

固有関数法による一様面内力と横荷重を受ける  
固定矩形板の曲げ解析EIGENFUNCTION ANALYSIS FOR BENDING OF CLAMPED RECTANGULAR  
PLATES UNDER THE COMBINED ACTION OF LATERAL LOAD  
AND UNIFORM IN-PLANE FORCE

石川清志\*・夏目正太郎\*\*

By Kiyoshi ISHIKAWA and Shotaro NATSUME

## 1. ま え が き

基礎方程式が重調和微分方程式で表わされる連続体弾性解析において、複素固有値を有する固有関数(complex biharmonic eigenfunction)は、Airy 応力関数を導入した自由境界を有する等方性体2次元応力問題、あるいは周辺が固定された矩形板の曲げ問題に現われて、与えられた境界条件のもとで解析的にきわめて厳密に重調和方程式を解くことができる有用性をもつ。この固有関数はいずれも次の固有値方程式

$$2\lambda_n \pm \sin 2\lambda_n = 0 \dots\dots\dots (1)$$

の複素根を採用する。この解析理論は、Fadle<sup>1)</sup> および Papkovitch<sup>2)</sup> によって創始されて以来多数の研究者によって展開され、近年においては一貫して固有関数解析の研究に従事し、これを集大成した Ramachandra Rao<sup>3)</sup> ~<sup>12)</sup> を中心とした研究によってほぼ体系づけられた観がある。これらの研究内容はおおむね次の2項目から成り立っている。

(1) 直交座標系、極座標系等に応じた系の形状、あるいは直交異方性体に代表されるような材料特性を満足する固有関数の誘導と複素固有値の表示。

(2) 一般に与えられた境界条件に対して直交性がない固有関数を、別の直交性を有する関数で展開して表わす方法等で、固有関数に含まれた未定定数を決定する解析方法の提案。

特に、(2)については、Gaydon・Shepherd<sup>13)</sup> および Gaydon<sup>14)</sup> ははりの自由振動に現われる固有関数 (beam function)、Koiter・Ablas<sup>15)</sup> および Herrmann<sup>16)</sup> は Fourier 級数、Knostrman・Silverman<sup>17)</sup> は選点法 (collocation method) を導入して、固有関数を展開して表わし、係数の正方行列化したうえで連立1次方程式を解く

ことによって、固有関数に含まれた未定定数を決定する方法、Johnson・Little<sup>15)</sup> および Little<sup>16)</sup> は固有関数の重直交関係 (bi-orthogonality relation) を提唱し、展開された係数の正方行列化の連立1次方程式を解くことなく、固有関数に含まれた未定定数を決定する方法を提案している。

本研究は、板の直交座標  $xy$  平面において、 $x$  方向に一様圧縮あるいは引張力が板の中立面に作用し、なおかつ分布横荷重が加えられた固定矩形板の曲げ問題に、固有関数解析を導入して行ったものである。解析の目的は、Prakash<sup>12)</sup> らが Winkler 弾性基礎上固定矩形板について研究した一連の解析過程を面内力が作用した固定矩形板に拡張し、固有関数の誘導、ならびに面内力に対する複素固有値の表示、さらに、固有関数の展開には、長柱の座屈に現われる固有関数、はりの自由振動の固有関数、および Fourier 級数を用いて表わし、この3種類の解析方法による解の精度を数値計算によって比較検討する。

## 2. 理論解析

$xy$  直交座標において、 $x$  方向に一様圧縮あるいは引張力:  $N_x$  ( $N_x > 0$ ) が板の中立面に作用した薄板の曲げ問題に対する基礎微分方程式は次式で表わされる<sup>21)</sup>。

$$r^4 w \pm \frac{N_x}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{q}{D} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 $w$  は板の曲げたわみ、 $D$  は曲げ剛性、 $q=q(x, y)$  は分布横荷重、 $r^4=(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)^2$ 、左辺第2項の+は圧縮力、-は引張力が作用した場合である。いま、矩形板の寸法を  $2a \times 2b$  とし、直交座標の原点は板の中央にとる ( $|x| \leq a, |y| \leq b$ )。そして、 $x$  方向の対向2辺は固定と限定する。

$$x = \pm a : w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

式(2)は、線形微分方程式であるから重ね合せの原理

\* 正会員 信州大学技官 工学部土木工学科

\*\* 正会員 信州大学助教授 工学部土木工学科

が有効で、その解を次式で表わす。

$$w = w_h + w_p \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $w_h$  は式 (2) の同次方程式

$$r^4 w_h \pm \frac{N_x}{D} \frac{\partial^2 w_h}{\partial x^2} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

の解であり、 $w_p$  は  $q$  に依存する式 (2) の特解を表わすものである。同様に式 (3) は

$$x = \pm a : w_h = \frac{\partial w_h}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$x = \pm a : w_p = \frac{\partial w_p}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (7)$$

のようにそれぞれ別々に与えられる。

(1) 同次方程式の一般解

次の無次元量：

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{x}{a} \quad (|\xi| < 1), \quad \eta = \frac{y}{b} \quad (|\eta| < 1) \\ k &= \frac{b}{a}, \quad p = a \sqrt{\frac{N_x}{2D}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

を導入し  $w_h = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi) Y_n(\eta)$  にて変数分離すれば、次の関係

$$Y_n'' - (k\lambda_n)^2 Y_n = 0 \dots\dots\dots (9)$$

をおくことにより、式 (5) は

$$X_n^{IV} + 2(\lambda_n^2 \pm p^2) X_n'' + \lambda_n^4 X_n = 0 \dots\dots\dots (10)$$

と書き換えて表わされる。したがって式 (10) に対応する境界条件は式 (6) から

$$\xi = \pm 1 : X_n = X_n' = 0 \dots\dots\dots (11)$$

となる。ただし、上式における  $\lambda_n$  は任意定数、肩文字 " および  $I, II, IV$  は  $Y_n(\eta)$  を  $\eta$  について 2 回微分、および  $X_n(\xi)$  を  $\xi$  について 1, 2, 4 回微分を意味する。式 (11) のもとで式 (10) を解くと、 $X_n(\xi)$  の偶関数  ${}_e X_n(\xi)$  および奇関数  ${}_o X_n(\xi)$  はそれぞれ次式で表わされる。

(a) 圧縮力が作用した場合 (以下「圧縮の場合」)

$$\left. \begin{aligned} {}_e X_n(\xi) &= \frac{\cos \alpha_n \xi \cos \beta \xi}{\cos \alpha_n \cos \beta} - \frac{\sin \alpha_n \xi \sin \beta \xi}{\sin \alpha_n \sin \beta} \\ {}_o X_n(\xi) &= \frac{\cos \alpha_n \xi \sin \beta \xi}{\cos \alpha_n \sin \beta} - \frac{\sin \alpha_n \xi \cos \beta \xi}{\sin \alpha_n \cos \beta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

(b) 引張力が作用した場合 (以下「引張の場合」)

$$\left. \begin{aligned} {}_e X_n(\xi) &= \frac{\cos \alpha_n \xi \cosh \beta \xi}{\cos \alpha_n \cosh \beta} - \frac{\sin \alpha_n \xi \sinh \beta \xi}{\sin \alpha_n \sinh \beta} \\ {}_o X_n(\xi) &= \frac{\cos \alpha_n \xi \sinh \beta \xi}{\cos \alpha_n \sinh \beta} - \frac{\sin \alpha_n \xi \cosh \beta \xi}{\sin \alpha_n \cosh \beta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

ただし、 $2\beta^2 = p^2$ 、 $\alpha_n$  は次の固有値方程式

(a) 圧縮の場合

$$\frac{\sin 2\alpha_n}{2\alpha_n} \pm \frac{\sin 2\beta}{2\beta} = 0 \dots\dots\dots (15)$$

(b) 引張の場合

$$\frac{\sin 2\alpha_n}{2\alpha_n} \pm \frac{\sinh 2\beta}{2\beta} = 0 \dots\dots\dots (16)$$

の根である。なお、式 (15)、(16) の左辺第 2 項の + は  ${}_e X_n(\xi)$ 、- は  ${}_o X_n(\xi)$  に対応する固有値方程式である。また、 $\lambda_n$  は  $\alpha_n$ 、 $\beta$  の間で次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} (a) \text{ 圧縮の場合 } & \lambda_n^2 = \alpha_n^2 - \beta^2 \\ (b) \text{ 引張の場合 } & \lambda_n^2 = \alpha_n^2 + \beta^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

式 (9) から、式 (6) の境界条件を満足する  $w_h$  は

$$w_h = -\frac{a^4}{D} \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi) \lfloor \cosh k\lambda\eta \sinh k\lambda\eta \rfloor \mathbf{D}_n \dots (18)$$

と表わされる。ここで、 $\mathbf{D}_n$  は 2 行 1 列の列ベクトル

$$\mathbf{D}_n = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_n \dots\dots\dots (19)$$

で表わされる未定積分定数、記号  $\lfloor \dots \rfloor$  は行ベクトルを表わす。

式 (15) および (16) の固有値方程式の根について言及する。2 式を一括して書き換えると、

$$\sin 2\alpha_n = \mp 2\alpha_n J(2\beta) \dots\dots\dots (20)$$

が得られる。ただし、関数  $J(2\beta)$  ( $0 < 2\beta$ ) は

$$\left. \begin{aligned} (a) \text{ 圧縮の場合} & \left. \begin{aligned} J(2\beta) &= \frac{\sin 2\beta}{2\beta}, \quad -0.2172 \leq J(2\beta) < 1, \\ 2\beta \rightarrow \infty : J(2\beta) &\rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \\ (b) \text{ 引張の場合} & \left. \begin{aligned} J(2\beta) &= \frac{\sinh 2\beta}{2\beta}, \quad 1 < J(2\beta), \\ 2\beta \rightarrow \infty : J(2\beta) &\rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

図-1 に示すように、 $2\alpha$  を変数にとれば、式 (20) は正弦関数： $\sin 2\alpha$  と 1 次関数： $\pm 2\alpha J(2\beta)$  との関係で表わされ、根は傾き角： $J(2\beta)$  に依存する。これより、(a) 圧縮の場合、 ${}_e X_n(\xi)$  に対応する固有値： $\alpha_n$  は、 $0 < 2\beta < 2.554$  ( $p=1.806$ ) で無限個の複素根、 $2\beta=2.554$  で 1 個の実根と無限個の複素根、 $2.554 < 2\beta < 2.876$  ( $p=2.033$ ) で 2 個の実根と無限個の複素根というように、 $2\beta$  が  $\pi$  に近づくに従って実根をとる個数が多くなり、 $2\beta=\pi$  ですべての根が実根となる。さらに、 $\pi < 2\beta < 4.493$  ( $p=3.177$ ) では、実根の個数が順次減少し、これに代わって複素根を順次多くとることになり、 $2\beta=4.493 : J(2\beta) = -0.2172$  で 1 個の実根と他は複素根をとる。また、 ${}_o X_n(\xi)$  に対応する固有値は、 $0 < 2\beta < 2.777$  ( $p=1.964$ ) で 1 個の実根： $2\alpha_1 = 2\beta$  と他は複素根をとり、 $2\beta$  が  $\pi$  に近づくに従って実根の個数を多くとる。一方、(b) 引張の場合、 ${}_e X_n(\xi)$  および  ${}_o X_n(\xi)$  に対する固有値は実根をとることなくすべて複素根をとる。

上記に現われる複素根は次のようにして求められる。

$2\beta \rightarrow 0 (p \rightarrow 0) : J(2\beta) \rightarrow 1$  とすると、式 (20) は式 (1) となる。式 (1) の複素根<sup>22), 23)</sup> はすでにわかっているから、 $\Delta J(2\beta)$  ( $\Delta J(2\beta) = J(2\beta)/k, k : \text{整数}$ ) 増分の式 (20) の根は式 (1) の根を初期値として Newton 法によって求められる。この操作を繰り返して、 $\Delta J(2\beta), 2\Delta J(2\beta), \dots, k\Delta J(2\beta)$  のようにとると、これに対応した根が順次得られ、最終的には  $J(2\beta)$  に対する式 (20) の根が得られる。

(2) 特解の誘導

解析が相当に簡単でしかも固定の境界条件を満足する 2 種類の関数がわかっている<sup>20)</sup>。これらは長柱の座屈とはりの自由振動に現われる固有関数である。ここでは特解の表示を、この 2 種類の関数を利用したものと、式 (7) の境界条件が満足する式 (2) の特解を直接求める 3 種類について解析する。問題を簡単にするために、式 (2) の分布横荷重は  $y$  方向に変化がなく一定：

$$q = q(x) \text{ または } q = q(\xi) \dots\dots\dots (22)$$

とする。このことから、式 (2) は、 $w_p$  に関する微分方程式として次式

$$\frac{d^4 w_p}{d\xi^4} \pm 2p^2 \frac{d^2 w_p}{d\xi^2} = \frac{qa^4}{D} \dots\dots\dots (24)$$

に置き換えられる。したがって、式 (24) は式 (7) の境界条件で解かれることになる。

I) 座屈の固有関数による特解の表示 (Case I)

式 (7) を満足する式 (24) の  $w_p$  は次式とする。

$$w_p = \frac{a^4}{D} \sum_{m=1}^{\infty} c_m F_m(\xi) \dots\dots\dots (25)$$

ただし、関数  $F_m(\xi)$  は長柱の座屈に現われる微分方程式および境界条件

$$F_m^{IV} + \mu_m^2 F_m^{II} = 0 \dots\dots\dots (26)$$

$$\xi = \pm 1 : F_m = F_m^I = 0 \dots\dots\dots (27)$$

を満足するものである。ここで、 $c_m$  は未定定数、 $\mu_m$  は任意定数である。式 (26) を式 (27) で解くと、 $F_m(\xi)$  は  ${}_e F_m(\xi)$  および  ${}_o F_m(\xi)$  :

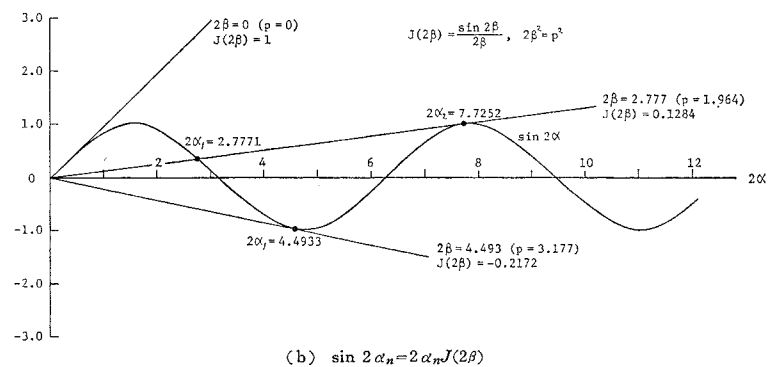
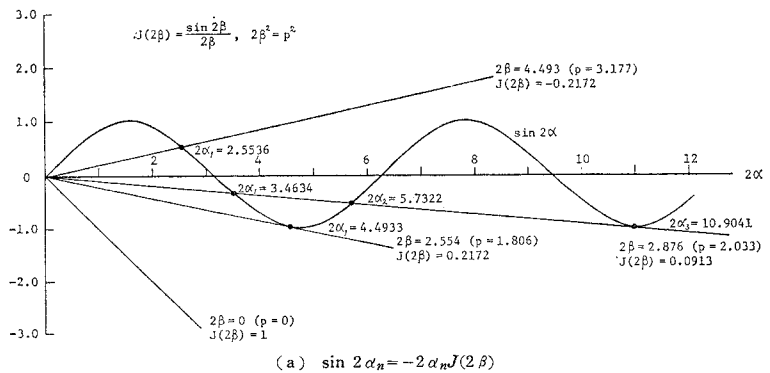


Fig. 1 Appearance of Real Roots :  $2\alpha_n$  of  $\sin 2\alpha_n = \mp 2\alpha_n J(2\beta)$  with  $2\beta$  (plates with uniform compression).

$$\left. \begin{aligned} {}_e F_m(\xi) &= (1-\xi) \frac{\cos \mu_m \xi}{\cos \mu_m} \\ {}_o F_m(\xi) &= \xi - \frac{\sin \mu_m \xi}{\sin \mu_m} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

に分離して表わされる。ただし、 $\mu_m$  は  ${}_e F_m(\xi)$  および  ${}_o F_m(\xi)$  に対してそれぞれ次の固有値方程式

$$\left. \begin{aligned} \sin \mu_m &= 0 \\ \mu_m - \tan \mu_m &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

の根である。式 (25) を式 (24) に代入し、式 (26) の関係、および  $F_m(\xi)$  の直交性の条件

$$\int_{-1}^1 F_m^I(\xi) F_{m'}^I(\xi) d\xi = 0, \mu_m \neq \mu_{m'} \dots\dots (30)$$

を用いると、 $c_m$  は次式で決定される。

$$c_m = \frac{1}{(\mu_m^2 \mp 2p^2)} \cdot \frac{\int_{-1}^1 q(\xi) F_m(\xi) d\xi}{\int_{-1}^1 F_m^I(\xi) F_m^I(\xi) d\xi} \dots\dots\dots (31)$$

II) 自由振動の固有関数による特解の表示 (Case II)

式 (7) を満足する  $w_p$  は

$$w_p = \frac{a^4}{D} \sum_{m=1}^{\infty} d_m G_m(\xi) \dots\dots\dots (33)$$

と仮定する。ここで、 $d_m$  は未定定数、関数  $G_m(\xi)$  は

はりの自由振動に現われる微分方程式および境界条件

$$G_m^{IV} - \omega_m^4 G_m = 0 \dots\dots\dots (34)$$

$$\xi = \pm 1 : G_m = G_m' = 0 \dots\dots\dots (35)$$

を満足するものである。式 (34) を式 (35) で解くと、 $G_m(\xi)$  は  ${}_e G_m(\xi)$  および  ${}_o G_m(\xi)$  に区別して次式

$$\left. \begin{aligned} {}_e G_m(\xi) &= \frac{\cos \omega_m \xi}{\cos \omega_m} - \frac{\cosh \omega_m \xi}{\cosh \omega_m} \\ {}_o G_m(\xi) &= \frac{\sin \omega_m \xi}{\sin \omega_m} - \frac{\sinh \omega_m \xi}{\sinh \omega_m} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

で表わされる。ただし、 $\omega_m$  は  ${}_e G_m(\xi)$  および  ${}_o G_m(\xi)$  に対してそれぞれ次の固有値方程式

$$\left. \begin{aligned} \tan \omega_m + \tanh \omega_m &= 0 \\ \tan \omega_m - \tanh \omega_m &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

の根である。よく知られているように、 $G_m(\xi)$  には、式 (35) のもとで次の直交性の条件

$$\int_{-1}^1 G_m(\xi) G_{m'}(\xi) d\xi = 0, \omega_m \neq \omega_{m'} \dots\dots (38)$$

を満足するが、しかし

$$\int_{-1}^1 G_m(\xi) G_{m'}(\xi) d\xi \neq 0, \omega_m \neq \omega_{m'} \dots\dots (39)$$

となる不都合な性質がある。このことに留意して、式 (33) を式 (24) に代入し、式 (34) の関係から

$$\begin{aligned} \omega_m^4 d_m \int_{-1}^1 G_m^2(\xi) d\xi \mp 2p^2 \sum_{m'=1}^{\infty} d_{m'} \\ \times \int_{-1}^1 G_{m'}(\xi) G_m(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 q(\xi) G_m(\xi) d\xi \end{aligned} \dots\dots\dots (40)$$

が得られる。さて、この方程式より  $d_m$  を求めるにあたり、左辺第 2 項の総和の項のうち、 $m \neq m'$  の項の影響があまり大きくないと考えて、主要な項  $m=m'$  だけをとれば、 $d_m$  は次式で決定することができる<sup>24)</sup>。

$$d_m = \frac{\int_{-1}^1 q(\xi) G_m(\xi) d\xi}{\omega_m^4 \int_{-1}^1 G_m^2(\xi) d\xi \mp 2p^2 \int_{-1}^1 G_m(\xi) G_m(\xi) d\xi} \dots\dots\dots (41)$$

III) 式 (24) の一般解を求める方法 (Case III)

ここでは、式 (24) の一般解を誘導し、式 (7) の境界条件で  $w_p$  を決定する。いま、式 (24) の  $q$  を具体的に

$$q(\xi) = q_0 + q_1 \xi \dots\dots\dots (42)$$

と限定すれば、式 (7) を満足する  $w_p$  は

$$w_p = \frac{a^4}{D} H(\xi) \dots\dots\dots (43)$$

と表わされる。ここで、関数  $H(\xi)$  は偶関数  ${}_e H(\xi)$  と奇関数  ${}_o H(\xi)$  に区別され、それぞれ次式

(a) 圧縮の場合

$$\left. \begin{aligned} {}_e H(\xi) &= -\frac{q_0}{2\delta^3 \sin \delta} \{2 \cos \delta + \delta \sin \delta \\ &\quad - \xi^2 \delta \sin \delta - 2 \cos \delta \xi\} \\ {}_o H(\xi) &= \frac{q_1}{6\delta^2 (\sin \delta - \delta \cos \delta)} \{(\delta \cos \delta - 3 \sin \delta) \xi \\ &\quad - (\delta \cos \delta - \sin \delta) \xi^3 + 2 \sin \delta \xi\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (44)$$

(b) 引張の場合

$$\left. \begin{aligned} {}_e H(\xi) &= -\frac{q_0}{2\delta^3 \sinh \delta} \{2 \cosh \delta - \delta \sinh \delta \\ &\quad + \xi^2 \delta \sinh \delta - 2 \cosh \delta \xi\} \\ {}_o H(\xi) &= \frac{-q_1}{6\delta^2 (\sinh \delta - \delta \cosh \delta)} \{(\delta \cosh \delta - 3 \sinh \delta) \xi \\ &\quad - (\delta \cosh \delta - \sinh \delta) \xi^3 + 2 \sinh \delta \xi\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (45)$$

で表わされる。ただし、定数  $\delta$  は  $\delta = p\sqrt{2}$  である。

式 (29) および (37) の根はすべて実根であり、これらの根を表-1 に示す。

Table 1 Roots of Transcendental Equations.

$\sin \mu_m = 0$	$\mu_m - \tan \mu_m = 0$	$\tan \omega_m + \tanh \omega_m = 0$	$\tan \omega_m - \tanh \omega_m = 0$
$\mu_m = m\pi$	$\mu_1 = 4.49341$ $\mu_2 = 7.72525$ $\mu_3 = 10.90412$ $\mu_4 = 14.06619$ $\mu_5 = 17.22076$ $\mu_6 = 20.37130$ $\mu_7 = 23.51945$ $\mu_8 = 26.66605$ $\mu_9 = 29.81160$ $\mu_{10} = 32.95639$ $\mu_m = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$ for $m \geq 11$	$\omega_1 = 2.36502$ $\omega_2 = 5.49780$ $\omega_m = \left(m - \frac{1}{4}\right)\pi$ for $m \geq 3$	$\omega_1 = 3.92660$ $\omega_m = \left(m + \frac{1}{4}\right)\pi$ for $m \geq 2$

(3)  $y = \pm b$  の境界条件

式 (4) により、式 (3) の境界条件を満足する  $w$  は、式 (18) および (25), (33), (43) から次式でまとめて表わされる。

$$\frac{D}{a^4} w(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi) \lfloor \cosh k\lambda\eta \sinh k\lambda\eta \rfloor_n D_n + R(\xi) \dots\dots\dots (46)$$

ここで、関数  $R(\xi)$  は

$$\left. \begin{aligned} \text{Case I : } R(\xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n F_n(\xi) \\ \text{Case II : } R(\xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n G_n(\xi) \\ \text{Case III : } R(\xi) &= H(\xi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (47)$$

$D_n$  は  $y = \pm b (\eta = \pm 1)$  の境界条件が与えられると決定される。ここでは、次の 3 種類の境界条件について解析する。

(1) 固定 ( $\eta = \pm 1$ )

$$\left. \begin{aligned}
 &\eta = \pm 1 : w = \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \\
 (2) \text{ 単純支持 } (\eta = \pm 1) & \\
 &\eta = \pm 1 : w = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \nu k^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \\
 (3) \text{ 固定 } (\eta = 1) - \text{自由 } (\eta = -1) & \\
 &\eta = 1 : w = \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \\
 &\eta = -1 : \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \nu k^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \\
 &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + (2-\nu) k^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right\} = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (49)$$

ここで、 $\nu$  は Poisson 比である。式 (46) を式 (49) に代入すると、

$$\left. \begin{aligned}
 (1) \text{ 固定 } (\eta = \pm 1) & \\
 \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi) \begin{bmatrix} \cosh k\lambda \\ \lambda \sinh k\lambda \end{bmatrix}_n A_n + \begin{bmatrix} R(\xi) \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \\
 B_n = 0 & \dots\dots\dots (50)
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 (2) \text{ 単純支持 } (\eta = \pm 1) & \\
 \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} X(\xi) \\ U(\xi) \end{bmatrix}_n \cosh k\lambda_n A_n + \begin{bmatrix} R(\xi) \\ \nu R^{\text{II}}(\xi) \end{bmatrix} = 0 \\
 B_n = 0 & \dots\dots\dots (51)
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 (3) \text{ 固定 } (\eta = 1) - \text{自由 } (\eta = -1) & \\
 \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi) \begin{bmatrix} \cosh k\lambda & \sinh k\lambda \\ \lambda \sinh k\lambda & \lambda \cosh k\lambda \end{bmatrix}_n \mathbf{D}_n + \begin{bmatrix} R(\xi) \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \\
 \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} U(\xi) & 0 \\ 0 & V(\xi) \end{bmatrix}_n \begin{bmatrix} \cosh k\lambda & -\sinh k\lambda \\ -\lambda \sinh k\lambda & \lambda \cosh k\lambda \end{bmatrix}_n \mathbf{D}_n \\
 + \begin{bmatrix} \nu R^{\text{II}}(\xi) \\ 0 \end{bmatrix} = 0 & \dots\dots\dots (52)
 \end{aligned} \right\}$$

が得られる。ここで、関数  $U_n(\xi)$  および  $V_n(\xi)$  は次式である。

$$\left. \begin{aligned}
 U_n(\xi) = \lambda_n^2 X_n(\xi) + \nu X_n^{\text{II}}(\xi) \\
 V_n(\xi) = \lambda_n^2 X_n(\xi) + (2-\nu) X_n^{\text{II}}(\xi) & \dots\dots\dots (53)
 \end{aligned} \right\}$$

Case I, II における  $F_m(\xi)$ ,  $G_m(\xi)$  は式 (30), (38) で示すようにそれぞれ直交性を有する直交関数である。特解にこのような直交関数を導入した理由は、 $\eta = \pm 1$  の境界条件によって  $\mathbf{D}_n$  を決定する際、式 (11) のもとで一般に直交性がない  $X_n(\xi)$  をこれらの直交関数で展開して表わし、共通に  $\xi$  変数を取り除き、展開された係数の連立1次方程式を解くことによって  $\mathbf{D}_n$  を決定しようとする意図があるからである。これに対して、Case III では、直交性を有する別の関数を導入して、Herrmann<sup>15)</sup> が Fourier 級数を用いた解析に従って  $X_n(\xi)$  および  $H(\xi)$  を Fourier 級数で展開して表わし、共通に  $\xi$  変数を取り除き、Fourier 係数の連立1次方程式を解くことにより  $\mathbf{D}_n$  を決定する。

式 (50), (51) および (52) を式 (30), (38) の直交性

の条件および Fourier 級数を用いて展開すると、次式が得られる。

$$(1) \text{ 固定 } (\eta = \pm 1) \\
 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} \begin{bmatrix} \cosh k\lambda \\ \lambda \sinh k\lambda \end{bmatrix}_n A_n + \sum_{m=1}^{\infty} \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix}_m = 0 \\
 \dots\dots\dots (54)$$

$$(2) \text{ 単純支持 } (\eta = \pm 1) \\
 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} f \\ \bar{f} \end{bmatrix}_{mn} \cosh k\lambda_n A_n + \sum_{m=1}^{\infty} \begin{bmatrix} g \\ \nu \bar{g} \end{bmatrix}_m = 0 \\
 \dots\dots\dots (55)$$

$$(3) \text{ 固定 } (\eta = 1) - \text{自由 } (\eta = -1) \\
 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} f \\ f \\ \bar{f} \\ \bar{f} \end{bmatrix}_{mn} \begin{bmatrix} \cosh k\lambda & \sinh k\lambda \\ \lambda \sinh k\lambda & \lambda \cosh k\lambda \\ \cosh k\lambda & -\sinh k\lambda \\ -\lambda \sinh k\lambda & \lambda \cosh k\lambda \end{bmatrix}_n \mathbf{D}_n \\
 + \sum_{m=1}^{\infty} \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ \nu \bar{g} \\ 0 \end{bmatrix}_m = 0 \dots\dots\dots (56)$$

ただし、Case II の場合の  $\bar{g}_m$  は式 (41) と同様に  $m = m'$  の主要項だけをとる。また、Case III の偶関数の場合、 $m$  の級数は  $m = 0, 1, 2, \dots$  となる。ここで、上式に現われる係数は次式である。

$$\begin{aligned}
 \text{Case I : } f_{mn} &= \int_{-1}^1 X_n(\xi) F_m^{\text{II}}(\xi) d\xi, \\
 \bar{f}_{mn} &= \int_{-1}^1 U_n(\xi) F_m(\xi) d\xi, \\
 \bar{\bar{f}}_{mn} &= \int_{-1}^1 V_n(\xi) F_m(\xi) d\xi, \\
 g_m = \bar{g}_m &= -c_m \int_{-1}^1 F_m^{\text{I}}(\xi) F_m^{\text{I}}(\xi) d\xi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Case II : } f_{mn} &= \int_{-1}^1 X_n(\xi) G_m(\xi) d\xi, \\
 \bar{f}_{mn} &= \int_{-1}^1 U_n(\xi) G_m(\xi) d\xi, \\
 \bar{\bar{f}}_{mn} &= \int_{-1}^1 V_n(\xi) G_m(\xi) d\xi, \\
 g_m = d_m &= \int_{-1}^1 G_m^2(\xi) d\xi, \\
 \bar{g}_m = -d_m &= \int_{-1}^1 G_m^{\text{I}}(\xi) G_m^{\text{I}}(\xi) d\xi
 \end{aligned}$$

Case III : (i) 偶関数の場合

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} f \\ \bar{f} \\ \bar{\bar{f}} \end{bmatrix}_{mn} &= \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} X(\xi) \\ U(\xi) \\ V(\xi) \end{bmatrix}_n \cos m\pi\xi d\xi, \\
 \begin{bmatrix} g \\ \bar{g} \end{bmatrix}_m &= \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} H(\xi) \\ H^{\text{II}}(\xi) \end{bmatrix} \cos m\pi\xi d\xi
 \end{aligned}$$

ただし、 $m = 0$  のときは

$$\begin{bmatrix} f \\ \bar{f} \\ \bar{\bar{f}} \end{bmatrix}_{0n} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} X(\xi) \\ U(\xi) \\ V(\xi) \end{bmatrix}_n d\xi,$$

$$\begin{bmatrix} g \\ \bar{g} \end{bmatrix}_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} H(\xi) \\ H^{\text{II}}(\xi) \end{bmatrix} d\xi$$

(ii) 奇関数の場合

$$\begin{bmatrix} f \\ \bar{f} \\ \bar{f} \end{bmatrix}_{mn} = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} X(\xi) \\ U(\xi) \\ V(\xi) \end{bmatrix}_n \sin m\pi\xi d\xi,$$

$$\begin{bmatrix} g \\ \bar{g} \end{bmatrix}_m = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} H(\xi) \\ H^{\text{II}}(\xi) \end{bmatrix} \sin m\pi\xi d\xi$$

先に指摘したように、圧縮の場合式 (15) の固有値は  $p$  によって実根と複素根をとる。このような実根と複素根が現われる場合は Gopalacharyulu<sup>25)</sup> が示した解析に従って行う。  $\alpha_n$  が複素根の場合は式 (54), (55) の  $A_n$  および式 (56) の  $D_n$  を

$$\left. \begin{aligned} A_n &= A_n^* + iA_n^{**} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ & \Omega_n \end{bmatrix}, \quad \Omega_n = \begin{bmatrix} A^* \\ A^{**} \end{bmatrix}_n \\ D_n &= \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} A^* + iA^{**} \\ B^* + iB^{**} \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Omega_n \\ \Omega_n &= \begin{bmatrix} A^* \\ A^{**} \\ B^* \\ B^{**} \end{bmatrix}_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(57)$$

と書き換えて表わす。したがって  $\Omega_n$  は実数の未定積分定数である。ただし、 $i^2 = -1$  である。これより、式 (54), (55) および (56) はまとめて

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Z_{mn} \Omega_n + \sum_{m=1}^{\infty} p_m = 0 \dots\dots\dots(58)$$

と表わされる。

ここで、 $Z_{mn}$  および  $p_m$  は次式である。

(1) 固定 ( $\eta = \pm 1$ )

$$Z_{mn} = R_e \left\{ f_{mn} \begin{bmatrix} \cosh k\lambda \\ \lambda \sinh k\lambda \end{bmatrix}_n \begin{bmatrix} 1 & i \\ & i \end{bmatrix} \right\},$$

$$p_m = \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix}_m$$

(2) 単純支持 ( $\eta = \pm 1$ )

$$Z_{mn} = R_e \left\{ \begin{bmatrix} f \\ \bar{f} \end{bmatrix}_{mn} \cosh k\lambda_n \begin{bmatrix} 1 & i \\ & i \end{bmatrix} \right\},$$

$$p_m = \begin{bmatrix} g \\ \nu \bar{g} \end{bmatrix}_m$$

(3) 固定 ( $\eta = 1$ ) - 自由 ( $\eta = -1$ )

$$Z_{mn} = R_e \left\{ \begin{bmatrix} f \\ f \\ \bar{f} \\ \bar{f} \end{bmatrix}_{mn} \begin{bmatrix} \cosh k\lambda & \sinh k\lambda \\ \lambda \sinh k\lambda & \lambda \cosh k\lambda \\ \cosh k\lambda & -\sinh k\lambda \\ -\lambda \sinh k\lambda & \lambda \cosh k\lambda \end{bmatrix}_n \times \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{bmatrix} \right\},$$

$$p_m = \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ \nu \bar{g} \\ 0 \end{bmatrix}_m$$

なお、記号： $R_e$  は複素数の実数部を表わす。

無限 2 重級数で表わされる式 (58) は有限級数に置き換えて、 $m$  および  $n$  の次数に従って配列化すると次式

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{m1} & Z_{m2} & \dots & Z_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \dots \\ \Omega_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_m \end{bmatrix} = 0 \dots\dots\dots(60)$$

が得られる。これを次式で記号表示する。

$$[Z_{mn}]\{\Omega_n\} + \{p_m\} = 0 \dots\dots\dots(61)$$

承知のように、式 (58) の  $Z_{mn}$  は、 $\alpha_n$  が実根の場合に矩形行列 (固定, 単純支持: 2 行 1 列, 固定-自由: 4 行 2 列),  $\alpha_n$  が複素根の場合に正方行列 (固定, 単純支持: 2 行 2 列, 固定-自由: 4 行 4 列) である。このことを考慮して、式 (61) の係数行列  $[Z_{mn}]$  が正方行列になるように  $n$  をもとにして  $m$  を調整すれば、これを解くことができる。すなわち、 $\Omega_n$  は次式

$$\{\Omega_n\} = -[Z_{mn}]^{-1} \{p_m\} \dots\dots\dots(62)$$

で決定される。 $\Omega_n$  が決定されると、式 (57) によって  $D_n$  が定まり、すべての境界条件を満足する  $w$  は式 (46) によって得られる。この結果を次式に代入すると曲げモーメントは得られる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\frac{D}{a^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\nu}{k^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) \\ M_y &= -\frac{D}{a^2} \left( \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(63)$$

圧縮の場合、一様面内力  $p$  の漸増に対して、板は弾性曲げ座屈を起こすことがある。この座屈現象は次のようにして調べられる。 $p$  を変数にとれば、式 (62) の正方係数行列は  $[Z_{mn}(p)]$  とみることができ、この行列式がゼロ

$$\det [Z_{mn}(p)] = 0 \dots\dots\dots(64)$$

となる  $p$  に対して、 $\{\Omega_n\}$  が無限大となり、板は座屈したことになる。

### 3. 数値計算結果

$\xi$  方向についても一定とした等分布横荷重  $q(\xi) = q_0$  が作用した正方形板 ( $k=1.0$ ) について数値計算を行う。式 (49) の単純支持 ( $\eta = \pm 1$ ) の場合には、解の妥当性を検証するために、Lévy 解析<sup>21), 26)</sup> による解と比較する。なお、Poisson 比は  $\nu=0.3$  とした。

表-2 は一様面内力  $p=1.0$  および  $p=2.0$  とした式 (51) および (16) の複素固有値である。 $\sin 2\alpha_n/2\alpha_n +$

$\sin 2\beta/2\beta=0$  の根  $\alpha_n$  は、 $p=1.0$  ですべて複素根、 $p=2.0$  で 2 個の実根と他は複素根である。 $p=1.0$  の  $\alpha_n$  を基準にして  $p=2.0$  の  $\alpha_n$  を調べると、 $p=1.0$  の  $\alpha_n (n \geq 1)$  と  $p=2.0$  の  $\alpha_n (n \geq 2)$  が対応し、 $p$  が 1.0 から 2.0 へ増加することによって、 $\alpha_n$  の実数部が増加して虚数部が減少した値をとり、新しく 1 個の実根  $\alpha_1=1.769$  が現われたことになる。一方、 $\sin 2\alpha_n/2\alpha_n + \sinh 2\beta/2\beta=0$  の根  $\alpha_n$  は、すべて複素根であり、 $p$  が 1.0 から 2.0 へ増加すると、 $\alpha_n$  の実数部が減少して虚数部が増加する値をとる。

表-3, 4 は、 $p=1.0$  および  $p=2.0$  とした、3 ケ

Table 2 Roots of Transcendental Equations.

(a)  $\frac{\sin 2\alpha_n}{2\alpha_n} + \frac{\sin 2\beta}{2\beta} = 0, 2\beta^2 = p^2$

n	$\alpha_n$	
	p=1.0	p=2.0
1	2.142 450 + i 0.929 851	1.768 540 + i 0.0
2	5.372 088 1.368 188	2.811 949 0.0
3	8.546 868 1.594 246	5.446 487 0.305 648
4	11.706 692 1.748 866	8.596 743 0.622 218
5	14.860 013 1.866 680	11.744 173 0.797 431
6	18.009 862 1.961 924	14.890 013 0.923 707
7	21.157 618 2.041 884	18.034 858 1.023 314
8	24.304 008 2.110 799	21.179 035 1.105 834
9	27.449 453 2.171 355	24.322 739 1.176 385
10	30.594 213 2.225 363	27.466 093 1.238 052

(b)  $\frac{\sin 2\alpha_n}{2\alpha_n} + \frac{\sinh 2\beta}{2\beta} = 0, 2\beta^2 = p^2$

n	$\alpha_n$	
	p=1.0	p=2.0
1	2.074 473 + i 1.295 950	1.999 877 + i 1.724 648
2	5.342 441 1.711 773	5.308 514 2.110 439
3	8.527 781 1.933 937	8.505 804 2.327 565
4	11.692 611 2.087 140	11.676 363 2.478 960
5	14.848 858 2.204 271	14.835 972 2.595 225
6	18.000 626 2.299 131	17.989 951 2.689 600
7	21.149 739 2.378 857	21.140 629 2.769 020
8	24.297 139 2.447 607	24.289 193 2.837 576
9	27.443 363 2.508 051	27.436 319 2.897 880
10	30.588 745 2.561 978	30.582 418 2.951 704

ースの展開法による解の収束状態を数値で表わしたものである。最初に圧縮の場合(表-3)について説明する。

(1) 固定 ( $\eta=\pm 1$ ):  $p=1.0$  のとき、Case II は Case I, III の解と比較していくらか異なる値に収束するものの、全体に解は 3 ケースともほぼ同一値に収束する。 $p=2.0$  の場合、Case II の  $w(0,0)$  は Case I, III の解に近い収束値を得るが、曲げモーメントは異なる値に収束する。Case III は展開次数  $n=5$  程度で収束値を表わし、Case I では  $n=15$  で Case III の解にほぼ合致する。

(2) 単純支持 ( $\eta=\pm 1$ ):  $p=1.0$  のとき、Case II の解は Case I, III および Lévy 解の結果にほぼ近い

収束値を表わすが、 $p=2.0$  のときは異なる値に収束する。Case III の解は  $n=5$ 、Case I は  $n=15$  で Lévy 解の結果に合致した収束値を得、複素固有関数解析の妥当性が確認された。

(3) 固定 ( $\eta=1$ ) - 自由 ( $\eta=-1$ ): Case I および Case III の解は  $n=15$  でほぼ合致した収束値を得るが、Case II は Case I, III の解にいくらか異なる値に収束する。

次に、引張の場合(表-4)は、 $p=1.0, 2.0$  および 3 種の境界条件に対して、3 ケースとも  $5 < n < 15$  の展開次数でほぼ合致した結果が得られた。

Table 3 Convergence of Eigenfunction Expansions of Deflections and Moments for Square Plate under Uniform Compression (two opposite edges clamped at  $\xi=\pm 1$ ).

(1) Clamped ( $\eta=\pm 1$ )

n	p=1.0			p=2.0		
	Case I	Case II	Case III	Case I	Case II	Case III
$\frac{D}{q_0 a^4} w(0,0)$						
5	0.021 88	0.021 82	0.011 95	0.029 32	0.024 94	0.029 46
10	0.021 93	0.021 82	0.021 95	0.029 44	0.024 94	0.029 46
15	0.021 95	0.021 82	0.021 95	0.029 45	0.024 94	0.029 46
20	0.021 95	0.021 82	0.021 95	0.029 45	0.024 94	0.029 46

$\frac{1}{q_0 a^2} M_y(0,0)$

5	0.101 6	0.099 1	0.100 7	0.140 1	0.099 2	0.141 1
10	0.100 4	0.099 0	0.100 7	0.141 3	0.099 3	0.141 1
15	0.100 8	0.099 0	0.100 7	0.141 0	0.099 3	0.141 1
20	0.100 6	0.099 0	0.100 7	0.141 0	0.099 3	0.141 1

$\frac{1}{q_0 a^2} M_x(1,0)$

5	-0.176 3	-0.230 4	-0.213 5	-0.213 8	-0.539 3	-0.245 8
10	-0.194 1	-0.232 1	-0.213 5	-0.228 1	-0.540 4	-0.245 8
15	-0.200 4	-0.232 4	-0.213 5	-0.233 5	-0.540 7	-0.245 8
20	-0.203 6	-0.232 5	-0.213 5	-0.235 9	-0.540 8	-0.245 8

(2) Simply supported ( $\eta=\pm 1$ )

n	p=1.0			p=2.0		
	Case I	Case II	Case III	Case I	Case II	Case III
$\frac{D^2}{q_0 a^4} w(0,0)$						
Lévy method : 0.034 86			Lévy method : 0.059 00			
5	0.034 83	0.032 73	0.034 86	0.058 97	0.040 15	0.059 00
10	0.034 85	0.032 72	0.034 86	0.058 99	0.040 08	0.059 00
15	0.034 86	0.032 72	0.034 86	0.059 00	0.040 07	0.059 00
20	0.034 86	0.032 72	0.034 86	0.059 00	0.040 06	0.059 00

$\frac{1}{q_0 a^2} M_y(0,0)$

Lévy method : 0.113 5			Lévy method : 0.207 0			
5	0.114 5	0.109 9	0.113 5	0.206 3	0.133 3	0.207 0
10	0.113 2	0.109 8	0.113 5	0.207 2	0.133 2	0.207 0
15	0.113 6	0.109 8	0.113 5	0.206 9	0.133 2	0.207 0
20	0.113 4	0.109 8	0.113 5	0.207 0	0.133 2	0.207 0

$$\frac{1}{q_0 a^2} M_x (1, 0)$$

n	Lévy method : -0.3017			Lévy method : -0.4225		
	Case I	Case II	Case III	Case I	Case II	Case III
5	-0.2649	-0.3045	-0.3017	-0.3912	-0.6307	-0.4225
10	-0.2824	-0.3062	-0.3017	-0.4049	-0.6313	-0.4225
15	-0.2986	-0.3065	-0.3017	-0.4102	-0.6315	-0.4225
20	-0.2918	-0.3066	-0.3017	-0.4126	-0.6316	-0.4225

(3) Clamped ( $\eta=1$ )—Free ( $\eta=-1$ )

n	p=1.0			p=2.0		
	Case I	Case II	Case III	Case I	Case II	Case III

$$\frac{D}{q_0 a^4} w (0, 0)$$

5	0.03567	0.03911	0.03585	0.08950	0.08027	0.09053
10	0.03574	0.03913	0.03579	0.08985	0.08024	0.09017
15	0.03576	0.03912	0.03578	0.08990	0.08023	0.09005
20	0.03576	0.03912	0.03577	0.08992	0.08023	0.09001

$$\frac{1}{q_0 a^2} M_y (0, 0)$$

5	0.0787	0.0588	0.0780	0.1715	0.1157	0.1740
10	0.0774	0.0586	0.0777	0.1729	0.1157	0.1729
15	0.0778	0.0586	0.0776	0.1725	0.1156	0.1727
20	0.0776	0.0586	0.0776	0.1726	0.1156	0.1727

$$\frac{1}{q_0 a^2} M_x (1, 0)$$

5	-0.2536	-0.3216	-0.2917	-0.5143	-0.8090	-0.5518
10	-0.2714	-0.3234	-0.2911	-0.5297	-0.8099	-0.5492
15	-0.2777	-0.3237	-0.2909	-0.5354	-0.8101	-0.5485
20	-0.2809	-0.3238	-0.2909	-0.5379	-0.8102	-0.5482

**Table 4** Convergence of Eigenfunction Expansions of Deflections and Moments for Square Plate under Uniform Tension (two opposite edges clamped at  $\xi=\pm 1$ ).

(1) Clamped ( $\eta=\pm 1$ )

n	p=1.0			p=2.0		
	Case I	Case II	Case III	Case I	Case II	Case III

$$\frac{D}{q_0 a^4} w (0, 0)$$

5	0.01873	0.01884	0.01879	0.01541	0.01549	0.01546
10	0.01877	0.01883	0.01879	0.01545	0.01549	0.01546
15	0.01878	0.01883	0.01879	0.01546	0.01549	0.01546
20	0.01879	0.01883	0.01879	0.01546	0.01549	0.01546

$$\frac{1}{q_0 a^2} M_y (0, 0)$$

5	0.0849	0.0848	0.0839	0.0675	0.0682	0.0666
10	0.0837	0.0847	0.0839	0.0663	0.0681	0.0666
15	0.0840	0.0848	0.0839	0.0667	0.0681	0.0666
20	0.0839	0.0848	0.0839	0.0665	0.0681	0.0666

$$\frac{1}{q_0 a^2} M_x (1, 0)$$

5	-0.1612	-0.1831	-0.1981	-0.1439	-0.1450	-0.1804
10	-0.1788	-0.1848	-0.1981	-0.1611	-0.1467	-0.1804
15	-0.1850	-0.1851	-0.1981	-0.1673	-0.1471	-0.1804
20	-0.1882	-0.1853	-0.1981	-0.1705	-0.1472	-0.1804

(2) Simply supported ( $\eta=\pm 1$ )

n	p=1.0			p=2.0		
	Case I	Case II	Case III	Case I	Case II	Case III

$$\frac{D}{q_0 a^4} w (0, 0)$$

n	Lévy method : 0.02739			Lévy method : 0.02072		
	Case I	Case II	Case III	Case I	Case II	Case III
5	0.02736	0.02739	0.02739	0.02069	0.02064	0.02072
10	0.02738	0.02738	0.02739	0.02071	0.02063	0.02072
15	0.02739	0.02738	0.02739	0.02072	0.02063	0.02072
20	0.02739	0.02738	0.02739	0.02072	0.02063	0.02072

$$\frac{1}{q_0 a^2} M_y (0, 0)$$

n	Lévy method : 0.0852			Lévy method : 0.0604		
	Case I	Case II	Case III	Case I	Case II	Case III
5	0.0861	0.0860	0.0852	0.0614	0.0621	0.0604
10	0.0849	0.0859	0.0852	0.0602	0.0620	0.0604
15	0.0853	0.0859	0.0852	0.0605	0.0620	0.0604
20	0.0851	0.0859	0.0852	0.0604	0.0620	0.0604

$$\frac{1}{q_0 a^2} M_x (1, 0)$$

n	Lévy method : -0.2613			Lévy method : -0.2226		
	Case I	Case II	Case III	Case I	Case II	Case III
5	-0.2246	-0.2615	-0.2613	-0.1862	-0.1862	-0.2226
10	-0.2420	-0.2472	-0.2613	-0.2034	-0.1878	-0.2226
15	-0.2482	-0.2475	-0.2613	-0.2096	-0.1881	-0.2226
20	-0.2514	-0.2476	-0.2613	-0.2127	-0.1883	-0.2226

(3) Clamped ( $\eta=1$ )—Free ( $\eta=-1$ )

n	p=1.0			p=2.0		
	Case I	Case II	Case III	Case I	Case II	Case III

$$\frac{D}{q_0 a^4} w (0, 0)$$

5	0.02625	0.02627	0.02636	0.01912	0.01912	0.01919
10	0.02629	0.02627	0.02636	0.01915	0.01912	0.01917
15	0.02631	0.02627	0.02632	0.01916	0.01912	0.01916
20	0.02631	0.02627	0.02631	0.01916	0.01912	0.01916

$$\frac{1}{q_0 a^2} M_y (0, 0)$$

5	0.0601	0.0601	0.0593	0.0450	0.0459	0.0441
10	0.0588	0.0600	0.0591	0.0437	0.0458	0.0440
15	0.0592	0.0600	0.0591	0.0441	0.0458	0.0440
20	0.0590	0.0600	0.0591	0.0439	0.0458	0.0440

$$\frac{1}{q_0 a^2} M_x (1, 0)$$

5	-0.2058	-0.2268	-0.2432	-0.1670	-0.1676	-0.2039
10	-0.2233	-0.2285	-0.2428	-0.1843	-0.1693	-0.2036
15	-0.2296	-0.2289	-0.2427	-0.1905	-0.1696	-0.2036
20	-0.2328	-0.2290	-0.2427	-0.1937	-0.1698	-0.2036

Case II の解が Case I, III の解と比較して異なる収束値を得ることは、式 (40) および (41) から明らかのように、 $d_m$  を決定する際、主要項  $m=m'$  だけをとったことによるもので、また、 $p$  の取り得る値にも影響される。すなわち、 $p$  がゼロに近い値  $0 < p < 1$  をとるならば、式 (40) の第 2 項の影響が小さく、Case II の解はほぼ Case I, III の解に合致する。



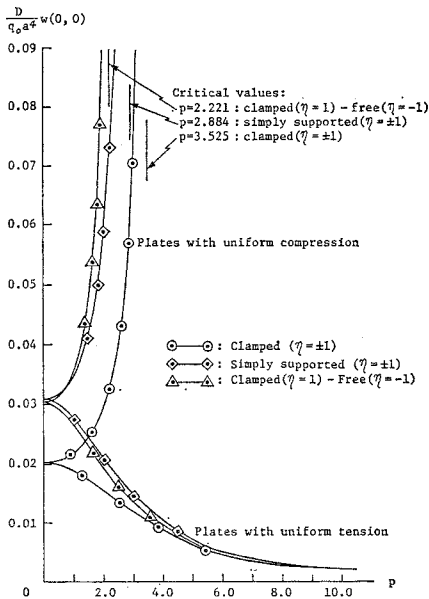


Fig. 2 Variation of Central Deflections of Square Plate with In-Plane Force for the Case III (two opposite edges clamped at  $\xi = \pm 1$ ).

図-2は、3種類の境界条件について、 $p$ の変化に対する正方形板の中央点のたわみ  $w(0, 0)$  変動を表わしたものである。 $p$ の漸増に対して、圧縮の場合の  $w(0, 0)$  は順次増大し、次の1次座屈値：

- (1) 固定 ( $\eta = \pm 1$ )  $p = 3.525$
  - (2) 単純支持 ( $\eta = \pm 1$ )  $p = 2.884$
  - (3) 固定 ( $\eta = 1$ ) - 自由 ( $\eta = -1$ )  $p = 2.221$
- ..... (65)

Table 5 Comparison of Critical Values of Compressive Forces for Square Plate (two opposite edges clamped at  $\xi = \pm 1$ ).

(1) Clamped ( $\eta = \pm 1$ )	
Present method	Ref. 27)
$N_x = \frac{D}{a^2} 2 p^2 : p = 3.525$ $= \frac{D}{a^2} 24.851$	$N_x = \frac{D}{(2a)^2} k \pi^2 : k = 10.08$ $= \frac{D}{a^2} 24.87$
(2) Simply supported ( $\eta = \pm 1$ )	
Present method	Ref. 27)
$N_x = \frac{D}{a^2} 2 p^2 : p = 2.884$ $= \frac{D}{a^2} 16.635$	$N_x = \frac{D}{(2a)^2} k \pi^2 : k = 6.74$ $= \frac{D}{a^2} 16.63$

を漸近線として無限大、引張の場合は順次減少して0に推移する形態を表わす。なお、これは Case III の展開方法を用いて  $n=15$  まで採用した。式 (65) の座屈値は  $p$  を固有値とした式 (64) の固有値方程式の最初に現われた根で、座屈値： $p=3.525$  および  $p=2.884$  は他の解析理論値<sup>27)</sup>と比較してほぼ合致した(表-5)。無

論、 $p=2.884$  は Lévy 解析による座屈値とも合致する。

#### 4. あとがき

本研究は、一様面内力が板の中立面に作用した固定矩形板の曲げ問題に、複素固有関数を導入する解析方法を提案した。この研究によって得られた結果は次のとおりである。

(1) 一様面内力  $p$  (あるいは  $2\beta$ ) の変化に対して、圧縮の場合に現われる  $\sin 2\alpha_n/2\alpha_n + \sin 2\beta/2\beta = 0$  の根  $\alpha_n$  は、 $0 < 2\beta < 2.554$  ( $p=1.806$ ) ですべて複素根、 $2.554 \leq 2\beta$  で1個以上の実根と複素根、 $\sin 2\alpha_n/2\alpha_n - \sin 2\beta/2\beta = 0$  の根は、 $0 < 2\beta < 2.771$  ( $p=1.964$ ) で1個の実根  $\alpha_1 = \beta$  と他はすべて複素根、 $2.771 < 2\beta$  で1個以上の実根と複素根をとる。一方、引張の場合の  $\sin 2\alpha_n/2\alpha_n \pm \sinh 2\beta/2\beta = 0$  の根は  $0 < 2\beta$  で実根をとることなくすべて複素根をとる。

(2) 複素固有関数の展開には、長柱の座屈に現われる固有関数 (Case I)、はりの自由振動の固有関数 (Case II)、および Fourier 級数 (Case III) を導入し、3種類の境界条件 ( $\eta = \pm 1$ ) に対して解析を行った。数値計算の結果、圧縮の場合における Case II の解は Case I、III の解にいくらか異なる結果を得たが、引張の場合、3ケースによる解はそれぞれほぼ同一値の結果を得た。特に、固定 ( $\eta = \pm 1$ ) および単純支持 ( $\eta = \pm 1$ ) の場合に、Case III の解は  $n=5$  の展開次数で収束値を得た。また、単純支持 ( $\eta = \pm 1$ ) の場合、Lévy 解析による結果と比較して、圧縮の場合の Case II の解はいくらか異なるものの、Case I、III はほぼ合致した収束値が得られ、複素固有関数解析の正確性を確認した。

(3) 圧縮の場合に生じる板の弾性曲げ座屈の座屈値は、固定 ( $\eta = \pm 1$ ) :  $p=3.525$ , 単純支持 ( $\eta = \pm 1$ ) :  $p=2.884$ , 固定 ( $\eta = 1$ ) - 自由 ( $\eta = -1$ ) :  $p=2.221$  である。

#### 参考文献

- 1) Fadle, J. : Die Selbstspannungs-Eigenwert-Funktionen der quadratischen Scheibe, Ingenieur-Archiv, Berlin, Germany, Vol. 11, pp. 125~149, 1941.
- 2) Papkovitch, P.F. : Über eine Form der Lösung des biharmonischen Problems für das Rechteck, Comptes Rendus (Doklady) de l'Academie des Sciences de l'USSR Moscow, USSR, Vol. 27, No. 4, pp. 334~338, 1940.
- 3) Ramachandra Rao, B.S. and J.K. Sridhara : A Bi-Orthogonality Relation for Clamped Sector Plates, Journal of Engineering Mathematics, Vol. 4, No. 4, pp. 361~367, 1970.
- 4) Ramachandra Rao, B.S. and J.K. Sridhara : A Note on the Bending of Clamped Semi-Infinite Rectangular

- Plates, Journal of Applied Mechanics, ASME, September, pp. 705~706, 1971.
- 5) Kale, C.S., S. Gopalacharyulu and B.S. Ramachandra Rao : Analysis of a Clamped Skew Plate under Uniform Loading, AIAA Journal, pp. 695~697, May, 1972.
  - 6) Ramachandra Rao, B.S., G.L. Narasimham and S. Gopalacharyulu : Eigenfunction Analysis for Bending of Clamped Rectangular, Orthotropic Plates, International Journal of Solid and Structures, Vol. 9, pp. 481~493, 1973.
  - 7) Ramachandra Rao, B.S., C.S. Kale and R.P. Shimpi : The Sector Problem in Plane Elastostatics, International Journal of Engineering Science, Vol. 11, pp. 531~542, 1973.
  - 8) Rajan, K.V. and B.S. Ramachandra Rao : Flexure of Clamped Semi-Infinite Orthotropic Plates, International Journal of Engineering Science, Vol. 12, pp. 1079~1087, 1974.
  - 9) Sarma, P.V.B.A.S., B.S. Ramachandra Rao and S. Gopalacharyulu : Flexure of a Long Flat Curved Plate under End Loadings, SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 26, pp. 568~577, 1974.
  - 10) Sarma, P.V.B.A.S., B.S. Ramachandra Rao and S. Gopalacharyulu : Eigenfunction Solution for the plane Stress Problems of Curved Beams, International Journal of Engineering Science, Vol. 13, pp. 149~159, 1975.
  - 11) Ramachandra Rao, B.S., S. Gopalacharyulu and N.B. Shukla : End Effects in Long Curved Beam, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 102, pp. 19~29, 1976.
  - 12) Prakash, B.G. and B.S. Ramachandra Rao : Eigenfunction Solutions for the Flexure of Clamped Rectangular Plates Lying on an Elastic Foundation, Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 45, pp. 211~213, 1978.
  - 13) Gaydon, F.A. and W.M. Shepherd : Generalized Plane Stress in a Semi-Infinite Strip under Arbitrary End-Load, Proceedings of the Royal Society, London, England, Vol. 281, pp. 184~206, 1964.
  - 14) Gaydon, F.A. : The Clamped Thin Rectangular Plate under Transverse Loading, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. 19, pp. 65~78, 1966.
  - 15) Johnson, M.W. and R.W. Little : The Semi-Infinite Elastic Strip, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 22, pp. 335~344, 1964.
  - 16) Little, R.W. : Semi-Infinite Strip Problem with Built-in Edges, Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 36, pp. 320~323, 1969.
  - 17) Koiter, W.T. and J.B. Ablas : On the Bending of Cantilever, Rectangular Plates III, Proceedings, K. Akademie Van Wetenschappen Amsterdam, Series B, Vol. 57, pp. 549~557, 1954.
  - 18) Herrmann, L.R. : Bending Analysis for Clamped Rectangular Plates, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 90, pp. 71~86, 1964.
  - 19) Knostman, H.D. and I.K. Silverman : Collocation and Eigenfunctions in Plane Elastostatics, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 94, pp. 797~810, 1968.
  - 20) Giencke, E. : Reihenansätze zur Lösung von Plattenproblemen, ZAMM, Vol. 41, T 86, 1961.
  - 21) Timoshenko, S.P. and S. Woinowsky-Krieger : Theory of Plates and Shells, 2nd ed., McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, N.Y., pp. 378~380, 1959.
  - 22) Hillman, A.P. and H.E. Salyer : Roots of  $\sin z = z$ , Philosophical Magazine, London, England, Vol. 34, p. 575, 1943.
  - 23) Robbins, C.I. and R.C.T. Smith : A Table of Roots of  $\sin z = -z$ , Philosophical Magazine, London, England, Vol. 39, pp. 1004~1005, 1948.
  - 24) Marguerre, K. and H.T. Woernle : Elastic Plates, Blaisdell Publishing Company, A Division of Ginn and Company, 1969. (玉手 統 訳 : 弾性平板, 培風館, 固体の力学シリーズ 5, pp. 109~124, 1974.)
  - 25) Gopalacharyulu, S. : Biharmonic Eigenfunction Expansions for the Sector Problem, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. 22, pp. 305~317, 1969.
  - 26) Timoshenko, S.P. : Theory of Elastic Stability, 1st ed., McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, N.Y., pp. 337~367, 1936.
  - 27) Column Research Committee of Japan edited, Handbook of Structural Stability, Corona Publishing Company, Ltd. Tokyo, pp. 3-3~3-4, 1971.

(1982. 9. 2・受付)