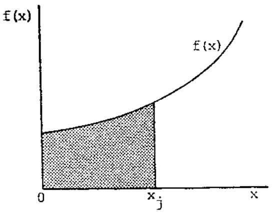
制約条件は先の総走行時間最小化配分と同じであり，制約条件式（1）のもとで次の目的関数を最小化する問題となる．

$$J_2\equiv\sum_k\int_0^{X^k} f_k(x)dx\ \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

等時間原則配分の目的関数の具体的な意味付けについてはまだ明確にされていないが，図式的には O から X^k までの走行時間関数 $f_k(X^k)$ の下の面積の総和を表わ

---

* 正会員　工博　名古屋工業大学教授

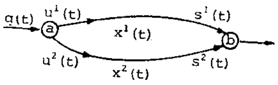


図—2 等時間原則配分の目的関数

することになる（図—2 参照）．上記の最小化問題が等時間原則配分の解を与えることは，この最小化問題の Kuhn-Tucker 条件が等時間原則の定義そのものを与えることから明らかにされる．また総走行時間最小化配分と等時間原則配分とは，走行時間関数の適当な変換によって，両配分が数学的には同形となることが知られている．

3. 動的交通量配分問題

静的交通量配分問題においては，交通の状態量を示す変数はすべて時間に無関係であるとしたが，次に時間変動を伴う交通需要量を対象とした動的交通量配分問題について考えてみよう．ここでは一般性を失わない程度に説明を簡単にするため，図—3 に示すような 1 OD 2 経路の単純な道路網を考えることにする．問題の定式化に先立ち次の記号を定義する．



図—3 1 OD 2 経路の道路ネットワーク

$u^k(t)$：時刻 t における経路 $k(k=1, 2)$ への分流交通量

$x^k(t)$：時刻 t における経路 $k(k=1, 2)$ 上の交通密度

$s^k(t)$：時刻 t における経路 $k(k=1, 2)$ からの流出交通量

l_k：経路 $k(k=1, 2)$ の区間長

$q(t)$：時刻 t における OD 交通量

a. 総走行時間最小化配分

動的総走行時間最小化配分とは，ここでは，ある定められた制御時間中に道路網を走行する車の総走行時間を最小とする配分と定義する．問題の定式化にあたって，まず第 1 に道路上の時々刻々と変動する交通流を動的に記述できる状態方程式の導入が必要となる．一般に道路上の交通状況を表わす状態量として，交通量，交通密度，および速度などが代表的であるが，このうち交通密度が道路上の混雑状態を一意的に表わす指標として最も優れている．そこで動的交通量配分問題を考えるときは，状態変数として交通密度を採用することにする．

交通流の保存則によれば，ある道路区間上の単位時間中の車の存在台数の変化量は，その時間中の当該区間への流入量と流出量の差に等しいことから，次の状態方程式が成立する．

$$l_k \frac{dx^k(t)}{dt} = u^k(t) - s^k(t) \quad (k=1,\ 2) \quad \cdots\cdots(4)$$

また，交通流の分岐点 a では当然次式が満足されなければならない．

$$q(t) = \sum_k u^k(t) \quad \cdots\cdots(5)$$

ここに $u^k(t)$ を制御変数，$x^k(t)$ を状態変数とよぶことにし，これらの変数の非負条件が追加される．

$$u^k(t) \geqq 0 \quad (k=1,\ 2) \cdots\cdots(6)$$

$$x^k(t) \geqq 0 \quad (k=1,\ 2) \cdots\cdots(7)$$

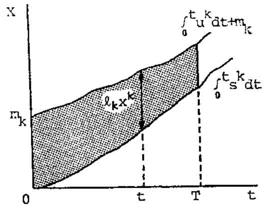
次に制御時間を T と指定したとき，T 時間中の道路網上の総走行時間は

$$J_3 \equiv \sum_k \int_0^T l_k x^k(t) dt \quad \cdots\cdots(8)$$

で与えられることになる．ここで制御開始時刻を時間軸の原点においている．よって動的総走行時間最小化配分は，制約条件式 (4)～(7) のもとに目的関数 (8) を最小化する問題として定式化される．なおこの問題を解くにあたって状態変数の初期値が必要であり，いまこれを次のように与えておく．

$$x^k(0) = m_k \quad (k=1,\ 2) \cdots\cdots(9)$$

なお終端時刻における状態変数の値は一般には拘束されない．一方微分形で与えられる状態方程式 (4) を解くためには，さらに $s^k(t)$ が与えられなければならないが，一般的には $s^k(t)$ を状態変数 $x^k(t)$ の関数形として与えるのが妥当である．このときこの関数形は交通量-密度曲線に相当するものとなる．経路長が長い場合は，経路を適当な区間（リンク）に区分して状態方程式を立てれば，道路上の交通流をより正確に記述できることになる．

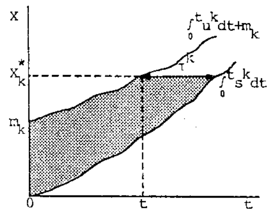


図—4 動的総走行時間最小化配分の目的関数

上に定式化した問題を図式的に表現すれば，図—4 に示すとおりである．すなわち，経路 k への流入交通量と流出交通量の累加交通量をそれぞれ X-t 座標上に表わしたとき，任意の時刻 t における経路上の存在台数は，図に示すように 2 つの累加交通量曲線に挟まれた t 軸に垂直な線分 $l_k x^k(t)$ で与えられるので，先に示した目的関数 J_3 は，この 2 つの累加交通量曲線に挟まれた部分の O から T までの面積の総和を表わすことになる．

b. 等時間原則配分

動的等時間原則配分とは，任意の時刻に出発した車が時々刻々と変動する交通状況のもとで，常に等時間原則配分に従って流れるような配分と定義しよう．さてこの



図—5　動的等時間原則配分の目的関数

問題の定式化はどのように行えるであろうか．結論を先にいえば，図—5に示す影の部分の面積の総和を最小化する問題となる．以下これを証明しよう．

X 軸に垂直な直線が2つの累加交通量曲線および X 軸に挟まれる線分を $\tau^k(x)$ で表わすと，図中の影の部分は，この $\tau^k(x)$ を O から X_k^* まで積分することによって与えられる．したがってこの面積の総和を最小化することは，次式を最小化することである．

$$J_4 \equiv \sum_k \int_0^{X_k^*} \tau^k(x)dx \quad \cdots\cdots(10)$$

ここに，X_k^* は時刻 t までに経路 k に流入した累加台数を表わし，これは次式によって与えられる．

$$X_k^* = \int_0^t u^k(t)dt + m_k \quad (k=1,\ 2) \quad \cdots\cdots(11)$$

特に $X > m_k$ の範囲で考えれば $\tau^k(x)$ は任意の時刻 t (>0) に出発した車が経路 k を通過するに要した時間を表わす．

いま式 (10) で与えられる目的関数 J_4 を最小化する $u^k(t)$ を求めてみよう．ただし $u^k(t)$ に関しては動的総走行時間最小化配分の場合と同様に，制約条件式 (5) および (6) が満足されなければならない．

次のようなラグランジュ関数 ϕ を導入する．

$$\phi \equiv \sum_k \int_0^{X_k^*} \tau^k(x)dx - \lambda\{\sum_k u^k(t) - q(t)\} \cdots(12)$$

ここに λ はラグランジュの未定乗数である．

Kuhn-Tucker の定理より，

$u^1 > 0,\ u^2 > 0$ のとき

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial u^1} &= \frac{\partial J_4}{\partial X_1^*}\frac{dX_1^*}{du^1} - \lambda = \tau_1 t - \lambda = 0\\ \frac{\partial\phi}{\partial u^2} &= \frac{\partial J_4}{\partial X_2^*}\frac{dX_2^*}{du^2} - \lambda = \tau_2 t - \lambda = 0\end{aligned}\right\}\text{注 1)}$$

$$\text{よって}\ \tau_1 = \tau_2 \quad \cdots\cdots(13)$$

$u^1 > 0,\ u^2 = 0$ のとき

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial u^1} &= 0 \to \tau_1 = \frac{\lambda}{t}\\ \frac{\partial\phi}{\partial u^2} &\geqq 0 \to \tau_2 \geqq \frac{\lambda}{t}\end{aligned}\right\}$$

$$\text{よって}\ \tau_2 \geqq \tau_1 \quad \cdots\cdots(14)$$

$u^1 = 0,\ u^2 > 0$ のとき

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial u^1} &\geqq 0 \to \tau_1 \geqq \frac{\lambda}{t}\\ \frac{\partial\phi}{\partial u^2} &= 0 \to \tau_2 = \frac{\lambda}{t}\end{aligned}\right\}$$

$$\text{よって}\ \tau_1 \geqq \tau_2 \quad \cdots\cdots(15)$$

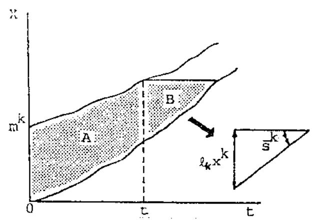
ここに $X > m^k$ の範囲で考えた τ^k ($k=1, 2$) は，任意の時刻 t(>0) に出発した車の経路 k を通過するに要した走行時間を表わしているので，上に得られた結果は等時間原則の定義そのものとなる．よって，いま制御時間を T とおけば，$0 < t \leq T$ の範囲で連続的に目的関数 (10) を最小化していけば，制御時間中の交通流は常に等時間原則配分に従って流れることになる．

1 OD 2 経路の場合の動的交通量配分問題は上記のように定式化されるが，この考え方は一般的な多 OD 多経路のネットワークフロー問題にも同様に拡張できる．すなわち多 OD 多経路の動的交通量配分のときは，制御変数として時刻 t における OD が i の経路 j への分流交通量を $u_{ij}(t)$，状態変数として時刻 t における OD が i の交通の経路 j 上のリンク k の交通密度を $x_{ij}{}^k(t)$ と定義し直せば，OD に関するサフィックスが加わるだけで，先と同様の目的関数を得る．ただ状態方程式はリンクごとに定める必要があるので，その式の形は道路網形状に依存して決まることになる．

4．動的交通量配分問題の一般解法

1 OD 2 経路の動的交通量配分問題において，$q(t)$ および $s^k(t)$ が一定値をとる特殊な場合は，図解によって解が得られることが明らかにされている[3]．しかし一般的には何らかの数値解法によって解かなければならない．ところで以上の問題は数学的にいえば，連立微分方程式系で与えられる状態方程式のもとで，積分形で与えられる目的関数を最小化する問題として定式化されている．したがってこの問題は終端条件未定，終端時刻指定の最大原理問題となり，その一般的な解法が得られることになる．実際の問題においては状態方程式が非線形となることが多いので，適当な時間間隔で変数を離散化して離散型最大原理問題として再定義して解くことが必要となる．

ところで動的等時間原則配分の場合は，目的関数の形からわかるように，経路ごとに積分範囲が異なっている上に，積分軸が X 軸となっているため，この



図—6　目的関数の三角近似

注 1)　u^k が積分範囲内で連続であれば，積分と微分の順序変更が可能となり

$$\frac{dX_k^*}{du^k} = \frac{d}{du^k}\int_0^t u^k dt = \int_0^t \frac{\partial u^k}{\partial u^k}dt$$

$$= \int_0^t dt = t \quad (k=1,\ 2)$$

ままでは最大原理を適用できない．そこで **図―5** に示した目的関数を **図―6** に示すような部分 A と B に区分し，さらに B の部分を三角形近似すれば

$$J_4 \doteqdot \sum_k \int_0^t l_k x^k(t)dt + \frac{1}{2}\sum_k \left\{\frac{l_k x^k(t)}{\bar{s}^k}\right\}^2 \cdots\cdots(16)$$

となり，結局動的等時間原則配分は制約条件式 (4)～(7) のもとで目的関数 (16) を最小化する Bolza 型の最大原理問題に帰着され，解法が得られることになる．ところで時刻 t に出発する車からみれば，部分 A は過去の配分結果を示しており，よって一定値をとるとみなせるので，問題はさらに目的関数 (16) の第 2 項のみの最小化問題に簡略化される．

目的関数を上記のように式 (16) によって近似したとき，近似に伴う誤差が当然生じる．問題は平均流出交通量 $\bar{s}^k$ をいかに予測するかということであるが，これは計算を離散化したとき，直前の計算で得られた流出交通量の計算値を，次の計算の際の平均流出交通量の仮定値として用いるのが最善と考えられる．ただ逐次近似に伴う計算誤差の程度は，離散化したときの制御切替えの最小単位時間のとり方やリンクの区分方法によって変わることがわかっている．

5. 数値計算例

先の **図―3** に示したような 1 OD 2 経路の簡単な道路網を対象に数値計算例を行ってみた．2 本の経路の長さはそれぞれ $l_1=3\,900$ m, $l_2=4\,300$ m とし，また各経路上の速度-密度曲線を直線式で仮定し，$s^k(t)$ を次式で与えた．

$$s^k(t)=x^k(t)\{1\,212.1-5\,509.6\,x^k(t)\}$$
$$(k=1,\ 2) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

ただし $s^k(t)$, $x^k(t)$ の単位はそれぞれ 台/分，台/m である．制御時間を $T=60$ 分とし，その間 OD 交通量は 12 分ごとに階段状に変化するとして，順に $q(t)=$ 50, 65, 60, 55, 70 台/分 と仮定した．計算にあたって $\bar{s}^k$ をあらかじめ仮定しなければならないが，これは直前の s^k の計算値を次の計算の $\bar{s}^k$ の仮定値として逐次仮定する方法をとった．また経路はそれぞれ 3 区間に等分し，制御切替への最小単位時間を 30 秒として計算を行った．なお各経路の初期密度は経路 1 については全区間ともに 0.06 台/m, 経路 2 については同じく 0.02 台/m とした．

計算の結果得られた配分解の一部を **表―1** に示す．配分パターンの結果は表に示すように，両配分ともに常にどちらか一方の経路に流れるという Bang-Bang 制御となっている．これは最大原理におけるハミルトニアンが制御変数 $u^k(t)$ に対して線形となるためである．また等時間原則配分の場合は，任意の時刻に出発した車がいずれもその時点での最短経路に流れていることがわかる．

表―1 動的交通量配分の計算結果

流入時刻	流入交通量(台/分)	総走行時間最小化配分 u^1(台/分)	総走行時間最小化配分 u^2(台/分)	等時間原則配分 u^1(台/分)	等時間原則配分 u^2(台/分)	τ^1(分)	τ^2(分)	$\tau^1-\tau^2$
31:00	60.0	0.0	60.0	0.0	60.0	4.10	3.94	0.16
31:50	60.0	60.0	0.0	60.0	0.0	3.87	4.14	−0.27
32:00	60.0	0.0	60.0	60.0	0.0	3.85	4.14	−0.29
32:50	60.0	60.0	0.0	0.0	0.0	4.07	3.97	0.10
33:00	60.0	0.0	60.0	60.0	60.0	3.82	4.16	−0.34
33:50	60.0	60.0	0.0	0.0	60.0	4.10	3.94	0.16
34:00	60.0	0.0	60.0	60.0	0.0	3.87	4.14	−0.27
34:50	60.0	60.0	0.0	60.0	0.0	3.85	4.14	−0.29
35:00	60.0	0.0	60.0	0.0	60.0	4.06	3.96	0.10
35:50	60.0	60.0	0.0	60.0	0.0	3.81	4.14	−0.33
36:00	55.0	0.0	55.0	0.0	55.0	4.04	3.92	0.12
36:50	55.0	55.0	0.0	55.0	0.0	3.83	4.09	−0.26
37:00	55.0	0.0	55.0	55.0	0.0	3.80	4.09	−0.29
37:50	55.0	55.0	0.0	0.0	55.0	3.99	3.94	0.05
38:00	55.0	55.0	0.0	55.0	0.0	3.77	4.10	−0.33
38:50	55.0	0.0	55.0	0.0	55.0	4.00	3.90	0.10
39:00	55.0	55.0	0.0	55.0	0.0	3.81	4.08	−0.27
39:50	55.0	0.0	55.0	55.0	0.0	3.78	4.08	−0.30
40:00	55.0	55.0	0.0	0.0	55.0	3.97	3.93	0.04
総走行時間		233.87(台時)		234.14(台時)				

6. あとがき

動理的交通量配分問題は上の結果からもわかるように，配分というよりもむしろ道路網交通流の制御といった性格が強い．したがってその応用面としては，道路網交通流を対象とした最適制御問題が考えられる．たとえば都市高速道路の流入制御問題，ルートコントロール問題などのほか，状態変数として信号待ち台数をとることによって動的な信号制御問題にも適用できる．効率的な計算アルゴリズムの開発や，特に大規模道路網への適用には解の収束性などさらに検討すべき問題も多く，これらについては引き続き研究中である．

参考文献

1) Beckmann, M.J., C.B. McGuire and C.B. Winston : Studies in the economics of transportation, Yale University Press, 1956.
2) Jφrgensen, N.O. : Some aspects of the urban traffic assignment problem, I.T.T.E. Graduate Rept, University of California, Berkeley, 1963.
3) 松井 寛：動的交通量配分理論に関する研究，第 4 回土木計画学研究発表会講演集，pp. 420～425, 1982.

(1982.9.10・受付)