

3 次元弾性問題に対する伝達マトリックス 一級数解法の適用

A METHOD OF TRANSFER MATRIX-SERIES SOLUTION FOR THREE DIMENSIONAL ELASTIC PROBLEMS

園田 恵一郎*・堀川 都志雄**・白鳥 良一***

By Keiichiro SONODA, Toshio HORIKAWA and Ryoichi SHIRATORI

1. 緒 論

近年、土木建造物の大型化に伴って構造設計問題の中に、3次元弾性解析に関連するものが増えてきた。古くから3次元弾性問題の解法としては、フーリエ変換やハンケル変換などの積分変換による解法がよく知られているが¹⁾、これらの解法で容易に解ける問題は弾性特性や境界条件の簡単なものに限られており、実際の構造設計で遭遇する多様な問題に対してはもっぱら有限要素法が利用されているのが現状である。しかしながら、有限要素法で3次元解析を行うには大型計算機を必要とし、そのうえ、精度のよい解を得ようとすれば膨大な計算時間を要することになり、経済的な面でもだれにでも容易に利用できるものではない。一方、近年、マイコンやパソコン等の小型計算機の普及は目覚ましいものがあり、構造設計の分野での利用も高まりつつあるように思われる。

本研究の目的の1つは、解法を工夫することによって小型計算機でもある種の3次元弾性解析が可能であることを示す点にある。提案する解法は、古典的な級数解法と骨組解析でよく知られている伝達マトリックス法(還元法)を結合したもので、積層板や多層地盤の3次元弾性解析に適している。

周知のように、伝達マトリックス法の利点は記憶容量の小さい計算機の利用が可能であることにあるが²⁾、その反面、演算中の有効数字の桁落ちによる誤差の累積が起り、特に格間行列の中に指数関数や双曲線関数を含む場合はこの誤差が顕著になるといわれている。このような欠陥を除去するために従来から種々の工夫がなされており、今日では以下のような措置が必要であると指摘

されている^{3)~5)}。

- ① 行列の乗積計算を倍精度演算で行う。
- ② 物理量を無次元化し、適当なスケールングを施して数値的なふぞろいを防ぐ。
- ③ 格間行列の要素に指数および双曲線関数を含む場合は、引数が大きくなっても関数値が大きくなるないように適当な措置を行う。
- ④ 格間行列の乗積によって行列の要素の絶対値が大きくなる場合には、その行列のノルムがある大きさ以下になるように適当な措置を施す。

しかしながら、これらの措置によって成功した計算例は、要素数が2, 3から20までの限られた問題に対するもので、もし上記①のような措置が絶対に必要であるならば、もっと要素数の多い一般的な問題に対しては、倍精度でも十分でなく4倍精度やそれ以上の演算精度を必要とする場合が起こることは容易に想像できる。すなわち、このことは実際の構造設計で遭遇する多様な問題に対する伝達マトリックス法の適用性を著しく狭める結果になり、特に小型計算機の利用を前提とした場合には、この制約は大きな欠陥につながる事が予想される。一方、要素内の基礎微分方程式の解をフーリエ級数やフーリエ積分によって表わし、これを伝達マトリックス法によって多要素構造に適用する場合には、格間行列は級数の項数や積分変数の大きさに影響を受け、十分に収束する解を得るためには高次項や大きな変数を考慮する必要があるので、誤差の発生がより起りやすいことも予想される。

以上の観点から、級数解法(または積分変換法)と伝達マトリックス法を結合した方法では、基本的には単精度演算で十分に精度のよい解が得られることが必須条件になるものと思われる。したがって、本研究では、上述の①~④の措置の必要性を吟味し、要素数が数十以上になりかつ級数の項数が高次になっても単精度演算で十分に精度のよい結果が得られる計算法を提案する。

* 正会員 大阪市立大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 大阪市立大学助手 工学部土木工学科

*** 学生会員 大阪市立大学工学研究科前期博士課程

2. 3 次元弾性論による厚板の解

3次元弾性問題の基礎方程式の解はガラーキネクトルとプーシネスクの関数によって次式で与えられる。

$$\Delta \Delta W = -B/(1-\nu), \Delta \theta = 0 \dots \dots \dots (1)$$

ここで、

$$W = W_x i + W_y j + W_z k, \theta = \theta_x i + \theta_y j + \theta_z k,$$

$$B : \text{物体力 } (= B_x i + B_y j + B_z k),$$

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2, \partial_x^2 = \partial^2 / \partial x^2, \partial_y^2 = \partial^2 / \partial y^2,$$

$$\partial_z^2 = \partial^2 / \partial z^2,$$

i, j, k : x, y, z 方向の単位ベクトル,

ν : ポアソン比

さらに、変位ベクトル u と式 (1) の関数の関係は次のように与えられる。

$$2\mu u = 2(1-\nu)\Delta W - \text{grad div } W + 2 \text{rot } \theta \dots (2)$$

ここで、 $u = ui + vj + wk$,

μ : ラメの定数 (=せん断弾性係数)

いま、直交座標 (x, y) に関して、 x 方向に間隔 $2a$ および y 方向に間隔 $2b$ で周期的に変化する外荷重がある厚さをもつ無限板の上、下面に作用する場合を考えよう (図-1)。これらの外荷重が次のようなフーリエ級数で与えられたとすると、

$$\left. \begin{aligned} X_u &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{X}_u \cos \alpha_m x \sin \beta_n y \\ X_l &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{X}_l \cos \alpha_m x \sin \beta_n y \\ Y_u &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{Y}_u \sin \alpha_m x \cos \beta_n y \\ Y_l &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{Y}_l \sin \alpha_m x \cos \beta_n y \\ Z_u &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Z}_u \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \\ Z_l &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Z}_l \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

ここで、

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_u \\ \bar{Y}_u \\ \bar{Z}_u \\ \bar{X}_l \\ \bar{Y}_l \\ \bar{Z}_l \end{bmatrix} = \frac{1}{ab} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \begin{bmatrix} X_u \cos \alpha_m x \sin \beta_n y \\ Y_u \sin \alpha_m x \cos \beta_n y \\ Z_u \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \\ X_l \cos \alpha_m x \sin \beta_n y \\ Y_l \sin \alpha_m x \cos \beta_n y \\ Z_l \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \end{bmatrix} dx dy$$

$$\alpha_m = m\pi/a, \beta_n = n\pi/b.$$

板厚に沿って一様に分布する物体力を受ける場合には、以下に示す特解と上、下面の境界条件を満足させるための同次解との和によって、式 (1) の一般解が与えられる。

すなわち、特解は外荷重と同様に次のフーリエ級数によって与えられ、

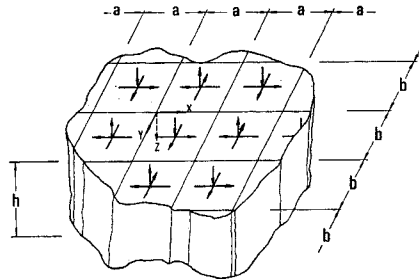


図-1 周期荷重を受ける有限厚さの無限板

$$\begin{bmatrix} W_x^p \\ W_y^p \\ W_z^p \end{bmatrix} = -\frac{1}{1-\nu} \begin{bmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_X \frac{1}{r^4} \cos \alpha_m x \sin \beta_n y \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{B}_Y \frac{1}{r^4} \sin \alpha_m x \cos \beta_n y \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_Z \frac{1}{r^4} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \end{bmatrix} \dots \dots \dots (4)$$

ここで、 $r^2 = \alpha_m^2 + \beta_n^2$

また、同次解は次のように与えられる⁵⁾。

$$\left. \begin{aligned} W_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [C_1 \text{sh } rz + C_2 \text{ch } rz + C_3 rz \text{sh } rz \\ &\quad + C_4 rz \text{ch } rz] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \\ \theta_x &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [C_5 \text{sh } rz + C_6 \text{ch } rz] \cos \alpha_m x \cos \beta_n y \\ W_x &= W_y = \theta_x = \theta_y = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

ここで、 $\text{sh } rz = \sinh rz, \text{ch } rz = \cosh rz$

次に、式 (4) と (5) を式 (2) に代入して各変位成分を求めれば、

$$\begin{aligned} 2\mu u &= -\sum_m \sum_n \left\{ [C_1 \text{ch } rz + C_2 \text{sh } rz + C_3 (rz \text{ch } rz + \text{sh } rz) + C_4 (rz \text{sh } rz + \text{ch } rz) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\beta_n}{\alpha_m r} (C_5 \text{sh } rz + C_6 \text{ch } rz) - \frac{1}{1-\nu} \cdot \frac{1}{r^4} \left\{ 1 - 2(1-\nu) \frac{r^2}{\alpha_m^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{\alpha_m}{r} \bar{B}_X + \frac{\beta_n}{r} \bar{B}_Y \right\} \alpha_m r \cos \alpha_m x \sin \beta_n y \\ 2\mu v &= -\sum_m \sum_n \left\{ [C_1 \text{ch } rz + C_2 \text{sh } rz + C_3 (rz \text{ch } rz + \text{sh } rz) + C_4 (rz \text{sh } rz + \text{ch } rz) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\alpha_m}{\beta_n r} (C_5 \text{sh } rz + C_6 \text{ch } rz) - \frac{1}{1-\nu} \cdot \frac{1}{r^4} \left\{ \frac{\alpha_m}{r} \bar{B}_X + \left[1 - 2(1-\nu) \frac{r^2}{\beta_n^2} \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \frac{\beta_n}{r} \bar{B}_Y \right\} \right\} \beta_n r \sin \alpha_m x \cos \beta_n y \\ 2\mu w &= -\sum_m \sum_n \left\{ [C_1 \text{sh } rz + C_2 \text{ch } rz + C_3 \{ rz \text{sh } rz \right. \\ &\quad \left. - 2(1-2\nu) \text{ch } rz \} + C_4 \{ rz \text{ch } rz \right. \end{aligned}$$

$$-2(1-2\nu)\text{sh } \tau z\} - \frac{2}{\gamma^4} \bar{B}_Z \Bigg] \\ \cdot \tau^2 \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \dots \dots \dots (6)$$

式(6)よりひずみを求め、フックの法則に代入することより応力が得られる。たとえば、応力成分 σ_z, τ_{xz} および τ_{yz} を示せば、

$$\sigma_z = - \sum_m \sum_n \left[C_1 \text{ch } \tau z + C_2 \text{sh } \tau z + C_3 \{\tau z \text{ch } \tau z - (1-2\nu)\text{sh } \tau z\} + C_4 \{\tau z \text{sh } \tau z - (1-2\nu)\text{ch } \tau z\} + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \frac{1}{\gamma^4} \left(\frac{\alpha_m}{\gamma} \bar{B}_X + \frac{\beta_n}{\gamma} \bar{B}_Y \right) \right] \\ \cdot \tau^3 \sin \alpha_m x \sin \beta_n y$$

$$\tau_{xz} = - \sum_m \sum_n \left[C_1 \text{sh } \tau z + C_2 \text{ch } \tau z + C_3 \{\tau z \text{sh } \tau z + 2\nu \text{ch } \tau z\} + C_4 \{\tau z \text{ch } \tau z + 2\nu \text{sh } \tau z\} + \frac{\beta_n}{\alpha_m \gamma} (C_5 \text{ch } \tau z + C_6 \text{sh } \tau z) - \frac{1}{\gamma^4} \bar{B}_Z \right] \\ \cdot \alpha_m \tau^2 \cos \alpha_m x \sin \beta_n y$$

$$\tau_{yz} = - \sum_m \sum_n \left[C_1 \text{sh } \tau z + C_2 \text{ch } \tau z + C_3 \{\tau z \text{sh } \tau z$$

$$+ 2\nu \text{ch } \tau z\} + C_4 \{\tau z \text{ch } \tau z + 2\nu \text{sh } \tau z\} - \frac{\alpha_m}{\beta_n \gamma} (C_5 \text{ch } \tau z + C_6 \text{sh } \tau z) - \frac{1}{\gamma^4} \bar{B}_Z \Bigg] \\ \cdot \beta_n \tau^2 \sin \alpha_m x \cos \beta_n y \dots \dots \dots (7)$$

式(5),(6),(7)に含まれる積分定数 C_1, \dots, C_6 は、板の上、下面の境界量(変位または応力)から6元の連立1次方程式の解として決定できるが、このままでは双曲線関数を含んだ係数をもつ連立1次方程式の解を後に示すように、数値計算の際に都合のよい形で求めることは困難であるので若干の工夫が必要となる。すなわち、 $\text{sh } \tau z$ および $\text{ch } \tau z$ は指数 τz の増加につれて急速に大きくなる関数であるから、座標軸 z の原点を板の上面に採る。すなわち z の変域を $0 \leq z \leq h$ (h :板厚)とするよりも、原点を板の中央にとり、変域を $-h/2 \leq z \leq h/2$ とする方が数値計算の精度が向上する。さらに、式(5)の関数の性質を利用することによって、原点に対して対称問題と逆対称問題とに分離し、6元の連立1次方程式の解を2組の3元連立1次方程式の解の和として求

表-1 応力で規定された場合の積分定数

$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} =$	$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\gamma^3} t_6 & 0 & -\frac{1}{\gamma^3} t_6 & \frac{1}{\gamma^3} t_5 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \frac{1}{\gamma^4} t_5 & \frac{\nu}{1-\nu} \frac{1}{\gamma^4} t_5 & 0 \\ -\frac{1}{\gamma^3} t_5 & 0 & -\frac{1}{\gamma^3} t_6 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma^3} t_7 & 0 & 0 & \frac{1}{1-\nu} \frac{1}{\gamma^4} t_8 \\ \frac{1}{\gamma^3} t_4 & 0 & \frac{1}{\gamma^3} t_4 & 0 & 0 & -\frac{1}{\gamma^3} t_3 & 0 & 0 & -\frac{1}{1-\nu} \frac{1}{\gamma^4} t_4 \\ 0 & \frac{1}{\gamma^3} t_2 & 0 & \frac{1}{\gamma^3} t_2 & -\frac{1}{\gamma^3} t_1 & 0 & -\frac{\nu}{1-\nu} \frac{1}{\gamma^4} t_1 & -\frac{\nu}{1-\nu} \frac{1}{\gamma^4} t_1 & 0 \\ -\frac{1}{\gamma^2} \frac{\beta_n}{\alpha_m} t_9 & 0 & \frac{1}{\gamma^2} \frac{\alpha_m}{\beta_n} t_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\gamma^2} \frac{\beta_n}{\alpha_m} t_{10} & 0 & \frac{1}{\gamma^2} \frac{\alpha_m}{\beta_n} t_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\cdot \begin{bmatrix} \frac{\alpha_m}{\gamma} \bar{X}_p \\ \frac{\alpha_m}{\gamma} \bar{X}_m \\ \frac{\beta_n}{\gamma} \bar{Y}_p \\ \frac{\beta_n}{\gamma} \bar{Y}_m \\ \bar{Z}_p \\ \bar{Z}_m \\ \frac{\alpha_m}{\gamma} \bar{B}_X \\ \frac{\beta_n}{\gamma} \bar{B}_Y \\ \bar{B}_Z \end{bmatrix}$	
			<p>ここで、$t_1 = -2A(1-A^2)/(1-A^4) + BA^2$ $t_7 = t_3 \{B(1-A^2)/(1+A^2) + 8\nu\}/4$ $t_2 = -2A(1+A^2)/(1-A^4) + BA^2$ $t_8 = t_4 \{B(1+A^2)/(1-A^2) - 4(1-2\nu)\}/4$ $t_3 = -2A(1+A^2)/(1-A^4) - BA^2$ $t_9 = 2A/(1+A^2)$ $t_4 = -2A(1-A^2)/(1-A^4) - BA^2$ $t_{10} = 2A/(1-A^2)$ $t_5 = t_1 \{B(1+A^2)/(1-A^2) + 8\nu\}/4$ $A = e^{-\zeta}$ $B = 4\zeta$ $t_6 = t_2 \{B(1-A^2)/(1+A^2) - 4(1-2\nu)\}/4$ $\zeta = \gamma h/2$ $\gamma^2 = \alpha_m^2 + \beta_n^2$ $\bar{X}_p = (\bar{X}_l + \bar{X}_u)/2$ $\bar{Y}_p = (\bar{Y}_l + \bar{Y}_u)/2$ $\bar{Z}_p = (\bar{Z}_l + \bar{Z}_u)/2$ $\bar{X}_m = (\bar{X}_l - \bar{X}_u)/2$ $\bar{Y}_m = (\bar{Y}_l - \bar{Y}_u)/2$ $\bar{Z}_m = (\bar{Z}_l - \bar{Z}_u)/2$</p>

表-2 変位で規定された場合の積分定数

$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} =$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\gamma^2} s_6 & 0 & -\frac{1}{\gamma^2} s_6 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma^2} s_5 & \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{\gamma^4} s_6 & \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{\gamma^4} s_6 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\gamma^2} s_8 & 0 & -\frac{1}{\gamma^2} s_8 & \frac{1}{\gamma^2} s_7 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{\gamma^4} s_7 \\ 0 & \frac{1}{\gamma^2} s_3 & 0 & \frac{1}{\gamma^2} s_3 & -\frac{1}{\gamma^2} s_4 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\gamma^4} s_4 \\ \frac{1}{\gamma^2} s_2 & 0 & \frac{1}{\gamma^2} s_2 & 0 & 0 & -\frac{1}{\gamma^2} s_1 & -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{\gamma^4} s_2 & -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{\gamma^4} s_2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\gamma} \frac{\beta_n}{\alpha_m} s_9 & 0 & \frac{1}{\gamma} \frac{\alpha_m}{\beta_n} s_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\gamma} \frac{\beta_n}{\alpha_m} s_{10} & 0 & \frac{1}{\gamma} \frac{\alpha_m}{\beta_n} s_{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma^3} \frac{\beta_n}{\alpha_m} s_{10} & -\frac{1}{\gamma^3} \frac{\alpha_m}{\beta_n} s_{10} & 0 \end{bmatrix}$	$\cdot \begin{bmatrix} \frac{\alpha_m}{\gamma} \bar{U}_p \\ \frac{\alpha_m}{\gamma} \bar{U}_m \\ \frac{\beta_n}{\gamma} \bar{V}_p \\ \frac{\beta_n}{\gamma} \bar{V}_m \\ \bar{W}_p \\ \bar{W}_m \\ \frac{\alpha_m}{\gamma} \bar{B}_X \\ \frac{\beta_n}{\gamma} \bar{B}_Y \\ \bar{B}_Z \end{bmatrix}$	
			<p>ここで、$s_1 = -2A(1+A^2)/(C(1-A^4) - BA^2)$ $s_7 = s_4 \{B(1+A^2)/(1-A^2) + 4\}/4$ $s_2 = -2A(1-A^2)/(C(1-A^4) - BA^2)$ $s_8 = s_3 \{B(1-A^2)/(1+A^2) - 8(1-2\nu)\}/4$ $s_3 = -2A(1+A^2)/(C(1-A^4) + BA^2)$ $s_9 = A/(1-A^2)$ $s_4 = -2A(1-A^2)/(C(1-A^4) + BA^2)$ $s_{10} = A/(1+A^2)$ $s_5 = s_1 \{B(1-A^2)/(1+A^2) + 4\}/4$ $A = e^{-\zeta}$ $B = 4\zeta$ $C = 3-4\nu$ $s_6 = s_2 \{B(1+A^2)/(1-A^2) - 8(1-2\nu)\}/4$ $\zeta = \gamma h/2$ $\gamma^2 = \alpha_m^2 + \beta_n^2$ $\bar{U}_p = (\bar{U}_l + \bar{U}_u)/2$ $\bar{V}_p = (\bar{V}_l + \bar{V}_u)/2$ $\bar{W}_p = (\bar{W}_l + \bar{W}_u)/2$ $\bar{U}_m = (\bar{U}_l - \bar{U}_u)/2$ $\bar{V}_m = (\bar{V}_l - \bar{V}_u)/2$ $\bar{W}_m = (\bar{W}_l - \bar{W}_u)/2$</p>

める。

すなわち、板の上、下面で応力が規定された場合には、境界条件を上、下面の応力の和と差のそれぞれの1/2に分離し、対称と逆対称問題として積分定数を決定し、それらを合成すれば表-1の結果を得る。

一方、板の上、下面で変位が規定された場合には、同様の手順によって表-2の結果を得る。

表-1, 2の積分定数を式(6),(7)に代入すれば、板内の変位と応力が完全に定まる。

以上は、図-1に示すような間隔2a, 2bでx, y方向に周期的に変化する荷重を受ける板に対する結果であるが、x, y方向に無限に広がる板に単一の荷重を受ける場合については、式(3)~(7)のフーリエ級数をフーリエ積分で置き換えることによって類似の結果を得ることが出来る。ただし、この場合の変位関数は

$$W_z = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [C_1 \text{sh } rz + C_2 \text{ch } rz + C_3 r z \text{ sh } rz + C_4 r z \text{ ch } rz] \cos \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta$$

$$\theta_z = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [C_5 \text{sh } rz + C_6 \text{ch } rz] \cdot \sin \alpha x \sin \beta y d\alpha d\beta \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 $r^2 = \alpha^2 + \beta^2$

となるので、これに対応して式(6),(7)の三角級数の形を変える必要がある。

3. 伝達マトリックス法の適用

(1) 格間行列

図-2に示すようなk層からなる弾性体を考える。最上層の上面および最下層の下面は、表面力が変位のどち

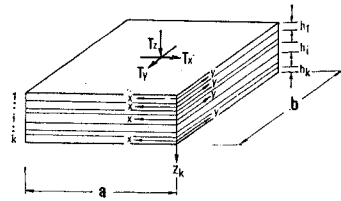


図-2 積層板

らが規定されているものとする。

いま、第i層を取り出し、その上、下面の応力と変位に対するフーリエ係数を次のような行列で表わす。

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_u \\ \bar{X}_l \end{bmatrix}_i = [\bar{X}_u \ \bar{Y}_u \ \bar{Z}_u \ \bar{X}_l \ \bar{Y}_l \ \bar{Z}_l]^T_i$$

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_u \\ \bar{U}_l \end{bmatrix}_i = [\bar{U}_u \ \bar{V}_u \ \bar{W}_u \ \bar{U}_l \ \bar{V}_l \ \bar{W}_l]^T_i \dots\dots\dots (9)$$

ここに、

$$\begin{pmatrix} X_{u,l} \\ 2\mu u_{u,l} \end{pmatrix} = \sum_m \sum_n \begin{pmatrix} \bar{X}_{u,l} \\ \bar{U}_{u,l} \end{pmatrix} \cos \alpha_m x \sin \beta_n y$$

$$\begin{pmatrix} Y_{u,l} \\ 2\mu v_{u,l} \end{pmatrix} = \sum_m \sum_n \begin{pmatrix} \bar{Y}_{u,l} \\ \bar{V}_{u,l} \end{pmatrix} \sin \alpha_m x \cos \beta_n y$$

$$\begin{pmatrix} Z_{u,l} \\ 2\mu w_{u,l} \end{pmatrix} = \sum_m \sum_n \begin{pmatrix} \bar{Z}_{u,l} \\ \bar{W}_{u,l} \end{pmatrix} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \dots\dots\dots (10)$$

最初に、表-1の値を式(6)に代入して境界応力と境界変位についての関係をフーリエ係数の各項(m, n)について次式のように表わす。

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_u \\ \bar{U}_l \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_u \\ \bar{X}_l \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} F_{13} \\ F_{23} \end{bmatrix}_i \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 $F_{ij}(i, j=1, 2)$ は層の柔性行列を意味し、 $F_{i3}(i=1, 2)$ は物体力による影響を表わし、各要素を表わす式は表-3に示される。なお、前述のように $\text{sh } \zeta_i$,

表-3 式(11)の行列の要素

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_m^2}{r^3} (f_2 - \frac{\beta_n^2}{\alpha_m^2} f_1) & \frac{\alpha_m \beta_n}{r^3} (f_2 + f_1) & -\frac{\alpha_m}{r^2} f_1 & \frac{\alpha_m^2}{r^3} (f_5 - \frac{\beta_n^2}{\alpha_m^2} f_6) & \frac{\alpha_m \beta_n}{r^3} (f_5 + f_6) & \frac{\alpha_m}{r^2} f_4 \\ \frac{\alpha_m \beta_n}{r^3} (f_2 + f_1) & \frac{\beta_n^2}{r^3} (f_2 - \frac{\alpha_m^2}{\beta_n^2} f_1) & -\frac{\beta_n}{r^2} f_1 & \frac{\alpha_m \beta_n}{r^3} (f_5 + f_6) & \frac{\beta_n^2}{r^3} (f_5 - \frac{\alpha_m^2}{\beta_n^2} f_6) & \frac{\beta_n}{r^2} f_4 \\ \frac{\alpha_m}{r^2} f_1 & \frac{\beta_n}{r^2} f_1 & -\frac{1}{r} f_3 & \frac{\alpha_m}{r^2} f_4 & \frac{\beta_n}{r^2} f_4 & -\frac{1}{r} f_6 \\ -\frac{\alpha_m^2}{r^3} (f_5 - \frac{\beta_n^2}{\alpha_m^2} f_6) & -\frac{\alpha_m \beta_n}{r^3} (f_5 + f_6) & -\frac{\alpha_m}{r^2} f_4 & -\frac{\alpha_m^2}{r^3} (f_2 - \frac{\beta_n^2}{\alpha_m^2} f_1) & -\frac{\alpha_m \beta_n}{r^3} (f_2 + f_1) & \frac{\alpha_m}{r^2} f_1 \\ -\frac{\alpha_m \beta_n}{r^3} (f_5 + f_6) & -\frac{\beta_n^2}{r^3} (f_5 - \frac{\alpha_m^2}{\beta_n^2} f_6) & -\frac{\beta_n}{r^2} f_4 & -\frac{\alpha_m \beta_n}{r^3} (f_2 + f_1) & -\frac{\beta_n^2}{r^3} (f_2 - \frac{\alpha_m^2}{\beta_n^2} f_1) & \frac{\beta_n}{r^2} f_1 \\ \frac{\alpha_m}{r^2} f_4 & \frac{\beta_n}{r^2} f_4 & -\frac{1}{r} f_6 & \frac{\alpha_m}{r^2} f_1 & \frac{\beta_n}{r^2} f_1 & -\frac{1}{r} f_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{13} \\ F_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_m}{r^3} (\bar{B} X \frac{2\gamma}{\alpha_m} + f_{12} - f_9) \\ \frac{\beta_n}{r^3} (\bar{B} Y \frac{2\gamma}{\beta_n} + f_{12} - f_9) \\ \frac{1}{r^2} (\bar{B} Z - f_{10} + f_{11}) \\ \frac{\alpha_m}{r^3} (\bar{B} X \frac{2\gamma}{\alpha_m} + f_{12} + f_9) \\ \frac{\beta_n}{r^3} (\bar{B} Y \frac{2\gamma}{\beta_n} + f_{12} + f_9) \\ \frac{1}{r^2} (\bar{B} Z - f_{10} - f_{11}) \end{bmatrix}$$

ここで、 $f_1 = 1 - (1 - 2A^2 + A^4)/C$ $f_9 = -(1 - 2A + A^2)\bar{B}Z/D$
 $f_2 = (1 - 2BA^2 - A^4)/C$ $f_{10} = (1 - A^2)\bar{B}Z/D$
 $f_3 = -(1 + 2BA^2 - A^4)/C$ $f_{11} = -(1 - 2A + A^2)(\alpha_m \bar{B} X/r + \beta_n \bar{B} Y/r)/E$
 $f_4 = -BA(1 - A^2)/C$ $f_{12} = -(1 + (1 - A^2)/E)(\alpha_m \bar{B} X/r + \beta_n \bar{B} Y/r)$
 $f_5 = -A\{(B-2) + (B+2)A^2\}/C$ $A = e^{-2\zeta_i}$, $B = 4\zeta_i$, $\zeta_i = \gamma h_i/2$, $r^2 = \alpha_m^2 + \beta_n^2$
 $f_6 = A\{(B+2) + (B-2)A^2\}/C$ $C = (1 - (B^2 + 2)A^2 + A^4)/(2 - 2\nu)$
 $f_7 = 2(1 + A^2)/(1 - A^2)$ $D = (1 - BA + A^2)/(2 - 2\nu)$
 $f_8 = -4A/(1 - A^2)$ $E = (1 + BA - A^2)/2\nu$

表-4 式(12)の行列の要素

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha m^2}{r} \left(g_2 - \frac{\beta n^2}{4 \alpha m^2} g_7 \right) & \frac{\alpha m \beta n}{r} \left(g_5 + \frac{1}{4} g_7 \right) & \alpha m g_1 & \frac{\alpha m^2}{r} \left(g_6 - \frac{\beta n^2}{4 \alpha m^2} g_8 \right) & \frac{\alpha m \beta n}{r} \left(g_5 + \frac{1}{4} g_8 \right) & -\alpha m g_4 \\ \frac{\alpha m \beta n}{r} \left(g_5 + \frac{1}{4} g_7 \right) & \frac{\beta n^2}{r} \left(g_2 - \frac{\alpha m^2}{4 \beta n^2} g_7 \right) & \beta n g_1 & \frac{\alpha m \beta n}{r} \left(g_5 + \frac{1}{4} g_8 \right) & \frac{\beta n^2}{r} \left(g_5 - \frac{\alpha m^2}{4 \beta n^2} g_8 \right) & -\beta n g_4 \\ \alpha m g_1 & \beta n g_1 & r g_3 & \alpha m g_4 & \beta n g_4 & r g_6 \\ -\frac{\alpha m^2}{r} \left(g_5 - \frac{\beta n^2}{4 \alpha m^2} g_8 \right) & -\frac{\alpha m \beta n}{r} \left(g_5 + \frac{1}{4} g_8 \right) & -\alpha m g_4 & -\frac{\alpha m^2}{r} \left(g_2 - \frac{\beta n^2}{4 \alpha m^2} g_7 \right) & -\frac{\alpha m \beta n}{r} \left(g_2 + \frac{1}{4} g_7 \right) & \alpha m g_1 \\ -\frac{\alpha m \beta n}{r} \left(g_5 + \frac{1}{4} g_8 \right) & -\frac{\beta n^2}{r} \left(g_5 - \frac{\alpha m^2}{4 \beta n^2} g_8 \right) & -\beta n g_4 & -\frac{\alpha m \beta n}{r} \left(g_2 + \frac{1}{4} g_7 \right) & -\frac{\beta n^2}{r} \left(g_2 - \frac{\alpha m^2}{4 \beta n^2} g_7 \right) & \beta n g_1 \\ \alpha m g_4 & \beta n g_4 & -r g_6 & \alpha m g_1 & \beta n g_1 & -r g_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{K}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha m}{r^2} \left(g_{12} - \frac{\beta n}{\alpha m} g_{13} + g_9 \right) \\ -\frac{\beta n}{r^2} \left(g_{12} + \frac{\alpha m}{\beta n} g_{13} + g_9 \right) \\ -\frac{1}{r} (g_{11} + g_{10}) \\ \frac{\alpha m}{r^2} \left(g_{12} - \frac{\beta n}{\alpha m} g_{13} - g_9 \right) \\ \frac{\beta n}{r^2} \left(g_{12} + \frac{\alpha m}{\beta n} g_{13} - g_9 \right) \\ -\frac{1}{r} (g_{11} - g_{10}) \end{bmatrix} \quad \text{ここで,}$$

$$\begin{aligned}
 g_1 &= 1 - (1 - 2A^2 + A^4)/C & g_8 &= -4A/(1 - A^2) \\
 g_2 &= -(1 - 2BA^2 - A^4)/C & g_9 &= -\bar{B}_Z(1 - 4\zeta_i A - A^2)/D \\
 g_3 &= -(1 + 2BA^2 - A^4)/C & g_{10} &= -4(1 - \nu)\bar{B}_Z(1 - 2A + A^2)/D \\
 g_4 &= BA(1 - A^2)/C & g_{11} &= (\alpha m \bar{B}_X/r + \beta n \bar{B}_Y/r)(1 - 4\zeta_i A - A^2)/E \\
 g_5 &= -A\{(B-2) + (B+2)A^2\}/C & g_{12} &= -2(1 - 2\nu)(\alpha m \bar{B}_X/r + \beta n \bar{B}_Y/r)(1 - 2A - A^2)/E \\
 g_6 &= A\{(B+2) - (B-2)A^2\}/C & g_{13} &= (\beta n \bar{B}_X/r - \alpha m \bar{B}_Y/r) \\
 g_7 &= 2(1 + A^2)/(1 - A^2) \\
 A &= e^{-2\zeta_i} & B &= 4\zeta_i/(3 - 4\nu) & \zeta_i &= \gamma h_i/2 & r^2 &= \alpha m^2 + \beta n^2 \\
 C &= (3 - 4\nu)(1 - (B^2 + 2)A + A^4)/(2 - 2\nu) & D &= (3 - 4\nu)(1 + BA - A^2) \\
 E &= (3 - 4\nu)(1 - BA - A^2)
 \end{aligned}$$

ch ζ_i は指数 ζ_i が大きくなるにつれて非常に大きくなる関数であるので、表中の式はこれらの関数を除去し ζ_i が大きくなっても有限値に止まる関数のみによって表わされている。

次に、変位境界から決定した積分定数を式(7)に代入して、同様の関係を導くと、

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_u \\ \bar{X}_l \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_u \\ \bar{U}_l \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{K}_{23} \end{bmatrix}_i \quad \dots\dots(12)$$

ここに、 $\mathbf{K}_{i,j}$ ($i, j=1, 2$) は層の剛性行列を意味し、 \mathbf{K}_{i3} ($i=1, 2$) は物体力による荷重項を表わし、各要素を表わす式は表-4に示されている。

さて、式(11)または(12)を用いて格間行列を求める方法はいくつか考えられる。最初に、式(11)を用いて層の下面の境界量を層の上面の境界量と関係づける式を作成すると、

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_u \\ \bar{X}_u \\ 1 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{21}^{-1} \\ \mathbf{F}_{12} & \mathbf{F}_{22}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_l \\ \bar{X}_l \\ 1 \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{13} & \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{21}^{-1} & \mathbf{F}_{23} \\ \mathbf{F}_{12} & \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{21}^{-1} & \mathbf{F}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_l \\ \bar{X}_l \\ 1 \end{bmatrix}_i \quad \dots\dots(13)$$

ただし、点線で囲んだのは後述する計算精度の検討に用いるためである。

次に、式(11)と(12)を用いて同様の境界量の関係を相互に作成すれば

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_u \\ \bar{X}_u \\ 1 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{21}^{-1} \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{21}^{-1} & -\mathbf{K}_{21}^{-1} \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{F}_{21}^{-1} & -\mathbf{F}_{21}^{-1} \mathbf{F}_{22} & -\mathbf{F}_{21}^{-1} \mathbf{F}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_l \\ \bar{X}_l \\ 1 \end{bmatrix}_i \quad \dots\dots(14)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_l \\ \bar{X}_l \\ 1 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{12}^{-1} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12}^{-1} & -\mathbf{K}_{12}^{-1} \mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{F}_{12}^{-1} & -\mathbf{F}_{12}^{-1} \mathbf{F}_{11} & -\mathbf{F}_{12}^{-1} \mathbf{F}_{13} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_u \\ \bar{X}_u \\ 1 \end{bmatrix}_i \quad \dots\dots(15)$$

式(13),(14),(15)の右辺の係数行列が格間行列を与える。

(2) 計算法

図-2に示す多層問題において、各層の接合面で変位も応力も連続する(ボンドスリップや集中物体力の作用がない)ものとすれば、格点行列は単位行列となりこの行列は省略できる。すなわち、式(13),(14)または(15)で示した第*i*層の下面に作用する変位と応力(\bar{U}_l, \bar{X}_l)_{*i*}(これを状態量とよぶ)は、第*i+1*層の上面に作用する状態量(\bar{U}_u, \bar{X}_u)_{*i+1*}と同じになる。

さて、上層から下層に向かって格点番号を0, 1, ..., *k*と付け、格点*i-1*の状態量ベクトルと格点*i*の状態量ベクトルを関連づける式を式(13),(14),(15)の格間行列を用いて表わせば、

$$[\bar{U} \ \bar{X} \ 1]_{i-1}^T = \mathbf{F}_i [\bar{U} \ \bar{X} \ 1]_i^T \quad \dots\dots(16)$$

$$[\bar{U} \ \bar{X} \ 1]_{i-1}^T = \mathbf{L}_i [\bar{U} \ \bar{X} \ 1]_i^T \quad \dots\dots(17)$$

$$[\bar{U} \ \bar{X} \ 1]_i^T = \mathbf{R}_i [\bar{U} \ \bar{X} \ 1]_{i-1}^T \quad \dots\dots(18)$$

ここに、 \mathbf{F}_i は式(13)、 \mathbf{L}_i は式(14)、 \mathbf{R}_i は式(15)によるそれぞれの格間行列(7×7)を示す。

伝達マトリクス法の計算法は、格間行列の採り方と行列の伝達方法の相違によっていくつかの方法が考えられる。

a) 方法 1

この方法は式(16)の格間行列を伝達させて、最上層の上面の境界条件を最下層の下面での境界条件に関連づけ最下端の格点*k*の状態量ベクトルを決定した後に、こ

の状態量を内点に戻す方法である。すなわち、式 (16) を用いれば格点 i の状態量ベクトルは、格点 k のそれと次式のように関係づけられる。

$$\begin{bmatrix} \bar{U} \\ \bar{X} \\ 1 \end{bmatrix}_i = \mathbf{F}_{i+1} \mathbf{F}_{i+2} \cdots \mathbf{F}_k \begin{bmatrix} \bar{U} \\ \bar{X} \\ 1 \end{bmatrix}_k \cdots \cdots (19)$$

$i=0$ とおき、上、下面で規定された境界条件のもとで上式を解けば格点 k または 0 の状態量ベクトルが決定でき、その後式 (19) を利用すればすべての格点での状態量ベクトルが決定できる。

b) 方法 2

手順は方法 1 と同じであるが、式 (16) の代わりに式 (17) または式 (18) の格間行列を用いる。

c) 方法 3

最初に、式 (17), (18) の格間行列の乗積を次のように表わす。

$$L_1 L_2 \cdots L_{i-1} L_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \cdots (20)$$

$$R_k R_{k-1} \cdots R_{i+2} R_{i+1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \cdots (21)$$

ここに、 a_{ij}, b_{ij} は式 (14), (15) の各部分行列に対応する要素である。

式 (20), (21) は格点 i の状態量ベクトルを格点 0 または k の状態量ベクトルに関連づけるマトリックスである。

いま、境界条件として次の 2 ケースを考える。

(1) 上、下面で力 (X_0, X_k) が規定される場合
式 (20) の第 2 行と式 (21) の第 2 行とを組み合わせると

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_0 \\ \bar{X}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U} \\ \bar{X} \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} a_{23} \\ b_{23} \end{bmatrix}$$

ここに、 \bar{X}_0, \bar{X}_k は式 (10) による X_0, X_k に対するフーリエ係数である。

上式より

$$\begin{bmatrix} \bar{U} \\ \bar{X} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{X}_0 - a_{23} \\ \bar{X}_k - b_{23} \end{bmatrix} \cdots \cdots (22)$$

(2) 上面で力 (X_0) が、下面で変位 (U_k) が規定された場合

式 (20) の第 2 行と式 (21) の第 1 行とを組み合わせると、式 (22) と同様の形式をとれば、

$$\begin{bmatrix} \bar{U} \\ \bar{X} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ b_{11} & b_{12} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{X}_0 - a_{23} \\ U_k - b_{13} \end{bmatrix} \cdots \cdots (23)$$

式 (22) または (23) において、 $i=0, 1, \dots, k-1, k$ とおけば、すべての格点での状態量ベクトルが決定できる。

方法 3 は従来の伝達マトリックス計算法とは異なり、物理量である状態量の伝達という過程はなく、格間行列

の伝達操作のみによって全格点の状態量を決定する方法であり、有限要素法で知られているサブストラクチャー法⁵⁾の一種ともみなせる。このような方法はすでに中村の論文⁴⁾においても提案されており、骨組構造や円筒シェルの解析で成功を取っている。ここでは、両端の境界量を同時に伝達させて内点の状態量ベクトルを決定する操作にちなんで、この方法を“はさみ込み法”と名づける。

(3) 計算精度の検討

伝達マトリックス法において、計算精度を低下させる過程としては次の 2 つが考えられる。

① 格間行列の乗積計算によって行列のノルム（以下、ノルムと略称する）が増大し、行列の条件数 (Condition Number)⁶⁾ が大きくなって誤差が生じやすくなる。

② 端点の物理量（状態量）が決定された後に、物理量を内点に伝達させる過程で有効数字の桁落ちによる誤差が集積する。

①に関して、中村⁴⁾は行列のノルムがある大きさ以上になったときに、行列の一部を単位化することによってノルムを下げ方を提案している。また、②に関しては、倍精度または 4 倍精度演算の必要性に関係している。

以下、周辺単純支持積層板を例にとり、これらの過程における計算精度を検討する。すなわち、荷重条件としては、上面に等分布荷重 q を受ける場合 (Case 1) と下面に等分布荷重を受ける場合 (Case 2) そして一様な密度 τ の自重を受ける場合 (Case 3) を考える。ここで、単純支持の条件としては、

$$\left. \begin{aligned} x=0, a \text{ で } v=w=\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=\tau_{yz}=0 \\ y=0, b \text{ で } u=w=\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=\tau_{xz}=0 \end{aligned} \right\} \cdots (24)$$

を意味し、図-2 に対して前節で示した解 (6), (7) がこの問題に直接適用できる。

計算精度の比較が容易なように、弾性定数も層厚も同じとし層数の影響のみを調べ、等方性の単一板の解を厳密解として参照する。

最初に、10 層 ($k=10$) の計算結果を表-5 に示す。これらの値は級数の項数 (m, n) を 31 まで採用したときの収束値である。倍精度計算 (有効数字の桁数 16) ではいずれの方法でも正確値を示しているが、単精度計算 (有効数字の桁数 7) では方法 1 および 2 で誤差の発生がみられる。すなわち、方法 1 では初期値 (10 層の下面の状態量ベクトル) そのものにすでに誤差が含まれており、内点に伝達するにつれてこの誤差が拡大している。しかしながら、方法 2 では初期値そのものは正確であり、下面に荷重を受けない Caes 1 では内点の状態量

表-5 板中央点の変位 w , 応力 σ_z の比較

荷重 状態	格点 番号	$(2\mu/qa)w^*$						σ_z/q^*						
		方法 1		方法 2		方法 3		方法 1		方法 2		方法 3		
		単精度	倍精度	単精度	倍精度	単精度	倍精度	単精度	倍精度	単精度	倍精度	単精度	倍精度	
Case 1	0	6.399	6.415	6.416	6.415	6.416	6.415	-0.960 6	-0.960 6	-0.960 9	-0.960 6	-0.960 6	-0.960 6	-0.960 6
	2	6.509	6.519	6.520	6.519	6.520	6.519	-0.892 4	-0.892 4	-0.892 4	-0.892 4	-0.892 4	-0.892 4	-0.892 4
	4	6.554	6.559	6.559	6.559	6.559	6.559	-0.647 8	-0.647 8	-0.647 8	-0.647 8	-0.647 8	-0.647 8	-0.647 8
	6	6.544	6.541	6.541	6.541	6.541	6.541	-0.351 9	-0.351 9	-0.351 9	-0.351 9	-0.351 9	-0.351 9	-0.351 9
	8	6.470	6.465	6.465	6.465	6.465	6.465	-0.104 0	-0.104 0	-0.104 0	-0.104 0	-0.104 0	-0.104 0	-0.104 0
	10	6.331	6.325	6.325	6.325	6.325	6.325	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Case 2	0	-2.02E-05	6.325	-1.65E-05	6.325	6.325	6.325	2.27E-07	2.46E-05	1.48E-07	-8.06E-03	-9.54E-07	-2.22E-16	
	2	-4.30E-02	6.465	-1.12E-03	6.465	6.465	6.465	5.19E-04	0.104 0	1.08E-05	0.104 0	0.104 0	0.104 0	
	4	6.185	6.541	0.501 5	6.541	6.541	6.541	6.23E-01	0.351 9	5.95E-02	0.351 9	0.351 9	0.351 9	
	6	6.565	6.559	6.532	6.559	6.559	6.559	0.384 3	0.647 8	3.339	0.647 8	0.647 8	0.647 8	
	8	6.516	6.519	6.519	6.519	6.520	6.519	0.889 9	0.892 4	0.901 4	0.892 4	0.892 4	0.892 4	
	10	6.409	6.415	6.416	6.415	6.416	6.415	0.960 6	0.960 6	0.960 6	0.960 6	0.960 6	0.960 6	
Case 3	0	-7.03E-03	6.496	-5.27E-03	6.496	6.496	6.496	7.97E-05	-5.28E-06	4.58E-05	3.50E-04	0.0	0.0	
	2	-7.463	6.632	-3.25E-01	6.632	6.632	6.632	1.72E-03	-0.095 9	3.72E-03	-0.095 9	-0.095 9	-0.095 9	
	4	6.699	6.697	6.482	6.697	6.697	6.697	1.490	-0.048 0	2.10E-01	-0.048 0	-0.048 0	-0.048 0	
	6	6.697	6.697	6.696	6.697	6.697	6.697	0.028 8	0.048 0	0.142 6	0.048 0	0.048 0	0.048 0	
	8	6.630	6.632	6.632	6.632	6.632	6.632	0.095 7	0.095 9	0.096 1	0.095 9	0.095 9	0.095 9	
	10	6.491	6.496	6.496	6.496	6.496	6.496	-2.06E-05	1.31E-16	0.0	0.0	0.0	0.0	

(注) □□□□ は誤差の大きい箇所
* Case 3 では $q=rh$, r は自重の密度とする。

ベクトルも正確な値を与えているが、下面に荷重を受ける Case 2 では内点への伝達の途上で誤差が混入し、その後この誤差は加速度的に増大している。

以上のような誤差の発生原因を調べるために、まず最初に、式 (13), (14) で与えられる格間行列とその乗積の比較を表-6 に示す。表-6 は、級数の初項 ($m=n=1$) および終項 ($m=n=31$) に対する結果である。表には単精度計算の結果のみを示しているが、方法 2 の結果は倍精度計算によるものとまったく一致しており十分に正確であった。一方、方法 1 の結果では、式 (13) の格間行列そのものに誤差が含まれており、行列の乗積につれてこの誤差が増大している。次に、級数の項数が精度低下に与える影響については予想に反して誤差の拡大はみられず、低次項に比べて高次項の方がかえって精度のよい結果を与えている。

これらのことより、格間行列の中に含まれる双曲線関数の処理には問題はなく、層の上、下面の応力条件のみによって誘導した式 (13) の格間行列の点線で囲んだ部分行列 (ただし、この計算例では物体力はないので第 3 列は零である) の加減算での有効数字の桁落ちが誤差の原因であろうと推測できる。

次に、初期値の決定後の状態量ベクトルの内点への伝達過程における誤差の発生については、Case 1 と Case 2 はまったく同一の問題であるにもかかわらず計算精度が異なることより、初期値からの伝達途上での有効数字の桁落ちが原因であろうと推測できる。すなわち、Case 2 の初期値 (最下面の状態量ベクトル) は荷重の値が直接導入されるので、Case 1 の初期値 (境界応力が零で

ある) に比べて相対的に大きくなり、その結果、内点への伝達過程中で有効数字の桁落ちによる誤差が入りやすくなるものと思われる。このことを確かめるために、自重を受ける Case 3 の計算結果を表-5 に示す。この問題では物体力が存在し、式 (13) または (14) の格間行列の第 3 列は零でなく、行列の伝達過程において内部荷重の影響を直接に受ける。表の結果が示すように、方法 3 が正確な解を与えているのに対して方法 2 による初期値は正確であるにもかかわらず、内点へ伝達するにつれてしだいに大きな誤差が発生している。

さらに、この場合の級数の項数が与える影響を調べたものが表-7 である。初項の場合は方法 1 での誤差はごく小さな値に止まっているが、項数が増すにつれて誤差が大きくなっており、終項の場合は方法 2 による初期値は正確であるにもかかわらず、最終の伝達点 (0) で非常に大きな誤差が発生していることがわかる。このような級数の項数が高い場合に状態量の伝達計算における有効数字の桁落ちによる誤差が顕著になることは、表-6 で示した格間行列の乗積によるノルムの増大に関係している。すなわち、級数の項数が低いときは格間行列の乗積におけるノルムは大きくならないので、これに状態量ベクトルを掛けたときの有効数字の桁落ちは顕著ではないが、級数の項数が高いときはノルムが大きくなるので、有効数字の桁落ちの程度は非常に大きくなる。

以上の結果、前述の計算過程①における誤差は式 (14) または (15) のような変位と応力の両方の境界条件を用いて基礎微分方程式から誘導した格間行列を採用することによって取り除くことができるが、計算過程②におけ

表-6 項数に対する格間行列のノルムと乗積の

フーリエ級数の項数	行列の乗積	方法 1								
		ノルム*	$F_{i+1} F_{i+2} \dots F_k$						ノルム*	
$m=n=1$	1 ($i=k$)	2.507E 00	1.007	2.823E-03	6.303E-02	5.210E-02	2.098E-05	1.053E-03	2.507E 00	1.007
	10 ($i=0$)	7.875E 00	1.744	3.228E-01	8.426E-01	2.856E-02	6.199E-01	2.856E-01	7.872E 00	1.742
$m=n=31$	1 ($i=k$)	3.407E 03	1.559E 01	7.698	1.256E 01	-1.946E-01	-4.687E-02	1.028E-01	3.407E 03	1.559E 01
	10 ($i=0$)	1.915E 15	4.975E 12	4.515E 12	6.479E 12	-4.974E 10	-4.107E 10	6.028E 10	1.915E 15	4.975E 12

注) 誤差の大きい箇所を点線で囲む
 * ノルム = $(\sum_j x_{ij}^2)^{1/2}$, x_{ij} は行列の要素

表-7 項数に対する Case 3 での状態量 \bar{W} , \bar{Z} の比較

フーリエ級数の項数	状態量ベクトル 格点番号	\bar{W}			\bar{Z}		
		方法 1	方法 2	方法 3	方法 1	方法 2	方法 3
$m=n=1$	0	6.745	6.741	6.741	-1.347E-05	-1.222E-05	0.0
	2	6.891	6.892	6.892	1.536E-01	1.537E-01	1.537E-01
	4	6.963	6.962	6.962	7.628E-02	7.635E-02	7.635E-02
	6	6.961	6.962	6.962	-7.643E-02	-7.635E-02	-7.635E-02
	8	6.888	6.892	6.892	-1.537E-01	-1.537E-01	-1.537E-01
	10	6.735	6.741	6.741	0.0	0.0	0.0
$m=n=15$	0	-2.228E-02	4.359E-03	2.531E-05	-1.183	2.317E-01	0.0
	2	-1.176E-03	2.390E-04	2.334E-05	-6.411E-02	1.182E-02	1.001E-04
	4	-3.756E-05	3.045E-05	2.141E-05	-3.199E-03	5.215E-04	1.249E-05
	6	1.901E-05	2.163E-05	2.141E-05	-1.486E-04	1.656E-06	-1.249E-05
	8	2.329E-05	2.339E-05	2.334E-05	-1.035E-04	-1.005E-04	-1.001E-04
	10	2.532E-05	2.530E-05	2.531E-05	0.0	0.0	0.0
$m=n=31$	0	-1.250E-04	1.106E-04	1.388E-06	-1.345E-06	1.190E-06	0.0
	2	-3.975E-01	3.543E-01	1.170E-06	-4.295E-03	3.826E-03	1.345E-06
	4	-1.169E-01	1.056E-01	1.156E-06	-1.272E-01	1.148E-01	-2.168E-09
	6	-2.938E-04	2.750E-04	1.156E-06	-3.263E-02	3.019E-02	5.297E-09
	8	6.979E-07	1.657E-06	1.170E-06	-5.694E-05	5.500E-05	-1.335E-06
	10	1.390E-06	1.386E-06	1.387E-06	0.0	0.0	0.0

(注) [] は誤差の大きい箇所

る誤差は有効数字の桁落ちによって発生するので、格間行列の乗積におけるノルムが大きくなる場合には、この誤差を避けるために倍精度や4倍精度演算が必要になるものと思われる。したがって、計算過程②を取り除いた方法3(“はさみ込み法”)は、いずれのケースに対しても単精度計算で正確な結果を与えており最良の方法であ

るといえる。さらに、このことを再確認するために表-5のCase2の荷重条件に対して、層数kを20から50まで変えたときの計算結果を表-8に示す。表には最も大きな誤差をもち得る最終の格点(すなわち、最上層の上面)での状態量(変位と直応力)のみを示している。表の結果より、方法3の場合はいずれの層数に対しても

比較

方法 2						
$L_{i+1} L_{i+2} \dots L_k$						
2.824E-03	6.303E-02	-5.209E-02	-2.445E-05	1.168E-03		
1.007	6.303E-02	-2.445E-05	-5.209E-02	1.168E-03		
-2.708E-02	9.983E-01	1.168E-03	1.168E-03	1.483E-02		
-1.415E-01	-1.365E-02	1.007	2.822E-03	-2.705E-02		
-2.935E-01	-1.365E-02	2.822E-03	1.007	-2.705E-02		
-1.365E-02	-5.712E-04	6.303E-02	6.303E-02	9.983E-01		
3.206E-01	8.420E-01	-6.176E-01	-2.643E-02	1.326E-01		
1.742	8.420E-01	-2.643E-02	-6.176E-01	1.326E-01		
-4.338E-01	7.803E-01	1.327E-01	1.327E-01	1.161E-01		
-1.912	-1.549	1.742	3.207E-01	-4.335E-01		
-3.638	-1.549	3.207E-01	1.774	-4.335E-01		
-1.549	-6.173E-01	8.421E-01	8.421E-01	7.805E-01		
7.699	1.256E 01	-1.946E-01	-4.688E-02	1.028E-01		
1.559E 01	1.256E 01	-4.688E-02	-1.946E-01	1.028E-01		
-9.395	-7.508	1.028E-01	1.028E-01	-5.154E-02		
-9.111E 02	-1.153E 03	1.559E 01	7.698	-9.395		
-1.326E 03	-1.153E 03	7.698	1.559E 01	-9.395		
-1.153E 03	-1.052E 03	1.256E 01	1.256E 01	-7.508		
4.516E 12	6.480E 12	-4.975E 10	-4.108E 10	6.028E 10		
4.975E 12	6.480E 12	-4.108E 10	-4.975E 10	6.028E 10		
-6.294E 12	-8.573E 12	6.028E 10	6.028E 10	-7.968E 10		
-4.837E 14	-6.766E 14	4.975E 12	4.516E 12	-6.294E 12		
-5.080E 14	-6.766E 14	4.515E 12	4.975E 12	-6.294E 12		
-6.766E 14	-9.222E 14	6.479E 12	6.479E 12	-8.573E 12		

表-8 層数による計算精度の比較 (Case 2 の最上層の上面での変位 w と応力 σ_z に対して)

変位および応力	層数 k	方法 2		方法 3		厳密解*
		単精度	倍精度	単精度	倍精度	
$\frac{2\mu}{qa} w$	10	-1.65E 05	6.325	6.325	6.325	6.325
	20	4.87E 05	6.325	6.324	6.325	6.325
	30	1.48E 05	6.325	6.323	6.325	6.325
	40	3.96E 05	6.325	6.323	6.325	6.325
	50	-2.88E 05	6.325	6.331	6.325	6.325
$\frac{\sigma_z}{q}$	10	-1.48E 07	-8.06E-03	-9.54E-07	-2.22E-16	0.0
	20	4.23E 07	-3.32E-03	-9.54E-07	-2.22E-16	0.0
	30	1.47E 07	-3.73E-03	-9.54E-07	-2.22E-16	0.0
	40	4.12E 07	-8.67E-03	-9.54E-07	-2.22E-16	0.0
	50	-2.97E 07	3.95E-03	-9.54E-07	-2.22E-16	0.0

注) [] は誤差の大きい箇所
* 単一板としての解析結果

単精度計算で十分に満足すべき結果を与えているが、方法 2 では倍精度計算でもやや精度の低下が認められる。

4. 方法 3 (はさみ込み法) による応用例

(1) 積層板の 3 次元応力解析

板厚が辺長の 1/5 である周辺単純支持正方形積層板が上面に等分布荷重 q を受ける問題を取り上げる。層数は 10 で、最上層のラメ定数 μ から最下層のラメ定数 1.9μ へ直線的に変化する積層板 (ただし、ポアソン比

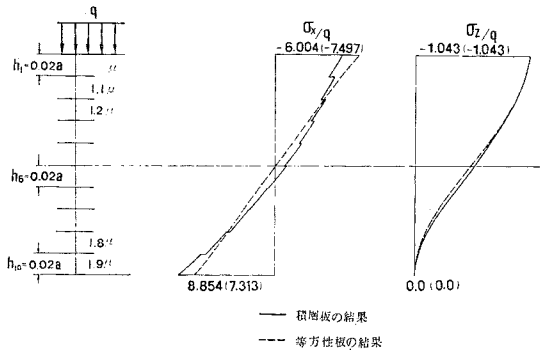


図-3 深さ方向に弾性定数の異なる積層板の応力分布図

は 0.3 で一定) を考える。

単精度計算を用いた方法 3 による解析結果を 図-3 に示す。板中央点での断面力の曲げ応力分布は、比較のために示した等方性板ではほぼ直線的であるが、積層板では曲線形状になり積層板の特徴がよく現われている。

(2) 多層弾性盤の 3 次元応力解析

底面で固定され、水平方向に無限に広がる注 1) 多層弾性盤の上面に鉛直部分等分布荷重を受ける問題を考える。層数は 30 で等間隔に分割されており、弾性定数は上層の μ から下層の 2μ に直線的に変化し、ポアソン比は 0.3 で同一とする。

単精度計算を用いた方法による解析結果を 図-4 に示す。なお、もしこの問題に対して、伝達マトリックス法を用いない従来の級数解法を適用すれば、級数の各項について表-1 または表-2 の積分定数 C_1, \dots, C_6 に関する $6 \times 30 = 180$ 元の連立 1 次方程式を解かねばならず、小型計算機によって精度のよい解を求めることは容易ではないと推測される。

5. 結 論

本研究は、多層弾性体の 3 次元解析に対してフーリエ級数解法と伝達マトリックス法を適用するときの問題点とその解決法を検討したもので、得られたおまな結論は以下のとおりである。

(1) 直交座標に関する基礎微分方程式の一般解は双曲線関数を含んだ関数で与えられるが、数値計算精度を高めるために、関数の引数をできる限り小さな値に止めることが肝要であり、そのためには座標の原点を各層の中央面にとり、使用する変域を原点の周囲に選ぶことが

注 1) ここでは級数解法を適用し、荷重の半周期を層厚の 5 倍に採っている。

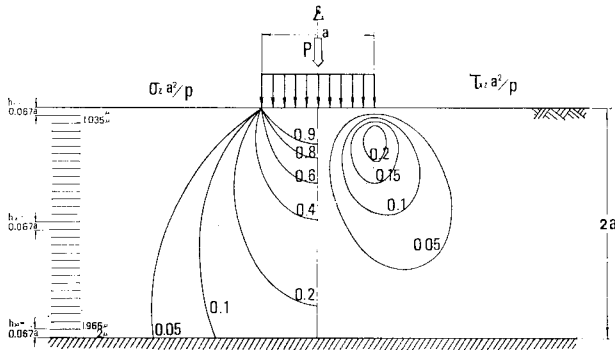


図-4 深さ方向に弾性定数の異なる多層弾性盤における応力の等高線図

好ましい。

(2) 上記の措置を施しても級数の項数が大きくなると双曲線関数の引数も大きくなることは避けたい。それゆえ、一般解に含まれる積分定数を双曲線関数を含んだ形で求め、引数が大きくなっても最終的な変位と応力の式中の関数を有限値に止める形に変換しておくことが必要である。

(3) 各層の上面と下面の物理量(状態量)を関連づける格間行列については、変位と応力の両方の境界条件より決定された積分定数を用いて一般解から求めた式(14)または(15)の方が、応力境界条件のみによって決定された式(13)より精度的に優れている。この原因は、式(11)から式(13)を数値的に求めるときの有効数字の桁落ちにあるものと思われる。

(4) 伝達マトリックス法における誤差の発生について検討すると、①端点の状態量ベクトル(初期値)を求めるまでの過程と②初期値を用いて内点の状態量ベクトルを求める過程とに分けられる。過程①の誤差は前述の(3)による精度のよい格間行列を用いて除去できるが、過程②の誤差は状態量ベクトルに格間行列を順次前掛けする際に有効数字の桁落ちに伴って起こり、この誤差は荷重項や初期値に含まれる境界量に関係しており、誤差の程度は格間行列の乗積におけるノルムの増大率に関係している。したがって、級数の項数が大きくなったときには、このノルムが大きくなり通常の単精度計算では精度のよい結果を求めることが困難になる。

(5) 従来からよく知られている伝達マトリックス法

とは若干異なるが、両端の境界物理量を同時に伝達させて、内点の状態量ベクトルを直接求める方法3(はさみ込み法)は上記(4)における過程②を省略しているため、本方法ではいずれの計算例においても単精度計算で十分に精度のよい結果が得られた。したがって、方法3を用いれば格間行列の乗積におけるノルムがどのように増大しても(もし、指数部が計算機の許容値を越える場合には適当なスケールングを施せばよい)、単精度計算で十分に正確な解を得ることができるものと推測できる。

最後に、本研究では3次元弾性問題を取り扱ったが、平面応力、平面ひずみ問題や平板問題などの2次元弾性問題においても、直交座標に関する基礎微分方程式の一般解が双曲線関数を含んだ関数で与えられるので、これらの問題に対しても伝達マトリックス一般数解法を適用する場合には本研究の結論がそのまま当てはまるものと思われる。さらに、異方性多層弾性問題⁷⁾にこのような解法を適用すれば、単一体としての解析が非常に困難な空間的に弾性定数が変化する問題の解析が可能になり、伝達マトリックス法の適用範囲が一層広がるものと推測できる。

参考文献

- 1) 宮本 博: 三次元弾性論, 裳華房, 昭和42年。
- 2) R. ケルステン (伊藤学訳): 構造力学における還元法, 技報堂, 昭和43年。
- 3) 中井 博・事口寿男: 伝達マトリックス法による曲げねじりを受ける薄肉直線桁橋の解析と断面力, 変形量に関する研究, 土木学会論文集, 第233号, pp. 55~70, 1975年11月。
- 4) 中村秀治: 数値誤差の改善を考慮した伝達マトリックス法の提案, 土木学会論文集, 第289号, pp. 43~53, 1979年9月。
- 5) Horikawa, T., K. Sonoda and M. Kurata: A comparison of numerical results given by thick plate, Reissner's and thin plate theories, Memo. Osaka City University, Vol. 16, pp. 169~186, Dec., 1975。
- 6) 山本善之・山田善一: マトリックス構造解析の誤差論, コンピューターによる構造工学講座 II-5-B, 培風館, 昭和47年。
- 7) Sonoda, K. and T. Horikawa: Displacement functions for an orthotropic elastic body and their applications to thick plate problems, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 29, pp. 127~138, 1981。

(1983.1.8・受付)