

異方性地盤におけるサンドドレーン周辺の圧密解析

ANALYSIS OF CONSOLIDATION IN ANISOTROPIC GROUND
WITH SAND DRAIN

田 村 武*

By Takeshi TAMURA

1. 概 説

Barron の方法¹⁾に代表されるように、従来のサンドドレーン工法の設計では等方的な応力-ひずみ関係が仮定されている。しかし、現実の地盤や粘土試料には異方性を示すものも少なくなく、これらを考慮した研究が必要であると思われる。特にサンドドレーン周辺領域の圧密では、次のような異方性の影響に注意しなくてはならない。図-1(a)は、サンドドレーン周辺領域を最も簡単に模した中空円筒領域の粘土層の垂直断面を示したものである。すなわち、一様な初期(過剰)間隙水圧を仮定したとき圧密前の領域が、圧密とともに内径を拡大しながら沈下し最終的な領域(斜線部)へと移行する。ここで外周は変位拘束で非排水条件、一方内周は応力境界で排水条件である^{注1)}。このとき、よく知られているように、外径に対し内径の大きい場合ほど圧密は速く生じる。また排水に関する境界条件をそのままにして図-1(b)のように上端面の沈下を阻止し、外周の収縮を許した場合にも圧密度と内、外径の間に同様な関係が成り立つ。一方、図-1(c)のように沈下と外周の収縮をともに阻止したときは、その関係が逆転する²⁾。つまり、内径が小さいほど、圧密が速く完了する。これは以下のよ

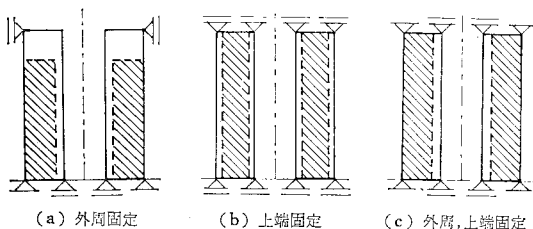


図-1 変位に関する種々の境界条件

* 正会員 工博 京都大学講師 工学部土木工学科

注1) 砂坑の存在を直接考えないが、そのかわり初期に一様な間隙水圧を発生させるような力を内周に与えるものと仮定する。

うに定性的に説明することができる。図-1(b)の境界条件のもとである時間圧密させたとき外周は収縮する。この状態から図-1(c)の外周拘束条件を満足させるには、非排水条件(等体積条件)のもとで外周に張力を加え、それをもとの位置まで拡大しなければならない。このとき、負の間隙水圧が生じるため間隙水圧は減少する。すなわち、負の Mandel-Cryer 効果^{3),4)}により見かけ上、圧密が促進される。しかも発生する負の間隙水圧は、内径が小さい場合ほど大きい。たとえば、内径が零のとき無限大の張力が必要である。これが、図-1(c)において圧密度と内径の大きさとの関係が逆転する1つの理由である。むしろ現実のサンドドレーンでは図-1(a)に近い条件のもとで圧密が起こっている。しかし、地盤の垂直方向の剛性が無限大だとすれば、沈下が拘束されたことと等価であり、図-1(a)の境界条件はそのまま図-1(c)の条件となる。いいかえるなら、図-1(a)と(c)に示される境界条件は水平方向に対する垂直方向の剛性の比をパラメーターとして連続的に移行することができる。

以上のように、サンドドレーンの設計に際しては地盤の異方性に注意しなければならないが、それに対する解析的な研究はほとんど見当たらない⁵⁾⁻⁸⁾。本研究は、そのような問題点を踏まえ、異方性をも含み得る圧密の方程式を誘導し、固有値問題の理論を用いて解析解を求めるとともに、その結果から異方性地盤におけるサンドドレーンの設計に有用な圧密度-時間係数曲線を示したものである。

2. 圧密方程式の誘導^{9),10)}

線形弾性体である構造骨格と非圧縮性の間隙水とからなる飽和粘土の圧密過程は、その最終状態を基準にとると次のような Biot の方程式により支配されることがわかる。

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}'}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_i} &= 0 (i=1, 2, 3) \dots\dots\dots(1) \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= -\frac{1}{r_w} \sum_{i,j=1}^3 k_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \dots\dots\dots(2) \end{aligned} \right.$$

ここに、 τ_{ij}' ：有効応力、 u ：(過剰) 間隙水圧、 θ ：体積ひずみ、 r_w ：間隙水の単位体積重量、 k_{ij} ：透水係数、 x_i ：直交座標、 t ：時間

である。ただし、 τ_{ij}' 、 u および θ については最終状態からの差を表わすものとする。線形弾性体の仮定から、

$$\tau_{ij}' = \sum_{k,l=1}^3 D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (i, j=1, 2, 3) \dots\dots\dots(3)$$

なる関係がある。ここに、 D_{ijkl} は弾性定数、 ε_{ij} はひずみであり ($-x_i$)-方向の変位 u_i を用いて

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j=1, 2, 3) \dots\dots\dots(4)$$

と定義される。なお、直応力、直ひずみとも圧縮を正と約束しておく。式 (1)、(2) には、齊次境界条件：

(B_{u0})：変位境界 S_u 上において $u_i=0$ ($i=1, 2, 3$)

($B_{\sigma 0}$)：応力境界 S_σ 上において $T_i=0$ ($i=1, 2, 3$)

(B_{UD})：非排水境界 S_{UD} 上において $\sum k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_j=0$

(B_{D0})：排水境界 S_D 上において $u=0$

が付随している。ここに、 T_i は応力ベクトル、 n_i は外向き単位法線ベクトルであり、また $S_u \cup S_\sigma$ 、 $S_{UD} \cup S_D$ はともに全境界 S に等しい。

式 (3)、(4) を式 (1) に代入し、境界条件 (B_{u0})、($B_{\sigma 0}$) を考慮すると

$$u_i(x) = \int_V U_i(x, X) u(X) dV_X \quad (i=1, 2, 3) \dots\dots\dots(5)$$

なる式を得る。ここに、 $U_i(x, X)$ は点 X に単位の集中間隙水圧 (delta 関数 $\delta(x, X)$) があるとき、点 x に生じる変位を表わす。また、添字 X は積分変数を意味している。式 (5) は、境界条件が齊次である場合の変位が間隙水圧のみに起因していることを示している。

$$\theta(x, X) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} U_i(x, X) \dots\dots\dots(6)$$

と定義すれば、式 (5) より

$$\theta(x) = \int_V \theta(x, X) u(X) dV_X \dots\dots\dots(7)$$

となるが、これを連続の式 (2) に代入することにより、間隙水圧のみで表現した圧密の方程式：

$$\int_V \theta(x, X) \frac{\partial u}{\partial t} (X, t) dV_X = -\frac{1}{r_w} \sum k_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} (x, t) \dots\dots\dots(8)$$

を得る。具体的な境界条件に対し、上式を書き下すには、個々について $\theta(x, X)$ を求めればよい。そこでサンドドレーンを模した境界条件のもとで $\theta(x, X)$ を構

成してみよう。

図-2のように、内径 R_i 、外径 R_0 、高さ H の中空円筒領域を考える。中心線、半径方向にそれぞれ z 軸、 r 軸をとる。境界条件として、 $r=R_i$ で (B_{u0})、(B_{u0})、また $r=R_0$ で (B_{u0})、(B_{UD}) が成立するものとする。間隙水の流れは水平方向のみに生じ、 z -方向の直ひずみ ε_{zz} は

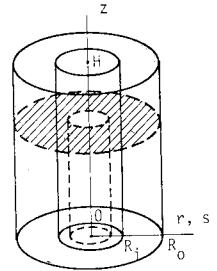


図-2 解析領域

全領域で一様 (等ひずみ条件) とする。したがって、領域の上端面は、 z -方向の変位が一様であると同時に z -方向の合力が零であるような齊次混合境界条件 (B_{H0}) を満足する。

次に応力-ひずみ関係は、 z -方向を成層の軸とするような横等方 (面内等方, transversally isotropic) 弾性¹¹⁾ であり

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx}' \\ \tau_{yy}' \\ \tau_{zz}' \\ \tau_{yz}' \\ \tau_{zx}' \\ \tau_{xy}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_1 - 2c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 - 2c_3 & c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2c_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(9)$$

のように $c_1 \sim c_5$ の独立な弾性定数により表わされるものとする。特に等方性の場合には

$$c_1 = c_3 = \lambda + 2\mu, \quad c_2 = \lambda, \quad c_4 = c_5 = \mu \dots\dots\dots(10)$$

のように Lamé 定数 λ, μ に帰着する。また、ひずみエネルギーの正値性より

$$0 < c_3 < c_1, \quad 0 < c_3, \quad c_4, \quad 0 < (c_1 - c_3)c_3 - c_2^2 \dots\dots\dots(11)$$

なる条件が課せられる。

さて、軸対称等ひずみ条件の場合、独立な座標は r のみであり、式 (8) は

$$\int_{R_i}^{R_0} \theta(r, s) \frac{\partial u}{\partial t} (s, t) ds = -\frac{k}{r_w} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \dots\dots\dots(12)$$

となることが容易にわかる。ここに $\theta(r, s)$ は、 $u = \delta(r, s)$ があるときに生じる体積ひずみ、 k は水平方向の透水係数である。以下、この $\theta(r, s)$ を求める手順について述べる。 $u = \delta(r, s)$ が生じているとき、半径方向のつり合い式と等ひずみ条件より

$$\begin{cases} u_r = -\frac{1}{c_1} \frac{s}{r} H(r, s) + A_s r + B_s \frac{1}{r} \dots\dots\dots(13) \\ u_z = a_s z \dots\dots\dots(14) \end{cases}$$

なる変位と、それに伴う

$$\tau_{rr} = 2 \frac{c_5}{c_1} \frac{s}{r^2} H(r, s) + 2(c_1 - c_3) A_s$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -2c_5B_s \frac{1}{r^2} + c_2a_s \dots\dots\dots(15) \\ \tau_{zz} = \frac{c_1 - c_2}{c_1} \delta(r, s) + 2c_2A_s + c_3a_s \dots\dots(16) \end{array} \right.$$

なる全応力を得る. ここに $H(r, s)$ は Heaviside 関数, A_s, B_s および a_s は s に依存する定数である. これらを決めるには次の齊次境界条件を用いればよい.

$$(B_{\theta 0})\tau_{rr}|_{r=R_i}=0, (B_{u0})u_r|_{r=R_i}=0,$$

$$(B_{H0})\int_{R_i}^{R_0} \tau_{zz} r dr = 0$$

式 (13), (15), (16) をこれらに代入して次式を得る.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{c_1} \frac{s}{R_0} + R_0A_s + \frac{1}{R_0} B_s = 0 \\ 2(c_1 - c_5)A_s - 2c_5 \frac{1}{R_i^2} B_s + c_2a_s = 0 \\ c_2(R_0^2 - R_i^2)A_s + c_3 \frac{R_0^2 - R_i^2}{2} a_s + \frac{c_1 - c_2}{c_1} s = 0 \end{array} \right. \dots\dots\dots(17)$$

一方, 式 (13), (14) より

$$\theta(r, s) = -\frac{1}{c_1} \delta(r, s) + 2A_s + a_s \dots\dots\dots(18)$$

であるので, 式 (17) を解いて上式に代入すると

$$\theta(r, s) = -\frac{1}{c_1} \delta(r, s) + \frac{c}{c_1} \frac{s}{R_0^2} \dots\dots\dots(19)$$

となる. ここに, $n = \frac{R_0}{R_i}$ として

$$c = \frac{2n^2\{(c_1 - c_2)^2 + (n^2 + 1)c_5(c_1 - c_5)\}}{(n^2 - 1)\{n^2c_3c_5 + c_3(c_1 - c_5) - c_2^2\}} \dots\dots(20)$$

とおいた. したがってこの場合, 圧密の方程式 (12) は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c}{R_0^2} \int_{R_i}^{R_0} s \frac{\partial u}{\partial t} \partial s = \frac{kc_1}{\tau_w} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \dots\dots\dots(21)$$

と書き下すことができる. ここで時間係数として $\frac{kc_1 t}{\tau_w R_0^2}$ を改めて t と書き, 上式を無次元化すると

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \int_{1/n}^1 s \frac{\partial u}{\partial t} ds = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \dots\dots(22)$$

となる. この方程式を初期条件とともに排水に関する境界条件 $(B_{D0})u|_{r=1/n}=0, (B_{UD})\frac{\partial u}{\partial r}|_{r=1}=0$ のもとで解けばよい. すなわち, 式 (22) は間隙水圧のみで表わした方程式であって, もはや構造骨格の変形や応力に関する条件は無用である. また, 異方性の影響はすべて c の中に含まれており, 解法の上で異方性は何も考慮する必要はない.

3. 解の構成

(1) 固有値と固有関数

$$u(r, t) = u_\alpha(r) e^{-\tau_\alpha t} \dots\dots\dots(23)$$

のように間隙水圧を r と t の関数の積として式 (22) に代入すると $u_\alpha(r)$ に関する方程式:

$$\frac{d^2 u_\alpha}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_\alpha}{dr} + \eta_\alpha^2 (u_\alpha + cI_\alpha) = 0 \dots\dots\dots(24)$$

を得る. ここで

$$I_\alpha = \int_{1/n}^1 su_\alpha(s) ds \dots\dots\dots(25)$$

とおいたものは, 未知関数 $u_\alpha(r)$ によって定まる未知定数であるが, 式 (24) の中では定数項として扱うことができる. これより一般解は, A, B を任意として

$$u_\alpha(r) = AJ_0(\eta_\alpha r) + BY_0(\eta_\alpha r) - cI_\alpha \dots\dots\dots(26)$$

となる. ここに J_m, Y_m はそれぞれ, 第 1, 2 種の m 次 Bessel 関数とする. 以下, J_m, Y_m を総称して Z_m と書く. $Z_0'(x) = \left(\frac{dZ_0}{dx} \right) = -Z_1(x)$ に注意して, $r=1$

における境界条件 $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$ を考慮すると, 式 (26) は

$$u_\alpha(r) = A \left\{ J_0(\eta_\alpha r) - \frac{J_1(\eta_\alpha)}{Y_1(\eta_\alpha)} Y_1(\eta_\alpha r) \right\} - cI_\alpha \dots\dots\dots(27)$$

となる. さらに $\int xZ_0(x) dx = xZ_1(x)$ に注意して, 上式を式 (25) に代入すると

$$I_\alpha = -\frac{A}{n\eta_\alpha} \frac{J_1\left(\frac{\eta_\alpha}{n}\right) - \frac{J_1(\eta_\alpha)}{Y_1(\eta_\alpha)} Y_1\left(\frac{\eta_\alpha}{n}\right)}{1 + \frac{c(n^2 - 1)}{2n^2}} \dots\dots\dots(28)$$

を得る. 一般性を失うことなく $A=1$ とすれば, 式 (27), (28) より

$$u_\alpha(r) = \left\{ J_0(\eta_\alpha r) - \frac{J_1(\eta_\alpha)}{Y_1(\eta_\alpha)} Y_0(\eta_\alpha r) \right\} + \frac{h}{\eta_\alpha} \left\{ J_1\left(\frac{\eta_\alpha}{n}\right) - \frac{J_1(\eta_\alpha)}{Y_1(\eta_\alpha)} Y_1\left(\frac{\eta_\alpha}{n}\right) \right\} \dots\dots\dots(29)$$

なる解の形が求まる. ここに

$$h = \frac{2cn}{2n^2 + c(n^2 - 1)} \dots\dots\dots(30)$$

とおいた. そして未知の固有値 η_α を定めるためには, $r = \frac{1}{n}$ での境界条件 (B_{u0}) を用いればよい.

$$\frac{S(\eta_\alpha)}{T(\eta_\alpha)} + \frac{h}{\eta_\alpha} = 0 \dots\dots\dots(31)$$

ここに

$$\left\{ \begin{array}{l} S(\eta_\alpha) = J_0\left(\frac{\eta_\alpha}{n}\right) - \frac{J_1(\eta_\alpha)}{Y_1(\eta_\alpha)} Y_0\left(\frac{\eta_\alpha}{n}\right) \\ T(\eta_\alpha) = J_1\left(\frac{\eta_\alpha}{n}\right) - \frac{J_1(\eta_\alpha)}{Y_1(\eta_\alpha)} Y_1\left(\frac{\eta_\alpha}{n}\right) \end{array} \right. \dots\dots(32)$$

とする. 式 (31) を満足する η_α を小さいものから順に η_1, η_2, \dots と定義する. こうして求めた η_α を式 (29) に代入すれば $u_\alpha(r)$ は固有関数となる.

(2) 固有関数の直交性

一般の多次元圧密における固有関数の直交性については、すでに明らかにされている⁹⁾が、以下で行うノルムの計算に対する準備として、この場合について改めて概説しておく。2つの固有関数 $u_\alpha(r)$, $u_\beta(r)$ はそれぞれ

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_\alpha}{dr} \right) + \eta_\alpha^2 (u_\alpha + cI_\alpha) &= 0 \quad \dots\dots (33) \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_\beta}{dr} \right) + \eta_\beta^2 (u_\beta + cI_\beta) &= 0 \quad \dots\dots (34) \end{aligned} \right.$$

を満たしている。両式にそれぞれ ru_β , ru_α を乗じて差をとり、さらに積分すると

$$\begin{aligned} &(\eta_\alpha^2 - \eta_\beta^2) \left\{ \int_{1/n}^1 u_\alpha u_\beta r dr + cI_\alpha I_\beta \right\} \\ &= - \left[r \left(\frac{du_\alpha}{dr} u_\beta - \frac{du_\beta}{dr} u_\alpha \right) \right]_{1/n}^1 \quad \dots\dots (35) \end{aligned}$$

となるが、境界条件を考慮すると右辺は零となる。したがって固有関数の間に、内積：

$$[u_\alpha, u_\beta] = \int_{1/n}^1 u_\alpha u_\beta r dr + cI_\alpha I_\beta \quad \dots\dots (36)$$

を定義すると、 $\eta_\alpha \neq \eta_\beta$ のとき $[u_\alpha, u_\beta] = 0$ となり、この内積について直交していることがわかる。

(3) 固有関数のノルムと解の構成

初期間隙水圧分布 $u_0(r)$ に対する解を

$$u(r, t) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_\alpha u_\alpha(r) e^{-\eta_\alpha^2 t} \quad \dots\dots (37)$$

とおく。 $t=0$ として両辺の u_α に対する内積をとると

$$[u_\alpha, u_0] = a_\alpha [u_\alpha, u_\alpha] \quad \dots\dots (38)$$

となることより、式 (37) は

$$u(r, t) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{[u_\alpha, u_0]}{[u_\alpha, u_\alpha]} u_\alpha(r) e^{-\eta_\alpha^2 t} \quad \dots\dots (39)$$

と書ける。これを具体的に表現するには、固有関数のノルム (の2乗) $[u_\alpha, u_\alpha]$ および初期間隙水圧 $u_0(r)$ との内積 $[u_\alpha, u_0]$ を求めておかなければならない。なお以下では $u_0(r) \equiv 1$ としておく。

まず、 $[u_\alpha, u_\alpha]$ の求め方について述べる。式 (33), (34) において u_α は固有関数、すなわち式 (31) を満たす η_α を式 (29) に代入したものとし、一方、 u_β は単に $\eta_\beta = \eta_\alpha + \varepsilon$ (ε は小) として式 (29) に代入したものとす。このとき、式 (35) は

$$[u_\alpha, u_\beta] = \frac{\left(\frac{du_\alpha}{dr} u_\beta \right) \Big|_{r=1/n}}{n(\eta_\alpha^2 - \eta_\beta^2)} \quad \dots\dots (40)$$

となる。ここで分母、分子をいったん η_β で微分し、 $\eta_\beta \rightarrow \eta_\alpha (\varepsilon \rightarrow 0)$ とすると

$$\begin{aligned} [u_\alpha, u_\alpha] &= - \frac{1}{2n\eta_\alpha} \cdot \frac{du_\alpha}{dr} \Big|_{r=1/n} \\ &\cdot \lim_{\eta_\beta \rightarrow \eta_\alpha} \frac{d}{d\eta_\beta} \left(u_\beta \Big|_{r=1/n} \right) \quad \dots\dots (41) \end{aligned}$$

となる。式 (29), (32) より

$$\frac{du_\alpha}{dr} \Big|_{r=1/n} = -\eta_\alpha T(\eta_\alpha) \quad \dots\dots (42)$$

であり、また

$$u_\beta \left(\frac{1}{n} \right) = S(\eta_\beta) + \frac{h}{\eta_\beta} T(\eta_\beta) \quad \dots\dots (43)$$

であるが $Z_1'(x) = Z_0(x) - \frac{1}{x} Z_1(x)$, $J_{n+1}(x) Y_n(x) - Y_{n+1}(x) J_n(x) = \frac{2}{\pi x}$ に注意して

$$\begin{aligned} \lim_{\eta_\beta \rightarrow \eta_\alpha} \frac{d}{d\eta_\beta} \left(u_\beta \Big|_{r=1/n} \right) &= - \left\{ 1 + \frac{h(h+2n)}{\eta_\alpha^2} \right\} \frac{T(\eta_\alpha)}{n} \\ &+ \frac{2}{\pi \eta_\alpha} \frac{1}{Y_1^2 \left(\frac{\eta_\alpha}{n} \right)} \left\{ Y_0 \left(\frac{\eta_\alpha}{n} \right) + \frac{h}{\eta_\alpha} Y_1 \left(\frac{\eta_\alpha}{n} \right) \right\} \quad \dots\dots (44) \end{aligned}$$

となる。以上を式 (41) に代入して

$$\begin{aligned} [u_\alpha, u_\alpha] &= \frac{T(\eta_\alpha)}{n} \left[\left\{ \frac{1}{\pi \eta_\alpha} \frac{Y_0 \left(\frac{\eta_\alpha}{n} \right)}{Y_1^2(\eta_\alpha)} - \frac{T(\eta_\alpha)}{2n} \right\} \right. \\ &\left. + \frac{h}{\eta_\alpha^2} \left\{ \frac{Y_1 \left(\frac{\eta_\alpha}{n} \right)}{\pi Y_1^2(\eta_\alpha)} - \frac{h+2n}{2n} T(\eta_\alpha) \right\} \right] \quad \dots\dots (45) \end{aligned}$$

を得る。いま、 $c \rightarrow 0$ とすると、式 (30) より $h \rightarrow 0$ となる。このとき、式 (31) より求めた固有値 η_α を上式に代入すると

$$[u_\alpha, u_\alpha] = \frac{2}{\pi^2 \eta_\alpha^2} \left\{ \frac{1}{Y_1^2(\eta_\alpha)} - \frac{1}{Y_0^2 \left(\frac{\eta_\alpha}{n} \right)} \right\} \quad \dots\dots (46)$$

となって、よく知られた熱伝導型の方程式 (式 (22) で $c=0$ とおいたもの) の場合に帰着する。

一方、式 (39) の $[u_\alpha, u_0]$ は、 $u_0 \equiv 1$ とするとき、

$$\begin{aligned} [u_\alpha, u_0] &= \int_{1/n}^1 ru_\alpha dr + cI_\alpha \int_{1/n}^1 r dr \\ &= \int_{1/n}^1 r \{ u_\alpha + cI_\alpha \} dr \quad \dots\dots (47) \end{aligned}$$

であることから、式 (29) あるいは式 (27) を用いれば

$$[u_\alpha, u_0] = - \frac{1}{n\eta_\alpha} T(\eta_\alpha) \quad \dots\dots (48)$$

となることがわかる。

次に、圧密度 $U(t)$:

$$U(t) = 1 - \frac{\int_{1/n}^1 u(r, t) r dr}{\int_{1/n}^1 r dr} \quad \dots\dots (49)$$

を求める。式 (39) に r を乗じて積分すると

$$\int_{1/n}^1 u(r, t) r dr = \sum \frac{[u_\alpha, u_0]}{[u_\alpha, u_\alpha]} \left\{ \int_{1/n}^1 u_\alpha(r) r dr \right\} e^{-\eta_\alpha^2 t} \quad \dots\dots (50)$$

となる。式 (47) より

$$\int_{1/n}^1 u_\alpha(r) r dr = [u_\alpha, u_0] - cI_\alpha \int_{1/n}^1 r dr \dots\dots (51)$$

であるから、これらを式 (49) に代入すれば $U(t)$ が求まる。

なお、等方性の場合について吉国・熊本^{12), 13)}らは、間隙水圧とその平均値の線形結合からなる量が熱伝導型の方程式を満たすことを利用して同様な結果を得ている。

4. 解析例と考察

以上で得られた結果を具体的な数値とするために、式 (22) の定数 n ($= \frac{R_0}{R_i}$) と c を与えなければならない。 c は式 (20) で定義されるように n と 4 個の弾性定数により定まる。議論を簡単にするため、

$$c_1 = \lambda + 2\mu, c_2 = \lambda, c_3 = \mu \dots\dots (52)$$

のように等方性の場合と同じとし、垂直方向の剛性 c_3 が水平方向の β 倍、すなわち

$$c_3 = \beta c_1 \dots\dots (53)$$

なる異方性があるとする。特に $\beta=1$ は等方性にほかならない。また、鉛直応力のみが作用したときの、水平、鉛直方向の直ひずみの比として定義される Poisson 比 ν :

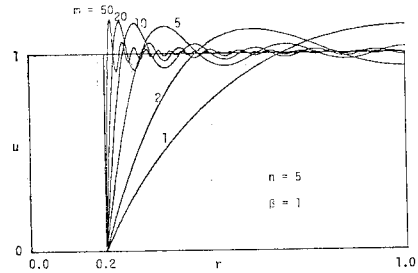
$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \dots\dots (54)$$

を $\frac{1}{3}$ と仮定しておく。すると式 (11) より $\beta > \frac{1}{3}$ となり、式 (20) は

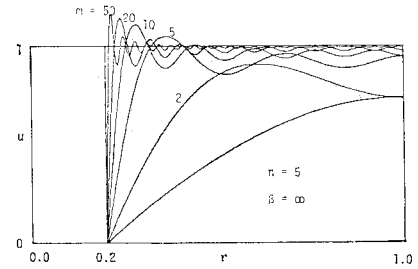
$$c = \frac{2n^2 \{1 - (\beta - 1)(n^2 - 1)\}}{(n^2 - 1) \{\beta(n^2 + 3) - 1\}} \dots\dots (55)$$

と書ける。ここで注意すべきは、 $\beta=1$ のとき必ず正である c が、 $\beta > 1$ のときには負になり得ることである。 c は圧密の方程式 (22) の積分項にかかる係数であるが、その正負はそのまま Mandel-Cryer 効果の正負として反映する。このことから β が大きいほど、圧密がより速く完了することが予想される。なお以下では Barron に従い、時間係数を $\frac{kc_1 t}{\gamma_w (2R_0)^2}$ とする。

解 (式 (39)) の妥当性を検証する 1 つの方法として、初期値 $u_0 \equiv 1$ がどの程度、復元されているかを調べたものが 図-3 である。 $n=5$ とし、 $\beta=1$ (図-3(a)) および $\beta=\infty$ (同 (b)) について、総和の上端 m を増加させたとき、間隙水圧分布がどのように変化するかを示している。Fourier 級数の理論でのいわゆる Gibbs 現象のため、 m を大きくしても $r=0.2$ ($= \frac{1}{n}$) 付近で一樣には初期値に収束しない。そこで $m=50$ とし等時曲線を描いてみると 図-4 のようになる。 $t=0$ と $t=0.0001$ の曲線を比較してみれば、本解析法の固有関数

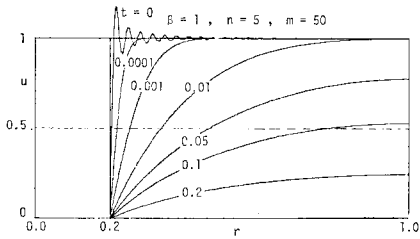


(a) $\beta=1$

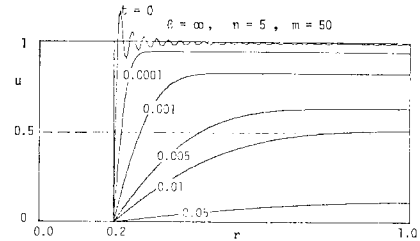


(b) $\beta=\infty$

図-3 項数 m による初期条件の近似度



(a) $\beta=1$

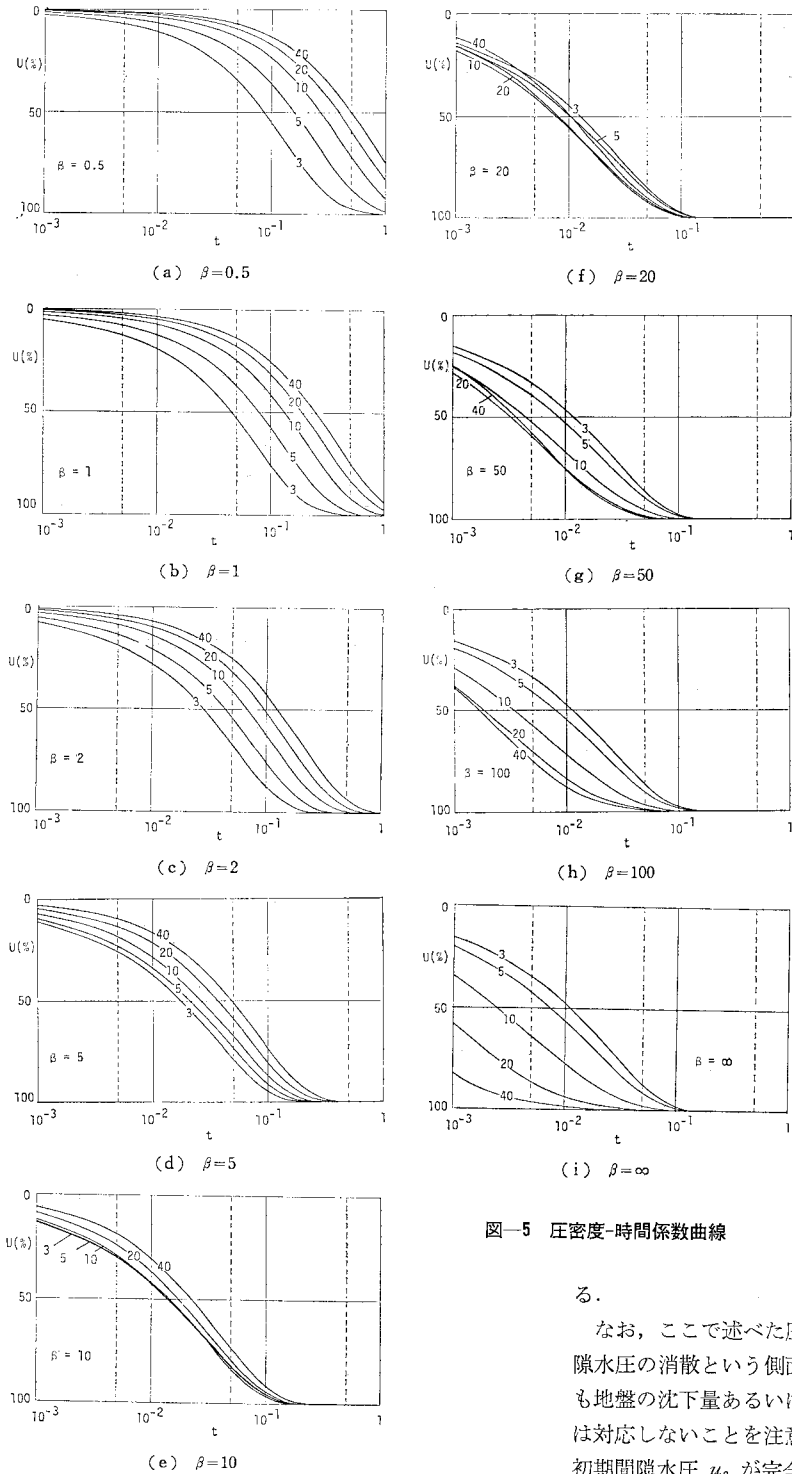


(b) $\beta=\infty$

図-4 等時曲線

系による級数展開が容認できるものと考えられる。なお、 $\beta=\infty$ における等時曲線は、別に行った数値解析結果⁹⁾とほとんど一致している。また、 t がわずかに大きくなれば、高次の固有関数の成分は消散するので、以下の結果では、 $m=20$ とした。

図-5 は、 $\beta=0.5, 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100$ および ∞ であるとき、 n を 3, 5, 10, 20 および 40 とそれぞれ変化させた場合の圧密度-時間係数曲線を示している。このうち、 $\beta=1$ のものは Barron の等ひずみ条件下の結果とよく対応しており、 $\beta=\infty$ のものは別の数値計算



図—5 圧密度-時間係数曲線

結果²⁾とほとんど一致している。さて、 β が0.5から2程度の範囲では、 β が大きいほど鉛直剛性が大きいことより圧密が速く進むといえる。しかも、 n の小さい場合に速くなるという従来の考え方にも一致している。いい

かえるなら、 $\beta=1$ のときの曲線群を左右に平行移動したものと理解できる。ところが、 β が10近くなると単に圧密が速くなるばかりでなく、 n と圧密度の関係に変化がみられる。つまり、 n の小さい曲線群の間の関係から徐々に逆転が始まり、 $\beta=100$ 以上では完全に入れ換わってしまう。たとえば、 $\beta=10$ では $n=3, 5$ および10で、ほとんど1つに重なった曲線となり、 $\beta=20$ では $n=3$ より $n=40$ の方が速く圧密が完了するといえる。特に $\beta=\infty$ でかつ $n=\infty$ とすると瞬時に圧密が完了するようにみることができ。1.で述べたように、これは負のMandel-Cryer効果の影響であるが、 $\beta=\infty$ に至らなくとも $\beta=10 \sim 20$ 程度でこのような逆転が生じることは興味深いことである。むろん、実在の地盤にこのような強い異方性があることはまれであろうが、砂杭の垂直剛性などを加味した場合には、上述のような現象があり得るということに注意しなければならない。つまり、いわゆる等ひずみ条件を仮定する以上、地盤自体の垂直剛性と砂杭等その他の原因によるみかけの垂直剛性との区別をしないことは、ここで述べた解析手法より理解される。

なお、ここで述べた圧密の速さは圧密度すなわち間隙水圧の消散という側面からみたものであって、必ずしも地盤の沈下量あるいは変形の絶対的な速さそのものとは対応しないことを注意しておく。いま一様に分布した初期間隙水圧 u_0 が完全に消散したとすると

$$\rho_v = \frac{u_0}{\mu} \times \frac{n^2 + 1}{4\{\beta(n^2 + 3) - 1\}} \times H \dots\dots\dots(56)$$

$$\rho_r = \frac{u_0}{\mu} \times \frac{(2\beta - 1)(n^2 - 1)}{4\{\beta(n^2 + 3) - 1\}} \times \frac{R_0}{n} \dots\dots\dots(57)$$

なる沈下量 ρ_v と内周の拡大変位 ρ_r が生じる。そこで

たとえば、 $\beta \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ とすると両者とも限りなく小さくなって、圧密変形が瞬時に完了してしまうことが理解されるであろう。

5. 結 論

以上の考察の結果、異方性地盤におけるサンドドレーンの設計に関し、次のような結論が得られた。

(1) 等ひずみ条件のもとでは、地盤の異方性の影響が1つの定数のみに反映され、解析の上では等方性の場合と同じように扱える。

(2) 固有値問題の理論により、間隙水圧のみで表現した圧密の方程式を解くことができる。

(3) 水平方向に対する鉛直方向の剛性の比 β が0.5~2.0の範囲では従来のBarronの方法と同様な設計法が可能である。

(4) しかし、 β が10~20では、負のMandel-Cryer効果により、圧密度と n (=外径/内径)の関係が逆転する。

(5) 粘土自体の異方性のみならず砂杭の剛性などが無視できない場合にも、本研究で述べたような異方性に対する考慮が必要である。

本研究の遂行にあたり、文部省科学研究費総合研究(A)の援助を得た。また数値計算には、京都大学大型計算機センターFACOM M 382を使用した。以上を併記するとともに謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) Barron, R.A. : Consolidation of Fine-grained Soils by Drain Wells, Trans. ASCE, Vol. 113, pp. 811~835, 1948.
- 2) 田村 武 : Biot の圧密方程式に関する一考察, 土木学会論文報告集, 第274号, pp. 57~67, 1978.
- 3) Cryer, C.W. : A Comparison of the Three-dimensional Consolidation Theories of Biot and Terzaghi, Q. Journ. Mech. Appl. Math., Vol. 16, Part 4, pp. 401~414, 1963.
- 4) Mandel, J. : Consolidation des Sols (Étude Mathématique), Géotech., Vol. 3, pp. 287~299, 1953.
- 5) 田村 武 : 異方性粘土の圧密方程式に関する二, 三の考察, 第36回土木学会年次学術講演会概要集(Ⅲ), pp. 132~133, 1981.
- 6) 田村 武 : 異方性粘土における圧密の固有値について, 第17回土質工学研究発表会講演集, pp. 157~160, 1982.
- 7) 村上幸利 : 異方透水性を有する粘土地盤の圧密について, 土木学会論文報告集, 第326号, pp. 73~82, 1982.
- 8) 田村 武 : 異方性を考慮した中空円筒領域の圧密解析, 第37回土木学会年次学術講演会概要集(Ⅲ), pp. 157~158, 1982.
- 9) 田村 武 : 多次元圧密における固有値問題とその応用, 土木学会論文報告集, 第293号, pp. 79~89, 1980.
- 10) 田村 武 : 等ひずみサンドドレーンの固有値による評価, 第35回土木学会年次学術講演会概要集(Ⅲ), pp. 117~118, 1980.
- 11) Lekhnitskii, S.G. : Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body, Holden-Day, 1963.
- 12) Kumamoto, N. and H. Yoshikuni : A Key to Solution of the Irrotational Consolidation and its Application to Cylindrical Clay, Soils and Foundations, Vol. 21, No. 2, pp. 35~46, 1981.
- 13) 吉国 洋・熊本直樹 : 中空円柱の圧密の解, 第17回土質工学研究発表会講演集, pp. 137~140, 1982.

(1982.12.20. 受付)