

多次元非定常 ARMA モデルの同定とスペクトル解析

IDENTIFICATION OF MULTI-DIMENSIONAL NONSTATIONARY
ARMA MODEL AND SPECTRAL ANALYSIS

千葉 利 晃*

By Toshiaki CHIBA

1. ま え が き

自己回帰 (AR) モデル, 移動平均 (MA) モデルあるいは, これら 2 つを結合した自己回帰移動平均 (ARMA) モデル等の時系列モデルは, かなり以前より制御の分野で研究が進められてきた. 土木工学分野では, おもに水文学で研究がなされている. また, 地震工学の分野への応用研究も最近進め始められている. たとえば, 構造物の動特性の推定^{1)~3)}, S 波初動の自動検測⁴⁾, 波動伝達関数の推定への応用⁵⁾, あるいは模擬地震波作成の試み^{6)~8)}等に応用した研究がある.

時系列モデルは時間領域で定式化され, あるシステムからの出力を用いてシステムの同定あるいは制御を行うことができる. したがって, 上記のように幅広い分野で研究が行われているのは当然であり, 今後もまた研究が継続されていくものと思う.

ところで, 構造物の動特性を推定するにしろ, 他の応用を考えるにしろ, 時系列モデルを考える場合には, 係数の推定がまず必要となる. また, 多入力多出力の問題あるいは非定常特性を考える場合には, 多次元でかつ非定常なモデルが必要である. この多次元非定常確率過程モデルとしては, 先に AR モデルあるいは MA モデルであてはめた研究を星谷とともに発表した¹⁰⁾.

MA モデルは精度の面で問題が残るが, AR モデルの場合, 次数を十分大きくとりさえすれば十分な精度で任意の時系列を表現できる. また地震加速度波形の特性解析に応用する場合には, AR モデルの次数はそれほど大きくとらなくても支障がないことを先の報告で示した.

このように, AR モデルの同定は比較的容易でもあり, 実用的価値は高い. しかしながら, できるだけ少ない数のパラメーターで表示できるモデルであると同時に, 対象として取り上げる現象の時系列の生成機構を表現でき

るモデルが望ましい. この観点より, ARMA モデルを採用するのがより妥当であろう.

したがって, 本研究は先の研究の延長線上に位置付け, 多次元非定常確率過程を自己回帰移動平均 (ARMA) モデルであてはめることを試みたものである. 係数の推定を行うために, Gersch ほかが提案した二段階最小二乗法¹⁾を多次元非定常問題に適用できるように拡張している. この方法は, 後述するように出力の情報のみより ARMA モデルの同定 (係数の推定) ができるという特徴を有するので, 広い分野での応用が可能である. なお, この同定法については, 文献 9) にほぼ同一の手法を用いたものが示されている. これについては後で若干考察を加えることにする. なお応用として, シミュレーション法および非定常相互スペクトル解析法についても考察した.

数値計算例としては, 三方向成分波を有する実地震加速度記録を用いて解析を行い, 本報告で示す係数の推定法, シミュレーション法および非定常相互スペクトル解析法の妥当性を検討した.

時系列を AR モデルであてはめた方がよいか, あるいは ARMA モデルであてはめた方がよいかは, 適用分野におけるそれぞれの目的により異なる¹¹⁾. しかしながら, 先の研究¹⁰⁾あるいは本報告で述べる ARMA モデルは最も一般的な多次元非定常モデル (定常あるいは一次元モデルも特殊な場合として含まれる) であるから, これらの AR あるいは ARMA モデルを目的に応じて用いることにより, システムの同定, 予測あるいは制御等幅広い分野の解析が可能である.

2. 多次元非定常 ARMA モデル

平均値 0 の多次元非定常確率過程 $x_i(t) : i=1, 2, \dots, m$ に対する多次元非定常自己回帰移動平均 (ARMA) モデルを次式で定義する.

* 正会員 M.S. 武蔵工業大学講師

$$\begin{aligned}
 x_i(j) = & \sum_{\rho=1}^m \sum_{k=1}^{M(j)} b_{i\rho}(k, j) x_{\rho}(j-k) \\
 & + \sum_{\rho=1}^m \sum_{k=1}^{L(j)} h_{i\rho}(k, j) a_{\rho}(j-k) + a_i(j) \\
 & \dots\dots\dots(1) \\
 & i=1, 2, \dots, m
 \end{aligned}$$

$x_i(j)$ は離散型の m 次元確率過程 (m 次元 ARMA 過程) を表わし, $a_i(j)$ が入力したときのフィルター出力となっている. dt を離散時間間隔とすれば, j は離散時刻 $jdt: j=1, 2, \dots$ を表わす指標であり, $a_i(j); i=1, 2, \dots, m$ は後で考察するが, 平均値 0, 時刻が異なる場合には互いに独立で同一時刻では分散 $\sigma_{p_q^2}(j) = E[a_p(j)a_q(j)]$ をもつ帯域ホワイトノイズである.

係数 $b_{i\rho}(k, j)$ および $h_{i\rho}(k, j)$ は文献 1), 2) と同様に, ある時刻 jdt での $a_i(j)$ の二乗平均値の和 $\sum_{i=1}^m E[a_i^2(j)]$ を最小とするように決定する. 式(1)より,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^m E[a_i^2(j)] = & \sum_{i=1}^m E \left[\left\{ x_i(j) - \sum_{\rho=1}^m \sum_{k=1}^{M(j)} b_{i\rho}(k, j) \right. \right. \\
 & \left. \left. \cdot x_{\rho}(j-k) - \sum_{\rho=1}^m \sum_{k=1}^{L(j)} h_{i\rho}(k, j) a_{\rho}(j-k) \right\}^2 \right] \\
 & \dots\dots\dots(2)
 \end{aligned}$$

したがって, j を固定し式 (2) を $b_{nq}(l, j)$ および $h_{nq}(l, j)$ で偏微分し 0 に等値すれば次の 2 式を得る.

$$\begin{aligned}
 E[x_n(j)x_q(j-l)] & \\
 = & \sum_{\rho=1}^m \sum_{k=1}^{M(j)} b_{n\rho}(k, j) E[x_{\rho}(j-k)x_q(j-l)] \\
 & + \sum_{\rho=1}^m \sum_{k=1}^{L(j)} h_{n\rho}(k, j) E[a_{\rho}(j-k)x_q(j-l)] \\
 & \dots\dots\dots(3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E[x_n(j)a_q(j-l')] & \\
 = & \sum_{\rho=1}^m \sum_{k=1}^{M(j)} b_{n\rho}(k, j) E[x_{\rho}(j-k)a_q(j-l')] \\
 & + \sum_{\rho=1}^m \sum_{k=1}^{L(j)} h_{n\rho}(k, j) E[a_{\rho}(j-k)a_q(j-l')] \\
 & \dots\dots\dots(4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n=1, 2, \dots, m \quad q=1, 2, \dots, m \\
 l=1, 2, \dots, M(j) \quad l'=1, 2, \dots, L(j)
 \end{aligned}$$

$x_i(j), i=1, 2, \dots, m$ を観測波として用いて式 (3), (4) より係数 $b_{i\rho}(k, j), h_{i\rho}(k, j)$ を求めることが主眼であるが, この段階では $E[a_{\rho}(j-k)x_q(j-l)]$ 等が与えられていないので, このままでは解くことができない. まず, 式 (3) の x の相互相関関数は N' を正の整数とし, $(j-N')dt \leq t \leq (j+N')dt$ 区間で $x_i(j)$ は区間定常と仮定すれば, 次のような推定式で集合平均 $E[\cdot]$ を計算することができる. たとえば $E[x_n(j) \cdot x_q(j-l)]$ は次式より値を求めることができる.

$$\begin{aligned}
 E[x_n(j)x_q(j-l)] = & \frac{1}{2N'} \sum_{s=j-N'}^{j+N'} x_n(s)x_q(s-l) \\
 & \dots\dots\dots(5)
 \end{aligned}$$

ところで, 観測値は $x_i(j)$ のみで $a_{\rho}(j)$ は観測されていない入力であるから, 上記のような推定式で $x_i(j)$ と $a_{\rho}(j)$ との相互相関関数を求めることはできない. そこで, Gersch ほかの提案した二段階最小二乗法りを多次元非定常問題に適用できるように拡張し, $x_i(j)$ と $a_{\rho}(j)$ の相互相関関数を求めることにする.

まず観測値 $x_i(j)$ に AR 過程を適用し, AR 係数である $\tilde{b}_{i\rho}(k, j)$ を推定する. この AR モデルは文献 10) のモデルを若干修正し次式で与えられるものとする.

$$\begin{aligned}
 x_i(j) = & \sum_{\rho=1}^m \sum_{k=1}^{M(j)} \tilde{b}_{i\rho}(k, j) x_{\rho}(j-k) + a_i(j) \\
 & \dots\dots\dots(6) \\
 & i=1, 2, \dots, m
 \end{aligned}$$

文献 10) のモデルでは式 (6) の右辺の $\sum_{\rho=1}^m$ が $\sum_{\rho=1}^i$ となっている. 両者の違いはこれだけであるから, 式 (6) の係数 $\tilde{b}_{i\rho}(k, j)$ は文献 10) に示した推定方法を若干修正するのみで簡単に推定することができる. 一方, 同じ観測波 $x_i(j)$ は次に示す多次元非定常 MA モデルで表わすことができる.

$$\begin{aligned}
 x_i(j) = & \sum_{\rho=1}^m \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{h}_{i\rho}(k, j) a_{\rho}(j-k) \dots\dots\dots(7) \\
 & i=1, 2, \dots, m \\
 \tilde{h}_{i\rho}(0, j) = & \begin{cases} 1; & i = \rho \\ 0; & i \neq \rho \end{cases}
 \end{aligned}$$

M 次の AR モデルは無限大の次数の MA モデルで表現できる. したがって, 式 (6) を \tilde{b} の関数を係数とする MA モデルに変形し, この係数と式 (7) の係数 \tilde{h} を等値することにより, 係数 \tilde{h} を係数 \tilde{b} で表わすことができる. これを実行し, 漸化式の形で整理すれば次式が得られる.

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}_{i\rho}(k, j) = & \sum_{q=\rho}^m \sum_{l=1}^{M(j)} \tilde{b}_{iq}(l, j) \tilde{h}_{q\rho}(k-l, j-l) \\
 & \dots\dots\dots(8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i=1, 2, \dots, m \quad \rho=1, 2, \dots, m \quad k=1, 2, 3, \dots \\
 \tilde{h}_{q\rho}(k-l, j) = 0; \quad k < l \\
 \tilde{h}_{q\rho}(0, j) = \begin{cases} 1; & q = \rho \\ 0; & q \neq \rho \end{cases}
 \end{aligned}$$

式 (8) は多次元で非定常な場合の漸化式である. 一次元非定常の場合には, $m=1$ であり添字 i, ρ は不要となるから次式で表わせる.

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}(k, j) = & \sum_{l=1}^{M(j)} \tilde{b}(l, j) \tilde{h}(k-l, j-l) \dots\dots\dots(9)
 \end{aligned}$$

一次元定常の場合には,

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}(k) = & \sum_{l=1}^M \tilde{b}(l) \tilde{h}(k-l) \dots\dots\dots(10)
 \end{aligned}$$

上記式 (10) は Gersch ほかの示している漸化式に等しい.

式 (8) より MA 係数の \tilde{h} が AR モデルの係数 \tilde{b}

の関数として求められるから、式 (3) 中の相互相関関数 $E[a_p(j-k)x_q(j-l)]$ は次のようにして求めることができる。式 (7) の両辺に $a_p(j-k)$ を乗じ両辺の期待値をとる。式 (4) を満足するとき、 $E[a_i(j)a_q(j-v)] = 0$; $v=1, 2, \dots$ であるから、

$$E[a_p(j-k)x_q(j-l)] = E\left[a_p(j-k) \sum_{p'=1}^m \sum_{k'=0}^{\infty} \tilde{h}_{qp'}(k', j-l) \cdot a_{p'}(j-l-k')\right] = \sum_{p'=1}^m \tilde{h}_{qp'}(k-l, j-l) \tilde{\sigma}_{pp'}^2(j-k) \dots\dots(11)$$

ここで、 $\tilde{\sigma}_{pp'}^2(j-k) = E[a_p(j-k)a_{p'}(j-k)]$. 同様にして、式 (4) 中の相互相関関数も求めることができる。なお、式 (11) の a の相互相関関数 $\tilde{\sigma}_{pp'}^2(j-k)$ としては、第一段階予測としての AR モデルより求められる a の相互相関関数を推定値として用いればよい。求め方の詳細は文献 10) を参照していただきたい。

上記 x と a の相互相関関数と式 (5) で表わした x の相互相関関数を式 (3) および式 (4) に代入し、マトリックスの形に整理すれば、式 (3) および式 (4) は次のように表わせる。

$$\begin{bmatrix} f_{n1} \\ f_{n2} \\ \vdots \\ f_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{21} & \dots & X_{m1} \\ X_{12} & X_{22} & \dots & X_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{1m} & X_{2m} & \dots & X_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{n1} \\ b_{n2} \\ \vdots \\ b_{nm} \end{bmatrix} + 2N' \begin{bmatrix} \tilde{H}_{11} & \tilde{H}_{12} & \dots & \tilde{H}_{1m} \\ \tilde{H}_{21} & \tilde{H}_{22} & \dots & \tilde{H}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{H}_{m1} & \tilde{H}_{m2} & \dots & \tilde{H}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{11} & \tilde{\sigma}_{21} & \dots & \tilde{\sigma}_{m1} \\ \tilde{\sigma}_{12} & \tilde{\sigma}_{22} & \dots & \tilde{\sigma}_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\sigma}_{1m} & \tilde{\sigma}_{2m} & \dots & \tilde{\sigma}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{n1} \\ h_{n2} \\ \vdots \\ h_{nm} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(12)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{h}_{n1} \\ \tilde{h}_{n2} \\ \vdots \\ \tilde{h}_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{H}_{11} & \tilde{H}_{12} & \dots & \tilde{H}_{1m} \\ \tilde{H}_{21} & \tilde{H}_{22} & \dots & \tilde{H}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{H}_{m1} & \tilde{H}_{m2} & \dots & \tilde{H}_{mm} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b_{n1} \\ b_{n2} \\ \vdots \\ b_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{n1} \\ h_{n2} \\ \vdots \\ h_{nm} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(13)$$

ここで T は転置を意味し、 f, X, b 等はすべて時刻 jdt の値を表わす。また、 $M(j)=M, L(j)=L$ と記せば、

$$f_{nq} = \sum_{s=j-N'}^{j+N'} [x_n(s)x_q(s-1), x_n(s)x_q(s-2), \dots, x_n(s)x_q(s-M)]^T$$

$$b_{np} = [b_{np}(1, j), b_{np}(2, j), \dots, b_{np}(M, j)]^T$$

$$h_{np} = [h_{np}(1, j), h_{np}(2, j), \dots, h_{np}(L, j)]^T$$

$$\tilde{h}_{nq} = [\tilde{h}_{nq}(1, j), \tilde{h}_{nq}(2, j), \dots, \tilde{h}_{nq}(L, j)]^T$$

$$X_{pq} = \sum_{s=j-N'}^{j+N'} \dots$$

$$\tilde{H}_{qp} = \begin{bmatrix} x_p(s-1)x_q(s-1) & x_p(s-2)x_q(s-1) & \dots \\ x_p(s-1)x_q(s-2) & x_p(s-2)x_q(s-2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ x_p(s-1)x_q(s-M) & x_p(s-2)x_q(s-M) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ x_p(s-M)x_q(s-1) \\ x_p(s-M)x_q(s-2) \\ \vdots \\ x_p(s-M)x_q(s-M) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\sigma}_{pq} = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{pq}^2(j-1) & & & 0 \\ & \tilde{\sigma}_{pq}^2(j-2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \tilde{\sigma}_{pq}^2(j-L) \end{bmatrix}$$

したがって、係数 $b_{ip}(k, j)$ および $h_{ip}(k, j)$ は上記式 (12) および式 (13) より求めることができる。

以上多次元非定常 ARMA モデルの係数の推定法について述べてきたが、土岐・佐藤ら⁹⁾も同じ二段階最小二乗法を用いて係数を推定している。土岐・佐藤らはまず、多次元定常理論を導き、非定常性は時系列に長方形ウィンドウを乗じこのデータ列に多次元定常理論を用いることにより非定常性を表現している。一方、本報告における推定法は時系列を非定常なものとして理論を展開し、途中、相互相関関数を求める必要上その部分にのみ区間定常性を仮定している。したがって、非定常時系列を扱う場合には、本報告による方がより妥当な結果を得られるのではないかと思われる。

次にシミュレーション法について考える。係数 $b_{ip}(k, j)$ および $h_{ip}(k, j)$ を求めた後シミュレーションを行うには、入力 $a_i(j)$ を作成する必要がある。これには文献 10) に示した次式を考える。

$$a(j) = \begin{bmatrix} a_1(j) \\ a_2(j) \\ \vdots \\ a_m(j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}(j) & & & 0 \\ C_{21}(j) & C_{22}(j) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ C_{m1}(j) & C_{m2}(j) & \dots & C_{mm}(j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(j) \\ \xi_2(j) \\ \vdots \\ \xi_m(j) \end{bmatrix} = C(j) \cdot \xi(j) \dots\dots\dots(14)$$

ここで、 $\xi_i(j)$ は平均値 0、分散 1 の互いに独立な乱数である。すなわち、 $a(j)$ は乱数 $\xi_i(j)$ が線形変換マトリックス $C(j)$ を通った出力となっている。式 (14) より $E[a(j)a^T(j)] = C(j)C^T(j)$ となるから、入力 $a_i(j)$ の共分散マトリックス $\sigma(j)$ すなわち、 $\sigma(j) = E[a(j)a^T(j)]$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2(j) & \sigma_{12}^2(j) & \cdots & \sigma_{1m}^2(j) \\ \sigma_{21}^2(j) & \sigma_{22}^2(j) & \cdots & \sigma_{2m}^2(j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1}^2(j) & \sigma_{m2}^2(j) & \cdots & \sigma_{mm}^2(j) \end{bmatrix} \cdots \cdots (15)$$

を求めることができれば、これを三角分解することにより線形変換マトリックス $C(j)$ を求めることができる。したがって、入力の値 $a_i(j)$ は式 (14) を用いて作成することができる。

さて、式 (15) の共分散マトリックス $\sigma(j)$ の要素 $\sigma_{iq}^2(j)$ は式 (1) より、

$$\begin{aligned} \sigma_{iq}^2(j) &= E[a_i(j)a_q(j)] \\ &= E \left[\left\{ x_i(j) - \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^{M(j)} b_{ip}(k, j)x_p(j-k) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^{L(j)} h_{ip}(k, j)a_p(j-k) \right\} \right. \\ &\quad \cdot \left\{ x_q(j) - \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^{M(j)} b_{qp}(k, j)x_p(j-k) \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^{L(j)} h_{qp}(k, j)a_p(j-k) \right\} \right] \cdots \cdots (16) \end{aligned}$$

式 (16) の右辺の期待値、すなわち x と a 等の相互相関関数を式 (5) および式 (11) と同様に考えて求めれば、式 (16) は次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_{iq}^2(j) &= \frac{1}{2N'} \sum_{s=j-N'}^{j+N'} \left\{ x_i(s) - \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^{M(j)} b_{ip}(k, s) \right. \\ &\quad \cdot x_p(s-k) \left. \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ x_q(s) - \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^{M(j)} b_{qp}(k, s)x_p(s-k) \right\} \\ &+ \sum_{p=1}^m \sum_{p'=1}^m \sum_{k=1}^{L(j)} \left[\bar{\sigma}_{pp'}^2(j-k') \{ h_{ip}(k', j) \right. \\ &\quad \cdot h_{qp'}(k', j) - h_{qp}(k', j)\bar{h}_{ip'}(k', j) \\ &\quad \left. - h_{ip}(k', j)\bar{h}_{qp'}(k', j) \right] \\ &+ \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^{M(j)} \left[\bar{\sigma}_{pp'}^2(j-k') \bar{h}_{pp'}(k'-k, j-k) \right. \\ &\quad \cdot \{ b_{ip}(k, j)h_{qp'}(k', j) \\ &\quad \left. + b_{qp}(k, j)h_{ip'}(k', j) \right] \cdots \cdots (17) \end{aligned}$$

式 (17) の誘導において、 j と s が近い値をとるときには、 $b_{ip}(k, j) \cong b_{ip}(k, s)$ 、 $h_{ip}(k, j) \cong h_{ip}(k, s)$ と考えている。地震加速度波形等に適用する場合には、その非定常特性は時間とともに緩やかに変化する性質を有するので、 j と s が近い値をとるときには係数もまたほぼ同一の値をとるものとみなすことができる^{12), 13)}。したがって、上記仮定を用いても妥当と思う。

以上で係数 $b_{ip}(k, j)$ 、 $h_{ip}(k, j)$ および入力 $a_i(j)$ が求まったので、式 (1) より $x_i(j)$ を求めることができる。このときの $x_i(j)$ の初期値は $x_i(j)=0$; $j \leq 0$ とすればよい。

3. 非定常相互スペクトル

文献 13) に従い多次元非定常確率過程の非定常相互スペクトルは次式で表わされるものとする。

$$S_{pq}(\omega, t) = E \left[\frac{1}{2\pi} X_p(\omega, t) X_q^*(\omega, t) \right] \cdots (18)$$

$$-\infty < \omega < \infty \quad -\infty < t < \infty$$

$$p=1, 2, \dots, m \quad q=1, 2, \dots, m$$

ここで、* は共役複素数を表わし、また

$$X_p(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} W(t-u)x_p(u)e^{-i\omega u} du; i^2 = -1 \cdots \cdots (19)$$

$W(\cdot)$ はウィンドウ関数を表わし次式を満足するものとする。

$$\int_{-\infty}^{\infty} W^2(t) dt = 1 \cdots \cdots (20)$$

式 (1) の両辺に重み付きフーリエ変換を施せば、

$$\begin{aligned} X_p(\omega, j) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} W(j-l)x_p(l)e^{-i\omega l} \cdot \Delta t \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} W(j-l) \left\{ \sum_{r=1}^m \sum_{k=1}^{M(j)} b_{pr}(k, l)x_r(l-k) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=1}^m \sum_{k=1}^{L(j)} h_{pr}(k, l)a_r(l-k) \right. \\ &\quad \left. + a_p(l) \right\} \cdot e^{-i\omega l} \cdot \Delta t \cdots \cdots (21) \end{aligned}$$

ここで、式 (17) を導いたときと同様に j と l が近い値をとるときには $b_{pr}(k, j) \cong b_{pr}(k, l)$ 、 $h_{pr}(k, j) \cong h_{pr}(k, l)$ とし、変数変換を行った後マトリックスの形に整理すれば次式を得る。

$$D(\omega, j)x(\omega, j) = G(\omega, j)e(\omega, j) \cdots \cdots (22)$$

ここで、

$$x(\omega, j) = [X_1(\omega, j) X_2(\omega, j) \cdots X_m(\omega, j)]^T$$

$$e(\omega, j) = [A_1(\omega, j) A_2(\omega, j) \cdots A_m(\omega, j)]^T$$

$$D(\omega, j) = I - \sum_{k=1}^{M(j)} e^{-i\omega k \Delta t} \begin{bmatrix} b_{11}(k, j) & b_{12}(k, j) & \cdots & b_{1m}(k, j) \\ b_{21}(k, j) & b_{22}(k, j) & \cdots & b_{2m}(k, j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}(k, j) & b_{m2}(k, j) & \cdots & b_{mm}(k, j) \end{bmatrix}$$

$$G(\omega, j) = I + \sum_{k=1}^{L(j)} e^{-i\omega k \Delta t} \begin{bmatrix} h_{11}(k, j) & h_{12}(k, j) & \cdots & h_{1m}(k, j) \\ h_{21}(k, j) & h_{22}(k, j) & \cdots & h_{2m}(k, j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1}(k, j) & h_{m2}(k, j) & \cdots & h_{mm}(k, j) \end{bmatrix}$$

I = 単位マトリックス

$$X_p(\omega, j) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} W(j-s-k)x_p(s)e^{-i\omega s \Delta t} \Delta t$$

$$\cong \sum_{s=-\infty}^{\infty} W(j-s)x_p(s)e^{-i\omega s \Delta t} \Delta t \cdots \cdots (23)$$

$$A_p(\omega, j) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} W(j-s-k) a_p(s) e^{-i\omega s \Delta t} \Delta t$$

$$\cong \sum_{s=-\infty}^{\infty} W(j-s) a_p(s) e^{-i\omega s \Delta t} \Delta t \dots\dots(24)$$

式 (22) より,

$$D(\omega, j) E \left[\frac{1}{2\pi} \mathbf{x}(\omega, j) \mathbf{x}^{*T}(\omega, j) \right] \mathbf{D}^{*T}(\omega, j)$$

$$= \mathbf{G}(\omega, j) E \left[\frac{1}{2\pi} \mathbf{e}(\omega, j) \mathbf{e}^{*T}(\omega, j) \right] \mathbf{G}^{*T}(\omega, j)$$

.....(25)

非定常相互スペクトルの定義式 (18) より, 式 (25) は次のように表わせる。

$$\mathbf{S}_x(\omega, j) = \mathbf{D}^{-1}(\omega, j) \mathbf{G}(\omega, j) \mathbf{S}_a(\omega, j) \cdot \mathbf{G}^{*T}(\omega, j) \{\mathbf{D}^{*T}(\omega, j)\}^{-1} \dots\dots(26)$$

ここで,

$$\mathbf{S}_x(\omega, j) = \begin{bmatrix} S_{11}(\omega, j) & S_{12}(\omega, j) & \dots & S_{1m}(\omega, j) \\ S_{21}(\omega, j) & S_{22}(\omega, j) & \dots & S_{2m}(\omega, j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{m1}(\omega, j) & S_{m2}(\omega, j) & \dots & S_{mm}(\omega, j) \end{bmatrix}$$

.....(27)

$$\mathbf{S}_a(\omega, j) = \frac{1}{2\pi} E [\mathbf{e}(\omega, j) \mathbf{e}^{*T}(\omega, j)]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \begin{bmatrix} E[A_1(\omega, j) A_1^*(\omega, j)] \\ E[A_2(\omega, j) A_1^*(\omega, j)] \\ \vdots \\ E[A_m(\omega, j) A_1^*(\omega, j)] \\ E[A_1(\omega, j) A_2^*(\omega, j)] \dots \\ E[A_2(\omega, j) A_2^*(\omega, j)] \dots \\ \vdots \\ E[A_m(\omega, j) A_2^*(\omega, j)] \dots \\ E[A_1(\omega, j) A_m^*(\omega, j)] \\ E[A_2(\omega, j) A_m^*(\omega, j)] \\ \vdots \\ E[A_m(\omega, j) A_m^*(\omega, j)] \end{bmatrix}$$

.....(28)

ところで, 式 (24) より

$$E[A_p(\omega, j) A_q^*(\omega, j)] = E \left[\left\{ \sum_{s=-\infty}^{\infty} W(j-s) a_p(s) e^{-i\omega s \Delta t} \right\} \cdot \left\{ \sum_{s=-\infty}^{\infty} W(j-s) a_q(s) e^{-i\omega s \Delta t} \right\}^* \right] \dots\dots(29)$$

s と r が異なるときには, $E[a_p(s) a_q(r)] = 0$ であり, $\sigma_{pq}^2(s) = E[a_p(s) a_q(s)]$ は s の変化に伴い緩やかに変化するものとして, j と s が近い値をとるときには $\sigma_{pq}^2(j) \cong \sigma_{pq}^2(s)$ とみなす。また, 式 (20) の関係を用いれば式 (28) の要素 $E[A_p(\omega, j) A_q^*(\omega, j)]$ は次のように表わせる。

$$E[A_p(\omega, j) A_q^*(\omega, j)] = \sigma_{pq}^2(j) \Delta t \dots\dots(30)$$

したがって, 多次元非定常確率過程の相互スペクトルは次式で表わせる。

$$\mathbf{S}_x(\omega, j) = \frac{\Delta t}{2\pi} \mathbf{D}^{-1}(\omega, j) \mathbf{G}(\omega, j) \boldsymbol{\sigma}(j)$$

$$\cdot \mathbf{G}^{*T}(\omega, j) \{\mathbf{D}^{*T}(\omega, j)\}^{-1} \dots\dots(31)$$

ここで, $\boldsymbol{\sigma}(j)$ は式 (15) で与えられる。

なお, コヒーレンス関数 $r_{pq}^2(\omega, j)$ および位相角 $\theta_{pq}(\omega, j)$ は次式によって表わせる。

$$r_{pq}^2(\omega, j) = \frac{|S_{pq}(\omega, j)|^2}{S_{pp}(\omega, j) S_{qq}(\omega, j)} \dots\dots(32)$$

$$\theta_{pq}(\omega, j) = \tan^{-1} \left\{ \frac{Q_{pq}(\omega, j)}{C_{pq}(\omega, j)} \right\} \dots\dots(33)$$

ここで, $C_{pq}(\omega, j)$ および $Q_{pq}(\omega, j)$ はそれぞれ $S_{pq}(\omega, j)$ の実部および虚部である。

4. 数値計算例および考察

(1) モデル検証のための数値計算

2. で述べた ARMA モデルの検証, すなわち係数 $b_{ip}(k, j)$ および $h_{ip}(k, j)$ の推定あるいはシミュレーション法が精度よく行われるかどうかの検証を, 非定常な特性が明確な波形を再現することにより行った。

その波形は参考文献 12) による調和関数型モデルを使用して作成した。非定常スペクトルモデルは, ある着目時刻のスペクトルがガウス分布に従うものとし, その標準偏差は 1 Hz とした。また, 上記スペクトルの中心周波数は 0 から 8 秒までは 7 Hz で一定, 8~12 秒までは 7 Hz より 2 Hz まで直線的に変化し, 12 秒より 20 秒までは 2 Hz で一定となるようにモデル化を行った。

上記スペクトルモデルを用いて作成した波形をもとにして, 式 (12) および (13) より係数 $b_{ip}(k, j)$ および $h_{ip}(k, j)$ を推定し式 (14) より入力 $a_i(j)$ を求めた後, 式 (1) によりシミュレーションすなわち波形の創成を行った。以上の解析および 4. (2) の解析においては, すべて $M(j) = 2 = \text{一定}$, $L(j) = 1 = \text{一定}$, 波形の時間刻みは 0.04 秒とし, 0.4 秒おきに時刻 $j\Delta t$ を固定して計算を行っている。また, N' は 40 としている。すなわち, 約 3.2 秒間のデータを定常と考えて解析を行ったものである。これらの設定値は文献 10) の結果を参考にし, かつ若干の数値計算を行って決定した。なお, これらの設定値の値を多少変化させてもシミュレーション結果にほとんど影響は現われず, 安定したモデルであることを示した。

このようにして同定した係数を図-1 に示す。なお,

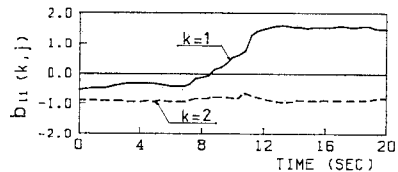


図-1 調和関数型モデルによる作成波形の係数 $b_{11}(k, j)$

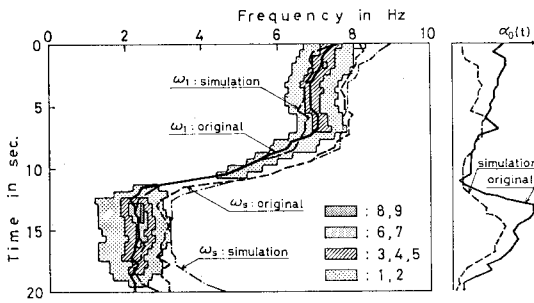


図-2 調和関数型モデルによる作成波形とシミュレーション波形の非定常スペクトル

係数 $h_{ip}(k, j)$ は非常に小さな値であるから図は省略した。この図より係数 b の特徴がきわめてよく理解できる。すなわち、高周波数成分よりなる前半部の係数 $b_{11}(1, j)$ は負の値をとり、低周波数成分よりなる後半部の係数 $b_{11}(1, j)$ は正の値となることわかる。この結果は AR モデルにおける係数ともよく対応する。

図-2 は調和関数型モデルにより作成した波形 (original) のスペクトルおよび ARMA モデルによる創成波 (simulation) のスペクトル・パラメーター $\omega_1(t)$, $\omega_s(t)$ および $\alpha_0(t)$ を示したものである。 $\omega_1(t)$ はスペクトルの重心を、 $\omega_s(t)$ は $\omega_1(t)$ に関するスペクトルの回転二次半径であり、スペクトルのばらつきを表わす。また $\alpha_0(t)$ は時刻 t でのスペクトルの面積であり形状関数に対応する。これらのスペクトル・パラメーターの表記および解析法は文献 14) に従った。なお、スペクトルの表示は最大スペクトルで正規化し、これを 10 等分した後小さい方より 0, 1, 2, ..., 9 と段階表示したものであり、白地は 0 を表わす。後述のコヒーレンスの表示法もこれに準じて表わしている。また、 $\alpha_0(t)$ は最大値で正規化して表わしたものである。ただし、図-2 に示す創成波の $\alpha_0(t)$ はもとの波形 (original) の $\alpha_0(t)$ の最大値で正規化したものを示している。図-2 をみると、0~5 秒までと 12 秒以降の創成波のスペクトルはもとの波形のスペクトルよりやや広がりのあるスペクトルになっている。しかしながら、両者のスペクトルの特徴はきわめてよく類似しているといえよう。すなわち、創成波はもとの波形の非定常特性をよくとらえた波形であることがわかる。また、図-2 より類推できることではあるが、創成波を用いて求めた係数は時刻の最初と最後の 1~2 秒間において図-1 に示した係数と若干の相違はあるが、他はほぼ同一の係数となっている。したがって、本報告で示した係数の推定法およびシミュレーション法の妥当性が精度上の面からも示されたものと思う。

(2) 実地震波への適用例

実地震波への適用例として、1971 年 2 月 9 日のサンフ

エルナンド地震の際にカルフォルニア工科大学ミリカン図書館の地階で観測された水平二方向、垂直一方向の合計三方向の加速度波形¹⁵⁾ (図-3) を使用して解析を行った。なお、この加速度記録は 0.04 秒間隔に離散化されている。

この三方向加速度波形を用いて推定した係数 $b_{ip}(k, j)$ の一例を 図-4 に、シミュレーション波形 (再現波形) を 図-5 に示す。周波数領域におけるスペクトル解析と本手法によるスペクトル解析の比較のために、原波形の EW 成分の Physical スペクトル¹²⁾ (周波数領域における解析) を 図-6 に示しておく。また、原波

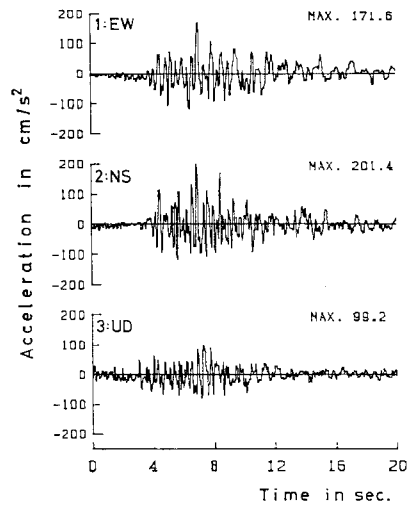


図-3 地震加速度波形 (Millikan Library での記録)

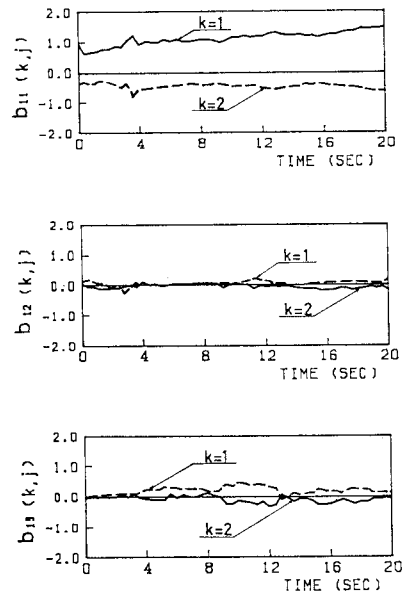


図-4 係数 $b_{1q}(k, j)$ (Millikan Library での記録)

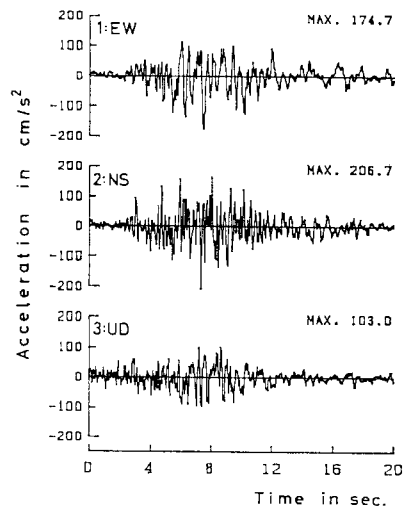


図-5 シミュレーションされた加速度波形

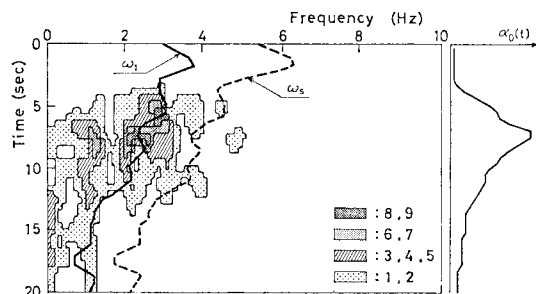


図-6 Physical スペクトル (Millikan Library, EW 成分)

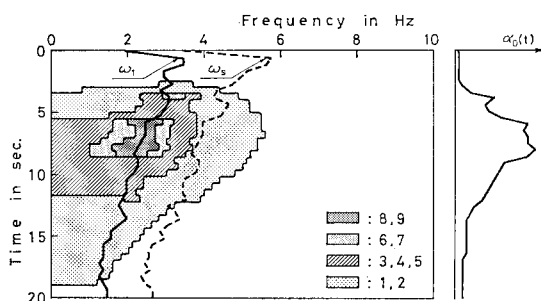


図-7 非定常スペクトル (Millikan Library, EW 成分)

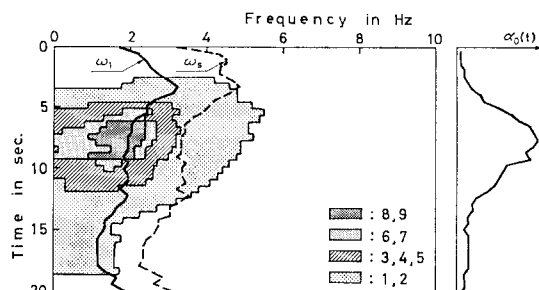


図-8 非定常スペクトル (シミュレーション波形, EW 成分)

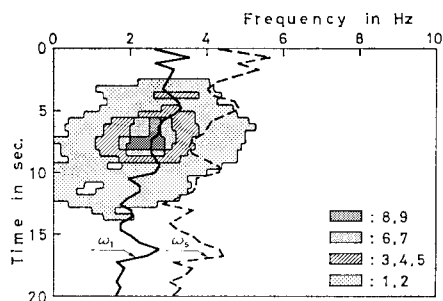


図-9 EW-UD 成分の相互スペクトル $|S_{13}|$ (Millikan Library)

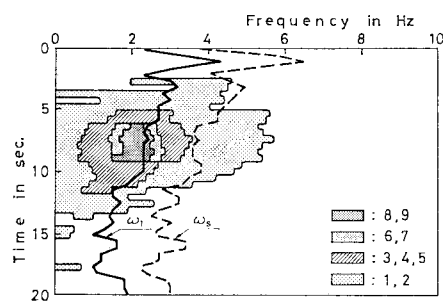


図-10 EW-UD 成分の相互スペクトル $|S_{13}|$ (シミュレーション波形)

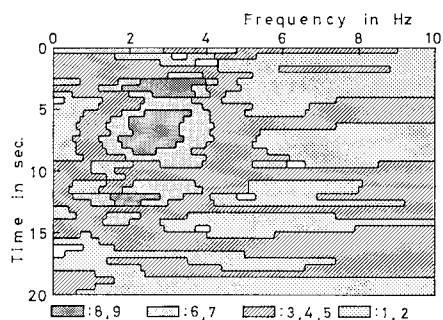


図-11 EW-UD 成分のコヒーレンス γ_{13} (Millikan Library)

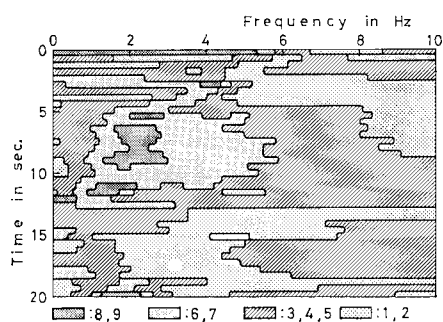


図-12 EW-UD 成分のコヒーレンス γ_{13} (シミュレーション波形)

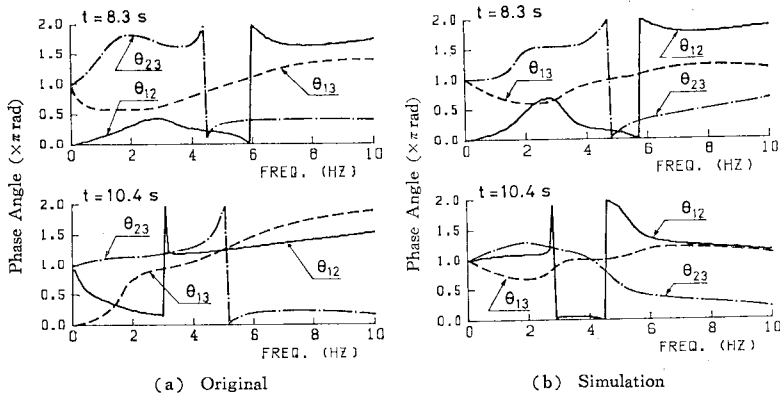


図-13 (a): Millikan Library での記録波形と (b): シミュレーション波形の位相角 θ_{pq} (添字: 1=EW 成分, 2=NS 成分, 3=UD 成分)

形とシミュレーション波形の非定常スペクトル(以下, 式(31)より求めたスペクトル $|S_{pp}(\omega, j)|$ を非定常スペクトル, $|S_{pq}(\omega, j)|$ を相互スペクトルとよぶことにする)の一例として, EW 成分のスペクトル $|S_{11}(\omega, j)|$ をそれぞれ図-7 および図-8 に, 相互スペクトルの一例として EW 成分と UD 成分の相互スペクトル $|S_{13}(\omega, j)|$ およびコヒーレンス $r_{13}(\omega, j)$ (式(32)の平方根)をそれぞれ図-9~12 に示す. 相互スペクトルは絶対値をとり示したものである. 上記の相互スペクトル, コヒーレンスおよび以下に示す位相角の添字は, 1 が EW 成分, 2 が NS 成分および 3 は UD 成分を表わすものとする.

図-6 および図-7 は同一波形に対して, それぞれ Physical スペクトルと式(31)より求めた非定常スペクトルを示したものであるが, 式(31)より定めたスペクトルは Physical スペクトルより若干平滑化された形になっていることがわかる. しかしながら, 両者の非定常特性の特徴はよく一致しているといえよう.

図-7 および図-8 に示す非定常スペクトル, あるいは, 図-9 および図-10 に示す相互スペクトルはそれぞれ両者ともよく一致している. 図-11 および図-12 に示すコヒーレンスは関連度の高い部分は低周波数領域に現われ, 高周波数領域において両者ともコヒーレンスの値が小さい等, 大体の傾向としては似かよっているといえよう.

ところで, 相互相関性は相互スペクトル, コヒーレンスおよび位相角によって表わされるが, この位相角の一例として 8.3 秒と 10.4 秒での位相角を図-13 に示す. 8.3 秒のときのものとの波形とシミュレーション波形の位相角のようにきわめてよく似た位相特性を示すこともあるが, 10.4 秒のときの位相角のようにかなり異なる場合も多い. しかしながら, すべての時刻での位相角を比較してみると, 全体としての傾向は両者とも合っている

ことが読み取れた.

以上より, また図-3 と図-5 の加速度波形からみても, 原波形の非定常特性をよくとらえかつシミュレーションも良好に行えていることがわかる. したがって, 非定常特性等の解析に適用できるものと考えられる. しかしながら模擬地震波の作成等においては, ある特性を与えておいてこの特性を有する波形を作成する必要が生じてくる. このように, 任意の特性を与えてその特性を有する波形のシミュレーション法については今後検討する必要がある.

なお, 前述した文献(9)によるものと本報告の結果についてであるが, 文献(9)にはスペクトル特性としてパワースペクトルしか表わされていず, 周波数成分の非定常特性は明確にできないが, 両者にさほど大きな差はないようである. しかしながら, 本報告で示した方法の妥当性および精度は前章およびこの章で十分に検証できたものと思われる.

以上は (2, 1) 次という非常に低次の ARMA モデルによる解析結果であるが, 満足できる結果が得られたものと思う. このように低次の ARMA モデルを用いた解析は, 図-6 の非定常スペクトルの説明でも述べたように, またコヒーレンスの図からもわかるように, もとの確率過程の非定常特性の概略を知るには非常に有用であろう. もちろん, モデルの次数を大きくとることにより精度の高い詳しい非定常スペクトルの解析も可能である. 周波数領域での相互スペクトル解析では非定常特性は非常に複雑な形状となりやすく, 非定常特性の特徴を説明しにくくなりがちである. しかしながら, 本報告で示したスペクトル解析法により, 非定常特性の特徴がより容易に説明できるものと思える.

5. 結 論

4. で示した数値計算によるモデルの検証は非常に大まかなものではあるが, ここで提案した ARMA モデルの妥当性, 有用性は示されたものと思う. 以上, 本報告で得られた結果を要約すれば次のとおりである.

(1) ARMA モデルによる多次元非定常確率過程のあてはめが容易にかつ精度よく行える. すなわち, 係数の推定およびシミュレーションが精度よく行えることを示した.

(2) ARMA モデルの係数により, 非定常相互スペ

クトル解析が容易に行えたとともに、地震動等の非定常特性の解析に応用できる。

(3) 地震加速度波形の非定常特性解析に応用する場合には、モデルの次数は (2, 1) 程度で十分解析可能であり、かつ非常に安定したモデルである。

(4) 一次元非定常過程あるいは定常過程は特殊な場合として、式 (1) にすべて含まれる。

なお今後の問題として、多次元入出力問題におけるシステムの同定、制御等への応用、あるいは模擬地震波の作成等のシミュレーションへの応用等応用面はきわめて広範囲である。これらの問題については、今後検討を加えていくつもりである。

謝 辞：本研究の遂行にあたり終始多くのご教示をいただいた武蔵工業大学 星谷 勝教授に深甚なる謝意を表します。また、多くの示唆および協力をいただいた清水建設大崎研究室 石井 清氏、武蔵工業大学 研究生 齋藤悦郎氏（フジタ工業）をはじめ星谷研究室の皆様に謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Gersch, W., G.T. Taoka and R. Liu : Structural System Parameter Estimation by Two-Stage-Least-Squares Method, J. of EM div., ASCE, EM 5, pp. 883~899, Oct. 1976.
- 2) 土岐憲三・佐藤忠信：時系列理論による構造物特性の推定，第5回日本地震工学シンポジウム講演集，pp. 1009~1015, 1978.
- 3) 鈴木浩平・中嶋 明：AR 時系列解析法の特徴を利用した振動系の減衰比推定法，日本機械学会論文集，第 433

号，pp. 1389~1397, 1982 年 9 月。

- 4) 森田裕一・浜口博之：2次元自己回帰過程による S 波初動の自動検出，地震，第 2 輯，第 34 卷，pp. 223~240, 1981.
- 5) 木下繁夫：統計的手法による波動伝達関数の推定，土木学会論文報告集，No. 313, pp. 1~11, 1981-9.
- 6) Jurkevics, A. and T.J. Ulrych : Representing and Simulating Strong Ground Motions, Bull. of Seism. Soc. of Am., Vol. 68, No. 3, pp. 781~801, June 1978.
- 7) 江尻謙嗣・土岐憲三・佐藤忠信：時系列理論を用いた強震動予測モデル，土木学会第 37 回年次大会概要集，第 1 部，pp. 683~684, 1982-10.
- 8) 千葉利晃：自己回帰モデルによる模擬地震波の作成，土木学会第 37 回年次大会概要集，第 1 部，pp. 685~686, 1982-10.
- 9) 土岐憲三・佐藤忠信・江尻謙嗣：時系列理論による強震動のシミュレーション，京大防災研究所年報，第 23 号 B-2, pp. 1~12, 1980-4.
- 10) Hoshiya, M. and T. Chiba : Simulation Methods of Multi-dimensional Nonstationary Stochastic Processes, 土木学会論文報告集，No. 296, pp. 121~130, 1980-4.
- 11) Box, G.P. and G.M. Jenkins : Time Series Analysis, Forecasting and Control, Holden-day, 1970.
- 12) 星谷 勝・千葉利晃・草野直幹：地震加速度波の非定常特性とシミュレーション，土木学会論文報告集，No. 245, pp. 51~58, 1976-1.
- 13) 星谷 勝：多次元非定常確率過程の相互スペクトルとシミュレーション理論，土木学会論文報告集，No. 253, pp. 29~35, 1976-9.
- 14) 星谷 勝・磯山龍二：多次元非定常確率過程による地震動シミュレーション，土木学会論文報告集，No. 269, pp. 41~52, 1978-1.
- 15) CIT. EERL-Report, Strong Motion Earthquake Accelerograms, Digitized and Plotted Data, Vol. 2, 1973.

(1982.12.8・受付)