

## 水平加振を受ける杭の応答特性に関する研究

STUDY ON RESPONSE CHARACTERISTICS OF A PILE  
UNDER HORIZONTAL EXCITATION小長井 一 男\*・谷 巖\*\*  
By Kazuo KONAGAI and Iwao TANI

## 1. 緒 言

杭基礎の動的現象を検討するにあたり、波動逸散等の定性的傾向を把握するためには、杭基礎や地盤を連続体として扱う弾性波動論による解析が、また地盤の層構造、非線形性等の特定な事項についての定量的な検討を行う場合には離散系の力学モデルによる解析が多用される。

弾性波動論による解析は田治見<sup>1)</sup>、Novak・Nogami<sup>2)</sup>等多くの研究者(たとえば文献3)~5))によって手がけられ、杭の細長さ、杭の縦波速度と地盤の横波速度の比等が、杭の見かけの剛性、波動逸散減衰に与える影響について詳細な検討がなされている。この解析手法は本質的に線形系を対象とし、土の引張側の抵抗も勘案するため、大変形の生ずる実験結果との量的な対比は困難である。またこの手法による解析の多くは、地盤を剛体基盤上に一様な厚さの粘弾性体を載せたものとしているので基盤以下に逸散するエネルギーの評価ができない。

これに対し、離散系の力学モデル(たとえば文献6)~8))では複雑な地下構造、構造物と地盤の剝離、滑動も含めた非線形性等を容易にモデルに組み入れることができる。本来この手法では、有限なモデルの解析を行うため、波動の地下逸散を合理的に表現し得る数値計算上の諸定数の設定は困難である。しかし近年田村・中村・加藤<sup>9)</sup>、赤尾・伯野<sup>10)</sup>により、衝撃波入力の場合、解析上有害な反射波を除去する手法が提唱されこの点は大きく改善されつつある。このように離散系の力学モデルは、その適用範囲が広く、定性的にも定量的にも有益な示唆を与えるものではあるが、構造物のみならずそれ以上に大きな広がりをもつ地盤をも含めて、質点あるいは有限要素網を設定しなければならず、計算機の容量を限定し

た場合、構造物のモデル化が粗雑になるきらいがある。

この点に関しては、地盤を連続体とし、構造物を多質点とすることで同程度の精度を得るための計算機の容量を縮小することが可能である。こうしたサブストラクチャー法を杭に応用したものの一つとして伯野<sup>11)</sup>の研究が挙げられる。伯野は地中の任意の一点に水平方向の振動荷重が集中的に作用する場合の地中の変位解を、弾性波動論により検討した。これは Penzien<sup>12)</sup>の手法に用いられている Mindlin の第Ⅱ解を動的問題に拡張したことになり、周辺地盤の質量効果および波動逸散減衰を表現するものとして評価されている。しかし Penzien<sup>12)</sup>の手法同様、一点載荷時の杭半径だけ離れた点の変位から妥当な反力係数値を算定し得るか否かについては疑問が残る。

著者らはすでに鉛直加振を受ける杭の応答特性に関して、この伯野の発想を踏まえ、点でなく杭と等しい半径を有する剛体円盤加振時の地中の変位を検討し、これから杭の各要素を支持する地盤の反力係数値を誘導した<sup>13)</sup>。この反力係数値を用いた杭の鉛直加振時の応答解析結果は、特殊な境界条件下の杭の応答の厳密解のみならず、実地盤に打ち込まれた杭の加振試験結果ともよく符合し、この反力係数設定法の妥当性が証明された。この反力係数値は、弾性体内の剛体円盤を円盤の軸方向に加振したときの応答の近似解から算定されているが、剛体円盤を、円盤を含む面に沿って加振したときの変位が得られれば、この手法を杭の水平方向加振時の応答解析にも供することが可能となる。本論文は、この点に関して得られた研究成果をまとめ、この手法の適用上の妥当性、限界等を検討することを目的とする。

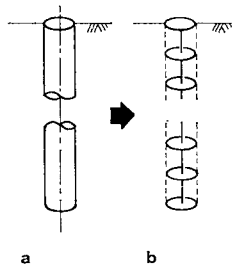
## 2. 杭の水平方向周波数応答解析モデル

## (1) 剛体円盤を支持する地盤のコンプライアンス

\* 正会員 工博 長岡技術科学大学助教授

\*\* 正会員 工修 熊谷組(研究当時・長岡技術科学大学大学院工学研究科修士課程)

本論文で提唱する杭基礎のモデルは文献 13) にならない、杭と等しい長さを有する Bernoulli-Euler ばりにその中心を貫かれた有限個の剛体円盤列とする。この円盤は杭と等しい半径をもち、連続体である弾性地盤内に埋込まれている (図一1 (b))。この円盤の

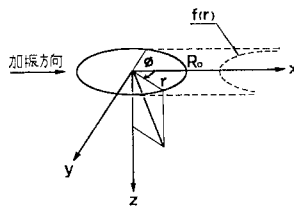


図一1 杭基礎のモデル化

間に挟まれた破線で示す円柱状の土は、円盤とともに加振方向に運動するので、円盤の質量と円盤を連結するはりの曲げ剛性は、この土の円柱をも付加した円盤列が対象とする杭 (図一1 (a)) と等価な質量分布、曲げ剛性を有するように設定される。この円盤列の周波数応答特性をもって杭の周波数応答の近似解とする。このモデルで各円盤を支持する地盤の反力係数を算定するためには、剛体円盤を支持する地盤のコンプライアンスを誘導する必要がある。このコンプライアンスを誘導するにあたり、以下の仮定を設ける。

① 地盤は無限等方弾性体とし、地表面の影響は、円盤の鏡像を置くことで表現する注1)。

② 無限等方弾性体内の質量 0 の剛体円盤の中心に、一半径方向に  $Q \cdot e^{i\omega t}$  なる振動荷重が加わったとき、接地面内での荷重分布は静的な剛板分布<sup>14)</sup>と等しくおく。円筒座標



図一2 円筒座標と  $f(r)$  の概形

( $r, \phi, z$ ) 表示で、円盤を含む面を  $z=0$  とした場合、この分布形  $f$  は次のように与えられる (図一2 および式 (1))。

$$f \cdot e^{i\omega t} = \begin{cases} \frac{Q \cdot e^{i\omega t}}{2\pi R_0} \frac{1}{\sqrt{R_0^2 - r^2}} & |r| < R_0 \\ 0 & |r| > R_0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $R_0$  : 円盤の半径、 $i$  : 虚数単位 ( $=\sqrt{-1}$ )、 $\omega$  : 円振動数、 $t$  : 時間、 $\pi$  : 円周率

図一2 の円筒座標 ( $r, \phi, z$ ) のそれぞれの方向の変位を

注 1) この場合、表面波の影響は考慮されていないが、加振位置が地表面下にある場合、この仮定により十分な精度の解を得ることが示されている (文献 11))。また仮に円盤が地表面上にあっても、ポアソン比 0.3 以上の半無限等方弾性体の Green 関数が、加振点から S 波の波長に等しい距離以内で、無限弾性体内の Green 関数のほぼ 2 倍に等しいため、円盤の半径が S 波の波長を越えない限りこの仮定は妥当である。

$u_r, u_\phi, u_z$  とすれば、波動方程式は次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} (\lambda+2\mu) \frac{\partial d}{\partial r} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \Omega_z}{\partial \phi} + 2\mu \frac{\partial \Omega_\phi}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\ (\lambda+2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial d}{\partial \phi} - 2\mu \frac{\partial \Omega_r}{\partial z} + 2\mu \frac{\partial \Omega_z}{\partial r} &= \rho \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial t^2} \\ (\lambda+2\mu) \frac{\partial d}{\partial z} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\Omega_\phi) + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \Omega_r}{\partial \phi} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $d = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$

$$\Omega_\phi = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

$$\Omega_r = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} - \frac{\partial u_\phi}{\partial z} \right)$$

$$\Omega_z = \frac{1}{2} \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot u_\phi) - \frac{\partial u_r}{\partial \phi} \right\}$$

$\lambda, \mu$  : Lamé の定数 ( $\mu$  : せん断弾性係数)

$\rho$  : 弾性体の密度

この解は  $z$  軸に直交する面内で境界条件を考える場合、次のように与えられる<sup>15)</sup>。

$$\begin{aligned} u_r = \int_0^\infty dq \sum_m \left\{ -A_m \frac{1}{l^2} \frac{\partial J_m(qr)}{\partial r} e^{-n_z z} \right. \\ \left. + B_m \frac{m}{q^2} \frac{J_m(qr)}{r} e^{-n_z z} \right. \\ \left. + C_m \frac{n_z^2}{j^2} \frac{\partial J_m(qr)}{\partial r} e^{-n_z z} \right\} \cos m\phi \cdot e^{i\omega t} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\begin{aligned} u_\phi = \int_0^\infty dq \sum_m \left\{ A_m \frac{m}{l^2} \frac{J_m(qr)}{r} e^{-n_z z} \right. \\ \left. - B_m \frac{1}{q^2} \frac{\partial J_m(qr)}{\partial r} e^{-n_z z} \right. \\ \left. - C_m \frac{mn_z}{j^2} \frac{J_m(qr)}{r} e^{-n_z z} \right\} \sin m\phi \cdot e^{i\omega t} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\begin{aligned} u_z = \int_0^\infty dq \sum_m \left\{ A_m \frac{n_1}{l^2} e^{-n_1 z} - C_m \frac{q^2}{j^2} e^{-n_2 z} \right\} J_m(qr) \\ \cdot \cos m\phi \cdot e^{i\omega t} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $j^2 = \rho\omega^2/\mu, l^2 = \rho\omega^2/(\lambda+2\mu)$

$$q^2 = l^2 + n_1^2 = j^2 + n_2^2$$

$J_m(x)$  :  $m$  階の第 1 種 Bessel 関数

$A_m, B_m, C_m$  : 未定係数

またせん断応力  $\tau_{zr}, \tau_{\phi z}$  および直応力  $\sigma_z$  は Hooke の法則により

$$\begin{aligned} \sigma_z = \mu \int_0^\infty dq \sum_m \left\{ A_m \frac{-2q^2 + j^2}{l^2} e^{-n_1 z} \right. \\ \left. + 2C_m \frac{n_2 q^2}{j^2} e^{-n_2 z} \right\} \cdot J_m(qr) \cdot \cos m\phi \cdot e^{i\omega t} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\begin{aligned} \tau_{zr} = \mu \int_0^\infty dq \sum_m \left\{ A_m \frac{2n_1}{l^2} \frac{\partial J_m(qr)}{\partial r} e^{-n_1 z} \right. \\ \left. - B_m \frac{mn_2}{q^2} \frac{J_m(qr)}{r} e^{-n_2 z} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -C_m \frac{q^2+n_2^2}{j^2} \frac{\partial J_m(qr)}{\partial r} \cdot e^{-n_2 z} \Big\} \cos m\phi \cdot e^{i\omega t} \\
 & \dots\dots\dots(7) \\
 \tau_{\phi z} = & \mu \int_0^\infty dq \sum_m \left\{ -A_m \frac{2m\alpha}{l^2} \frac{J_m(qr)}{r} e^{-n_1 z} \right. \\
 & + B_m \frac{n_2}{q^2} \frac{\partial J_m(qr)}{\partial r} e^{-n_2 z} \\
 & \left. + C_m \frac{m(q^2+n_2^2)}{j^2} \frac{J_m(qr)}{r} e^{-n_2 z} \right\} \sin m\phi \cdot e^{i\omega t} \\
 & \dots\dots\dots(8)
 \end{aligned}$$

と与えられる。式(3)~(8)において  $z \rightarrow +\infty$  のとき変位が0に収斂し、しかも後退波は存在しないので、式中の  $n_1, n_2$  は正の実数、もしくは正の虚数をとる。また  $z \rightarrow -\infty$  においても同様に変位が0に収斂し、かつ負方向への進行波に限られるので、 $n_1, n_2$  が正の実数、正の虚数をとる限り、式(3)~(8)は  $z < 0$  の領域で次のように書き直す必要がある。なお先ほどの  $z > 0$  の領域における解との判別のため、変位、応力の解には「(バー)」を付けておく。

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_r = & \int_0^\infty dq \sum_m \left\{ -\bar{A}_m \frac{1}{l^2} \frac{\partial J_m(qr)}{\partial r} e^{n_1 z} \right. \\
 & + \bar{B}_m \frac{m}{q^2} \frac{J_m(qr)}{r} e^{n_2 z} \\
 & \left. - \bar{C}_m \frac{n_2}{j^2} \frac{\partial J_m(qr)}{\partial r} \cdot e^{n_2 z} \right\} \cos m\phi \cdot e^{i\omega t} \\
 & \dots\dots\dots(9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_\phi = & \int_0^\infty dq \sum_m \left\{ \bar{A}_m \frac{m}{l^2} \frac{J_m(qr)}{r} e^{n_1 z} \right. \\
 & - \bar{B}_m \frac{1}{q^2} \frac{\partial J_m(qr)}{\partial r} e^{n_2 z} \\
 & \left. + \bar{C}_m \frac{mn_2}{j^2} \frac{J_m(qr)}{r} e^{n_2 z} \right\} \sin m\phi \cdot e^{i\omega t} \\
 & \dots\dots\dots(10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_z = & \int_0^\infty dq \sum_m \left\{ -\bar{A}_m \frac{n_1}{l^2} e^{n_1 z} - \bar{C}_m \frac{q^2}{j^2} e^{n_2 z} \right\} J_m(qr) \\
 & \cdot \cos m\phi \cdot e^{i\omega t} \dots\dots\dots(11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_z = & \mu \int_0^\infty dq \sum_m \left\{ \bar{A}_m \frac{-2q^2+j^2}{l^2} e^{n_1 z} \right. \\
 & \left. - 2\bar{C}_m \frac{n_2 q^2}{j^2} e^{n_2 z} \right\} J_m(qr) \cdot \cos m\phi \cdot e^{i\omega t} \\
 & \dots\dots\dots(12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\tau}_{zr} = & \mu \int_0^\infty dq \sum_m \left\{ -\bar{A}_m \frac{2n_1}{l^2} \frac{\partial J_m(qr)}{\partial r} e^{n_1 z} \right. \\
 & + \bar{B}_m \frac{mn_2}{q^2} \frac{J_m(qr)}{r} e^{n_2 z} \\
 & \left. - \bar{C}_m \frac{q^2+n_2^2}{j^2} \frac{\partial J_m(qr)}{\partial r} e^{-n_2 z} \right\} \cos m\phi \cdot e^{i\omega t} \\
 & \dots\dots\dots(13)
 \end{aligned}$$

$$\bar{\tau}_{\phi z} = \mu \int_0^\infty dq \sum_m \left\{ \bar{A}_m \frac{2mn_1}{l^2} \frac{J_m(qr)}{r} e^{n_1 z} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \bar{B}_m \frac{n_2}{q^2} \frac{\partial J_m(qr)}{\partial r} e^{n_2 z} \\
 & \left. + \bar{C}_m \frac{m(q^2+n_2^2)}{j^2} \frac{J_m(qr)}{r} e^{n_2 z} \right\} \sin m\phi \cdot e^{i\omega t} \\
 & \dots\dots\dots(14)
 \end{aligned}$$

式(9)~(14)には  $A_m, \bar{A}_m, B_m, \bar{B}_m, C_m, \bar{C}_m$  なる6種類の未定係数が含まれる。この6種の未定係数は、円盤を含む面 ( $z=0$ ) 上の6つの境界条件により決定される。この境界条件は次のように定式化される。すなわち  $z=0$  において

- ①  $u_r - \bar{u}_r = 0$
- ②  $u_\phi - \bar{u}_\phi = 0$
- ③  $u_z - \bar{u}_z = 0$
- ④  $\sigma_z - \bar{\sigma}_z = 0$
- ⑤  $\tau_{zr} - \bar{\tau}_{zr} = -f \cdot e^{i\omega t} \cdot \cos \phi$
- ⑥  $\tau_{\phi z} - \bar{\tau}_{\phi z} = f \cdot e^{i\omega t} \cdot \sin \phi$

このうち境界条件⑤、⑥に示した  $f$  はすでに式(1)で定義した荷重分布に等しい。この境界条件⑤、⑥および式(12)、(13)より未定係数の添字  $m$  は1のみが適することが明らかである。この問題の性格上  $u_r, u_\phi, u_z$  は  $z=0$  なる面に対称である。したがって  $u_r, u_\phi$  は  $z$  に関し偶関数、 $u_z$  は奇関数となる。よって

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \bar{A}_1 \\
 B_1 &= \bar{B}_1 \\
 C_1 &= -\bar{C}_1
 \end{aligned}$$

である。さらに、 $u_z$  が奇関数でかつ境界条件③を満たすためには  $z=0$  で  $u_z=0$  でなければならない。したがって

$$A_1 = \frac{q^2 l^2}{n_1 j^2} C_1 \dots\dots\dots(15)$$

となる。これで境界条件①~④までが満たされるので、境界条件⑤、⑥に検討を加えればすべての未定係数が決定できる。せん断応力を表わす式(12)、(13)が第1種 Bessel 関数を含んでいることを考慮して円盤面上の荷重分布形  $f$  を Fourier-Bessel の積分定理を用いて表示する。

$$f(r) = \int_0^\infty q \cdot T(q) \cdot J_0(qr) dq \dots\dots\dots(16)$$

ここに

$$\begin{aligned}
 T(q) = & \int_0^\infty r \cdot f(r) \cdot J_0(qr) dr = \frac{Q}{2\pi} \frac{\sin qR_0}{qR_0} \\
 & \dots\dots\dots(17)
 \end{aligned}$$

境界条件⑤に式(16)、式(7)、式(13)を代入することと

$$\begin{aligned}
 \cos \phi \cdot e^{i\omega t} \cdot \mu \int_0^\infty & \left( A_1 \frac{4n_1}{l^2} \frac{\partial J_1(qr)}{\partial r} \right. \\
 & \left. - B_1 \frac{2n_2}{q^2} \frac{J_1(qr)}{r} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -C_1 \frac{2(q^2+n_2^2)}{j^2} \frac{\partial J_1(qr)}{\partial r} \Big) dq \\
 & = -\cos \phi \cdot e^{i\omega t} \int_0^\infty q \cdot T(q) \cdot J_0(qr) dq \dots\dots (18)
 \end{aligned}$$

を得る。ここで被積分関数に着目し、 $A_1 = \frac{q^{l^2}}{n_1 j^2} C_1$  を考慮すると

$$\begin{aligned}
 & 2 C_1 \cdot \frac{\partial J_1(qr)}{\partial r} - 2 B_1 \frac{n_2}{q^2} \frac{J_1(qr)}{r} \\
 & = -q \cdot T(q) \cdot J_0(qr) / \mu \dots\dots\dots (19)
 \end{aligned}$$

となる。同様に境界条件 ⑥ より

$$\begin{aligned}
 & -2 C_1 \cdot \frac{J_1(qr)}{r} + 2 B_1 \frac{n_2}{q^2} \frac{\partial J_1(qr)}{\partial r} \\
 & = q \cdot T(q) \cdot J_0(qr) / \mu \dots\dots\dots (20)
 \end{aligned}$$

を得る。式 (19), (20) を連立させ、Bessel 関数の漸化式を用いることで未定係数は以下のように決定される。

$$\left. \begin{aligned}
 A_1 &= \bar{A}_1 = -\frac{q^{l^2}}{2 \mu n_1 j^2} (q \cdot T(q)) \\
 B_1 &= \bar{B}_1 = \frac{q}{2 \mu n_2} (q \cdot T(q)) \\
 C_1 &= -\bar{C}_1 = -\frac{1}{2 \mu q} (q \cdot T(q))
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

これを式 (9)~(14) に代入し、 $q$  について 0 から  $+\infty$  まで積分することで、弾性体内のすべての点の変位と応力を算定できるが、円盤加振時のコンプライアンスを評価するためには加振方向 ( $x$  方向) の変位を求めておく必要がある。 $u_r, u_\phi$  と加振方向変位  $u_x$ , およびこれと直角方向の変位  $u_y$  との間には次なる関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned}
 u_x &= u_r \cdot \cos \phi - u_\phi \cdot \sin \phi \\
 u_y &= u_r \cdot \sin \phi + u_\phi \cdot \cos \phi
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

したがって式 (21) に式 (17) で定義された  $T(q)$  を代入することで  $u_x, u_y$  は最終的に

$$\frac{u_x}{\left(\frac{Q \cdot e^{i\omega t}}{8 \pi \mu R_0}\right)} = U_1 - \cos 2 \phi \cdot U_2 \dots\dots\dots (23)$$

$$\frac{u_y}{\left(\frac{Q \cdot e^{i\omega t}}{8 \pi \mu R_0}\right)} = -\sin 2 \phi \cdot U_2 \dots\dots\dots (24)$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \int_0^\infty \sin q R_0 \left\{ \frac{q^2}{n_1 j^2} e^{-n_1 z} \right. \\
 & \quad \left. + \left( \frac{1}{n_2} - \frac{n_2}{j^2} \right) e^{-n_2 z} \right\} J_0(qr) dq \dots\dots\dots (25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_2 &= \int_0^\infty \sin q R_0 \left\{ \frac{q^2}{n_2 j^2} e^{-n_1 z} \right. \\
 & \quad \left. - \left( \frac{1}{n_2} + \frac{n_2}{j^2} \right) e^{-n_2 z} \right\} J_2(qr) dq \dots\dots\dots (26)
 \end{aligned}$$

と求めることができる。式 (23) をあらためて

$$u_x = Q \cdot e^{i\omega t} \cdot W(r, \phi, z, \omega) \dots\dots\dots (27)$$

と書き、地表面から円盤までの深さを  $H$  としたとき

$$W' = W(0, 0, 0, \omega) + W(0, 0, 2H, \omega) \dots\dots (28)$$

が、この剛体円盤を支持する地盤のコンプライアンスとなる。式 (28) の右辺第 2 項は  $z=H$  なる平面を地表面と見立て、これを鏡としたときの鏡像である。

### (2) 地盤のコンプライアンスの数値計算

地盤のコンプライアンスを算出するためには、前節式 (23) 中の  $U_1, U_2$  を検討する必要がある。このためには式 (25), (26) に示された複雑な複素積分を実行しなければならない。式 (25), (26) は無次元化した諸量を用いて次のように表現できる。

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \int_0^\infty \sin \zeta A \left\{ \frac{\zeta^2}{\sqrt{\zeta^2 - \tau^2}} e^{-b\sqrt{\zeta^2 - \tau^2}} \right. \\
 & \quad \left. + \left( \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) e^{-b\sqrt{\zeta^2 - 1}} \right\} J_0(\zeta a) d\zeta \\
 & \quad \dots\dots\dots (29)
 \end{aligned}$$

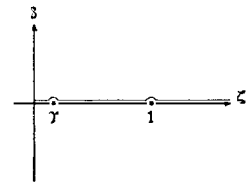
$$\begin{aligned}
 U_2 &= \int_0^\infty \sin \zeta A \left\{ \frac{\zeta^2}{\sqrt{\zeta^2 - \tau^2}} e^{-b\sqrt{\zeta^2 - \tau^2}} \right. \\
 & \quad \left. - \left( \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) e^{-b\sqrt{\zeta^2 - 1}} \right\} J_2(\zeta a) d\zeta \\
 & \quad \dots\dots\dots (30)
 \end{aligned}$$

ここに、 $a=r \cdot j, b=z \cdot j, A=R_0 \cdot j, \tau=l/j (=V_s/V_p), \zeta=q/j$

$V_s$  : 弾性体内の横波速度

$V_p$  : 弾性体内の縦波速度

式 (29), (30) の積分には、 $\zeta=\tau$  と  $\zeta=1$  なる 2 つの分岐点が存在する。波動の逸散、ならびに無限遠点で変位が 0 となることを考慮すると、積分路上では  $\text{Arg}(b\sqrt{\zeta^2 - 1}), \text{Arg}(b\sqrt{\zeta^2 - \tau^2})$  はともに 0 から  $\pi/2$  の間の値をとらなければならない。したがってこの積分路は 2 つの分岐点に対し図-3 に示すような経路となる。



式 (29), (30) の右辺の被積分関数は  $\zeta, A, a, b, r$  の関数であるので、これを便宜上次のように書きかえる。

$$U_1 = \int_0^\infty \sum_{m=1}^3 I_m(\zeta, A, a, b, r) d\zeta \dots\dots\dots (31)$$

$$U_2 = \int_0^\infty \sum_{m=1}^3 L_m(\zeta, A, a, b, r) d\zeta \dots\dots\dots (32)$$

ここに、 $I_1 = \sin \zeta A \cdot \frac{\zeta^2}{\sqrt{\zeta^2 - \tau^2}} \cdot e^{-b\sqrt{\zeta^2 - \tau^2}} \cdot J_0(\zeta a)$

$$I_2 = \sin \zeta A \cdot \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \cdot e^{-b\sqrt{\zeta^2 - 1}} \cdot J_0(\zeta a)$$

$$I_3 = -\sin \zeta A \cdot \sqrt{\zeta^2 - 1} \cdot e^{-b\sqrt{\zeta^2 - 1}} \cdot J_0(\zeta a)$$

$$L_1 = \sin \zeta A \cdot \frac{\zeta^2}{\sqrt{\zeta^2 - \tau^2}} \cdot e^{-b\sqrt{\zeta^2 - \tau^2}} \cdot J_2(\zeta a)$$

$$L_2 = -\sin \zeta A \cdot \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \cdot e^{-b\sqrt{\zeta^2 - 1}} \cdot J_2(\zeta a)$$

$$L_3 = \sin \zeta A \cdot \sqrt{\zeta^2 - 1} \cdot e^{-b\sqrt{\zeta^2 - 1}} \cdot J_2(\zeta a)$$

式 (31), (32) の数値積分を実行するとき  $I_1, L_1$  および  $I_2, L_2$  の分母がそれぞれ  $\zeta=r, \zeta=1$  なる分岐点周辺で 0 に近づくことに留意する必要がある。そこで式 (31), (32) を次のように変形する。

$$U_1 = \int_0^\infty \sum_{m=1}^3 I_m(\zeta, A, a, b, r) d\zeta + \int_0^\infty I_4(\zeta, A, a, b, r) d\zeta + \int_0^\infty I_5(\zeta, A, a, b, r) d\zeta + r \sin \tau A \cdot \frac{e^{-i\tau\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2}} + \sin A \cdot \frac{e^{-i\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2}} \dots (33)$$

$$U_2 = \int_0^\infty \sum_{m=1}^3 L_m(\zeta, A, a, b, r) d\zeta + \int_0^\infty L_4(\zeta, A, a, b, r) d\zeta + \int_0^\infty L_5(\zeta, A, a, b, r) d\zeta + r \sin \tau A [2\{\sin \tau \sqrt{a^2+b^2} - \sin rb\} + i(\cos r \sqrt{a^2+b^2} - \cos rb)] / r a^2 - e^{-i\tau\sqrt{a^2+b^2}} / \sqrt{a^2+b^2} - \sin A [2\{\sin \sqrt{a^2+b^2} - \sin b + i(\cos \sqrt{a^2+b^2} - \cos b)\} / a^2 - e^{-i\sqrt{a^2+b^2}} / \sqrt{a^2+b^2}] \dots (34)$$

ここに、 $I_4 = -r \sin \tau A \cdot \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - r^2}} \cdot e^{-b\sqrt{\zeta^2 - r^2}} \cdot J_0(\zeta a)$

$$I_5 = -\sin A \cdot \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \cdot e^{-b\sqrt{\zeta^2 - 1}} \cdot J_0(\zeta a)$$

$$L_4 = -r \sin \tau A \cdot \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - r^2}} \cdot e^{-b\sqrt{\zeta^2 - r^2}} \cdot J_2(\zeta a)$$

$$L_5 = \sin A \cdot \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \cdot e^{-b\sqrt{\zeta^2 - 1}} \cdot J_2(\zeta a)$$

この変形により  $I_1$  と  $I_4$  の和および  $L_1$  と  $L_4$  の和は  $\zeta$  が  $r$  に近づくにつれ、また  $I_2$  と  $I_5$  の和および  $L_2$  と  $L_5$  の和は  $\zeta$  が 1 に近づくにつれ 0 に収束するので数値計算が容易になる。さらに  $I_m, L_m$  の  $\zeta \gg 1$  における近似式を求めておくと、この近似式の積分は Weber の不連続積分等の積分公式<sup>13)</sup>により解析的に実行できるので、数値計算の能率は著しく向上する。

以上述べた手法により  $U_1, U_2$  を求めるべく数値計算を実行した結果の一例を図-4 に示す。ここでは、地下水で飽和した沖積層地盤を念頭に置き、 $r(=V_s/V_p)=0$  なる条件で  $A(=\omega \cdot R_0/V_s)=\pi/2^4$  のときの、 $z=0$  なる面上の  $U_1, U_2$  を  $r/R_0$  の関数として表現している。円盤内では  $U_1$  がほぼ均一であり、これに比べ  $U_2$  が無視できるほど小さい。したがって前節式 (23), (24) によって  $u_x, u_y$  を算定すると、円盤内では  $u_x$  に比べ  $u_y$  は無視し得る。この  $u_x$  に  $8\pi\mu R_0/Q$  を乗じて無次元化し、その絶対値を  $r/R_0$  の関数として図-5 に示す。円盤内で  $u_x$  が均一であることから、この  $u_x$  より剛体円盤を支持する地盤のコンプライアンスを算定して差し支えないことが示された。しかし円盤内での  $u_x$  は、円盤

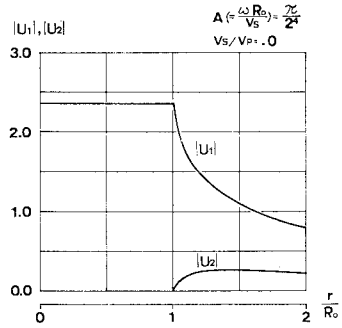


図-4  $U_1, U_2$  の数値計算例

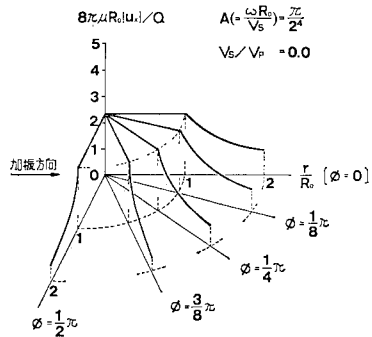


図-5 円盤を含む面上における加振方向変位  $u_x$

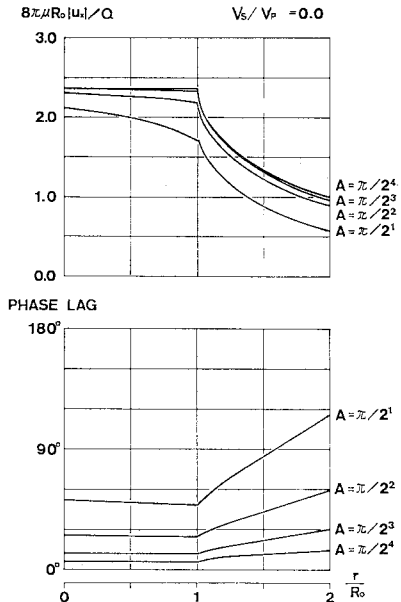
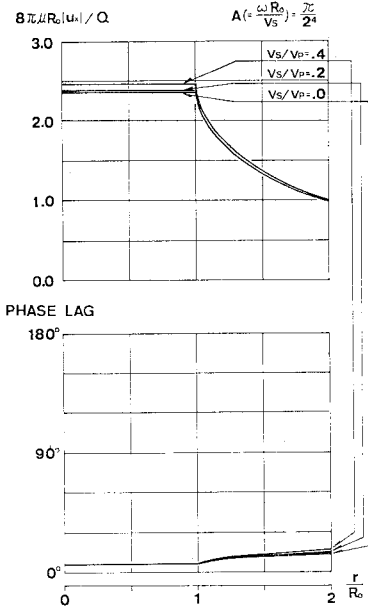


図-6 円盤を含む面上の加振方向変位  $u_x$  に及ぼす  $A(=\omega R_0/V_s)$  の影響

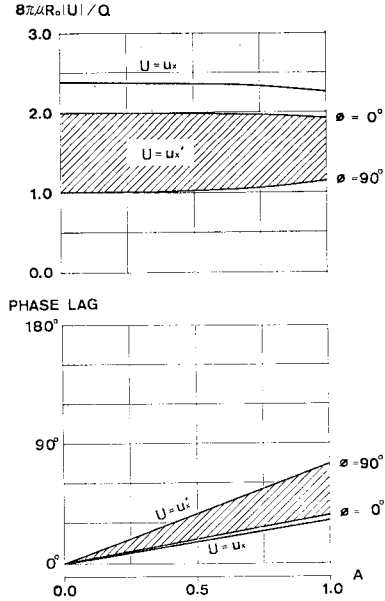
の半径が S 波の波長に比べ大きくなるにつれ、しだいに一様でなくなるものと懸念される。この影響をみるべく、 $A$  をパラメーターとし、 $z=0$  における  $8\pi\mu R_0|U_x|/Q$  を  $r/R_0$  の関数として図-6 に示した。この状況から



図一 円盤を含む面上の加振方向変位  $u_x$  に及ぼす  $r(=V_s/V_p)$  の影響

$A$  が  $\pi/4$  まで、すなわち円盤の直径が S 波の波長の  $1/4$  程度までを、この手法の適用限界とするのが妥当である。図一は  $A$  を  $\pi/2^4$  としたときの  $\varepsilon=0$  における  $8\pi\mu R_0|U_x|/Q$  を、 $V_s/V_p$  をパラメーターとして表示したものである。この図では、 $V_s/V_p$  が小さくなるほど、すなわちポアソン比が 0.5 に近づくほど円盤の変位が小さくなり、圧縮性の弾性体から非圧縮性の弾性体への移行に伴う現象と理解できる。

ここに述べた円盤の変位解は、伯野<sup>11)</sup>が検討した地中の一点を水平方向に加振したときの地中の変位解に相当するものであり、以下に 2 つの変位解の比較検討を行っておく。伯野の用いた変位解は、無限等方弾性体内の点加振時の変位解に、仮想地表面に対する鏡像を重ね合わせたものである。この場合仮想地表面上でせん断応力は 0 となるが、直応力は 0 とならず地表面としての条件を満たさない。伯野は Lamb<sup>17)</sup> により導かれた半無限弾性体表面の点加振時の変位解を用いてこの分の補正を行っているが、その結果この補正分はきわめて小さく、鏡像のみを重ね合わせる簡便法で十分であることを示している。したがって、本節で誘導した円盤の加振方向変位  $u_x$  に対応するものは、無限等方弾性体中の一点加振時の変位解となる。この解は P 波、S 波の寄与に対応する初等関数の線形和として表現され、これまで述べてきたような複雑な数値積分の煩わしさはない。しかし Mindlin の第 II 解同様、加力点で変位が無限大となるため、Penzien にならって杭を周辺地盤と同じ弾性体とみなし、杭中心位置に加振点を置いたときの杭表面位置での



図二  $u_x$  と  $u_x'$  の差異

変位  $u_x'$  を用いて、地盤のコンプライアンスを評価することになる。図二にはこの  $u_x'$  と円盤の変位  $u_x$  におの  $8\pi\mu R_0/Q$  を乗じて無次元化したものを  $A(=\omega \cdot R_0/V_s)$  の関数として示す。 $u_x'$  は Mindlin の第 II 解同様  $\phi$  に応じて変化する。Penzien<sup>12)</sup> や山本<sup>18)</sup> は Mindlin の第 II 解の  $\phi$  に関する平均値をとることで地盤のコンプライアンスを誘導しているがこの方法では地盤を固く評価することが指摘されている<sup>19)</sup>。図二において、円盤の変位  $u_x$  は  $u_x'$  の平均値よりかなり大きく、 $u_x$  を用いるの方が地盤をより柔らかく評価することがわかる。むしろ  $\phi=0$  における  $u_x'$  が円盤の変位  $u_x$  に酷似している。

### (3) 円盤列の運動方程式

式 (20) に準じ、円盤列の一枚  $m$  なる円盤 (質量 0) を  $Q \cdot e^{i\omega t}$  なる力で加振したときの円盤  $k$  の位置の変位を  $W_{km}' \cdot Q \cdot e^{i\omega t}$  と書く。 $W_{km}'$  には円盤  $m$  の地表面に対する鏡像がすでに重ね合わせてある。またこのとき円盤の間には Beronoulli-Euler ばりを介在させておらず、また  $m$  以外の円盤による拘束の影響を無視している。このとき円盤列に加わる力のベクトル  $\{F_1, F_2, \dots, F_N\}^T$  と円盤の変位ベクトル  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}^T$  の間には

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11}' & W_{12}' & \dots & \dots & W_{1N}' \\ W_{21}' & W_{22}' & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ W_{N1}' & \dots & & & W_{NN}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (35)$$

なる関係が成立する。式 (35) の右辺のコンプライアンスマトリックスを  $[W']$  と略記し、この逆マトリックス  $[W']^{-1}$  を地盤の反力マトリックスと称することにする。この  $[W']^{-1}$  を用いると円盤列の運動方程式は最終的に

$$[M]\{\dot{x}\} + [[S] + [W']^{-1}]\{x\} = \{F\} \dots\dots (36)$$

と書くことができる。 $[M]$  はおのおのの円盤に付加する質量を対角要素とする質量マトリックスであり、 $[S]$  は両端自由ばりの剛性マトリックスである。先にも述べたように、隣接する2枚の円盤に挟まれた土の円柱は円盤とともに運動するので、この土の円柱も杭のモデルの一部とみなし、円盤  $m$  に付加する質量  $M_m$  を以下の手順で算出する。

$$M_m = M_c - \rho_{em} \cdot \pi R_0^2 \Delta l \dots\dots\dots (37)$$

ここに、 $M_c = \rho_c \cdot S \cdot \Delta l$

- $\rho_{em}$  :  $m$  番目の円盤付近の土の密度
- $\rho_c$  : 杭材の密度
- $\Delta l$  : 円盤の間隔
- $S$  : 杭の断面積

式 (37) から円盤間に土の円柱を付加した円盤列は、解析の対象とする杭と等しい質量を有するようになる。はりの剛性マトリックスに関しても、土の円柱を付加したことによる修正を加えることが考えられるが、一般の杭ではこの修正分はきわめて小さく無視し得る。したがって式 (36) をもって近似的に杭基礎の運動方程式とみなすことができる。

### 3. 他の解析解との比較

本論文で提示した杭基礎の水平方向周波数応答解析手法の妥当性を検証するため、ある特殊な境界条件をもつ杭の応答の弾性波動論による解析解との比較を行うことにする。比較の対象とする解析解は Novak と Nogami<sup>2)</sup> によって得られたものであり、以下に示す条件のもとで誘導されたものである。

(イ) 杭は断面が円形の完全弾性体であり、その先端は剛体基盤で支持されている。また杭と周辺地盤との付着は完全である。

(ロ) 地盤は剛体基盤上に一様な厚さの均質な線形粘弾性体を載せたものとする。

(ハ) 地表面では直応力、せん断応力ともに0であり、剛体基盤上では変位は拘束され0となる。

(ニ) 杭・地盤系の水平動に対し、鉛直方向変位は小さいものとし、これを無視する。

(ホ) 調和振動状態を考える。

Novak と Nogami は、杭先の回転を拘束した状態 (clamped tip) と、拘束しない状態 (pinned tip) のお

おのに対し、杭頭加振時の4種類の動的ばね定数  $k_{Su}$ ,  $k_{Mu}$ ,  $k_{M\psi}$ ,  $k_{S\psi}$  を検討した。これらは杭頭に単位の変位、あるいは回転を生じさせるに必要な力で定義される (図-9)。杭頭の回転を拘束し、水平方向に

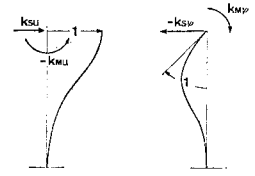


図-9 杭頭における動的ばね定数の定義

1なる変位を生じさせる水平方向力およびモーメントが  $k_{Su}$ ,  $k_{Mu}$  であり、杭頭の水平変位を拘束し、1なる回転を生じさせる水平方向力およびモーメントが  $k_{S\psi}$ ,  $k_{M\psi}$  である。

本章では、杭先の回転を拘束しない状態 (pinned tip) で計算された  $k_{Su}$  の逆数、すなわち杭頭の水平方向周波数応答  $u_e(\omega)$  を比較の対象に選ぶ。これに対する近似解を得るためには、基盤が剛であることと、杭頭の回転が拘束されていることの2点に留意しなければならない。したがって、杭長の2倍の長さをもつ、その両端を2つの平行かつ不動な剛体壁面上に置いた円盤列を考え、剛体平面間の中央に位置する円盤を  $2 \cdot e^{i\omega t}$  なる力で加振したときの応答をもって近似解とする。円盤を支持する地盤のコンプライアンスは2つの剛体壁面を鏡面として、この円盤の鏡像を重ね合わせて算定する。

こうして得られた近似解  $u_a(\omega)$  を Novak と Nogami の算定した  $u_e(0)$  でノーマライズし、Novak と Nogami によって得られた動的応答倍率に重ねて書いたものが図-10 である。横軸には、解析の対象である杭と等しい

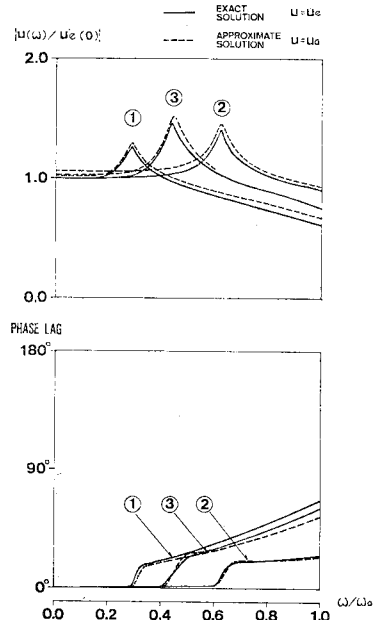


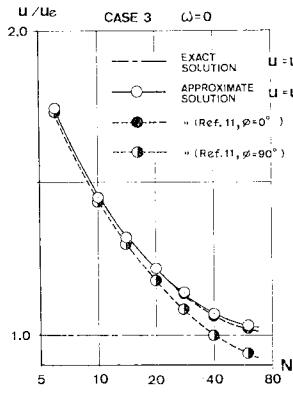
図-10 杭頭の回転を拘束した状態で動的変位応答倍率

表一 数値計算上の入力データ

	$H/R_0$	$\bar{V}$	$\bar{\rho}$	$\nu$
CASE 1	30	0.002	0.6	0.5
CASE 2	30	0.01	0.6	0.5
CASE 3	15	0.01	0.6	0.5

- $H$ : length of pile,  
depth of soil layer over the bedrock
- $R_0$ : radius of pile
- $\bar{V} = V_s/V_p'$ : wave velocity ratio
- $V_p'$ : longitudinal wave velocity in pile
- $V_s$ : shear wave velocity in soil
- $\bar{\rho} = \rho/\rho'$ : mass ratio
- $\rho'$ : mass density of pile
- $\rho$ : mass density of soil
- $\nu$ : Poisson's ratio of soil
- $\omega_0$ : circular frequency at which stiffness of a  
free-standing pile becomes zero
- $\omega$ : excitation circular frequency

断面、曲げ剛性、および2倍の長さを有する両端支持ばりの1次の固有振動数でノーマライズした振動数をとっている。なお数値計算上の入力データは表一に示すとおりである。近似解の計算は、2.(2)で述べたように  $A(\omega \cdot R_0/V_s) < \pi/4$  の範囲内にとどめている。この近似解(図中破線)は、相対する平行な剛体壁面間の分割数  $N$  (円盤の枚数に1を加えたもの)を増すことで漸減し、さらに実線に接近する。分割数  $N$  と  $u_a/u_e$  の関係を図一11に示す(case 3,  $\omega=0$ )。この図には伯野の提唱したコンプライアンス<sup>11)</sup>を用いた計算値も併記しているが、剛体円盤を用いてコンプライアンスを評価した場合に精度の高い近似解を得ることが認められる。しかし解が収斂



図一11 分割数  $N$  と  $u_a/u_e$  の関係

するために円盤の間隔をかなり小さくしなければならない。図一10の近似解は、隣接する円盤の間隔と円盤の半径の比2:3(case 3に限り1:2)として算定されたものである。図一10に認められる共振点はS波の重複反射に起因するものであるが、基盤が剛で表層の水平動のみ考えるNovakとNogamiの解析では、表層に内部減衰を考えると、この点で杭を含めた表層全体が共振し  $k_{su}$  が0となる。そしてこの振動数を越えた段階で、はじめて波動逸散の減衰に与える影響が支配的になる。したがってこの図には、表層を構成する土の減衰比を0.02として得られた応答倍率が示されている。この状態で円盤列を用いた近似解とNovak, Nogamiの解はよく符合し、円

盤加振時の変位解より妥当な地盤反力係数値を算定し得ることが確認された。

#### 4. 現場試験結果との対比

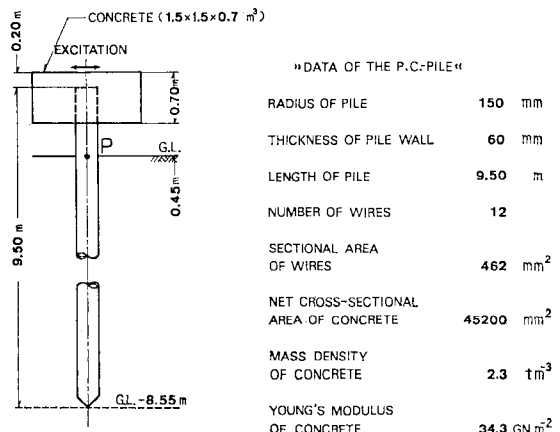
本論文で提示した円盤列を用い、実際の地盤に打ち込まれたPC杭の変位応答を算定し、実測値と比較する。対象とする杭は埼玉大学構内に打ち込まれたPC杭<sup>13)</sup>であり現場の地質柱状図を図一12に、杭の諸元を図一13に示す。図一13中のP点はセンサーを置いた点である。

この杭の応答を計算する際、地盤が地下5mを境に異なる2つの層に分かれていることに留意する必要がある。そこで円盤を支持する地盤の変形係数を文献13)にない以下のように設定する。

- ① 表層内の円盤加振に伴う表層内の各円盤の位置の地盤の変位は、地表以下の領域がすべて表層と同じ地盤で構成されているという仮定のもとで計算される。
- ② 表層内の円盤加振に伴う支持層内の変位、支持層

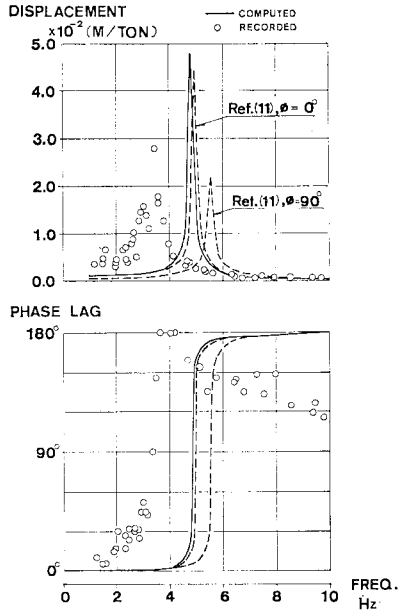
SOIL PROFILE	DEPTH [m]	N-VALUES			MASS DENSITY OF SOIL [t/m <sup>3</sup> ]	VELOCITY OF P-WAVE [m/s]	VELOCITY OF S-WAVE [m/s]
		10	20	30			
SURFACE	0				1.30	400	85
CLAY	1.45						
	2				1.60	1430	185
	3						
	4						
FINE SAND	5.10				1.62	1430	185
	6						
CLAY SAND	7.50						
	8						
	8.65						

図一12 埼玉大学構内地質柱状図



図一13 PC杭概形





図—14 PC 杭頭変位応答

内の円盤加振に伴う表層内の変位，および支持層内の円盤加振に伴う支持層内の変位は，地表以下の領域がすべて支持層と同じ地盤で構成されているという仮定のもとで計算されている。

このようにして設定されたコンプライアンスから杭頭 P 点の変位の近似解を計算し，実測値と比較したものを図—14 に示す。この近似解は，杭の地中部の分割数を 40 以上にするとおおむね落ちついた値となるので，ここでは地中の円盤の枚数を 41 枚としたときの計算値のみ示してある。またこの図には比較のため，伯野の提唱した地中の点加振時の変位解  $u_x'$  (図—8) を用いて算定した杭頭 P 点の変位応答の近似解を併記している。このモデルで質点数は，円盤の枚数と等しく設定されている。これらの近似解の中では，円盤列を用いた近似解が最も地盤を柔らかく算定しているが，それでも実測値と比べると地盤をかなり固く，また減衰を小さく評価していることが認められる。この原因として，土が引張側に抵抗を示さず，また杭頭付近の地盤のひずみが著しく大きくなることが挙げられる。伯野は地表部の S 波速度を観測値の半分に落とすことで，理論値と実験値がよく一致することを示している<sup>13)</sup>。また土岐は杭と地盤の固着が完全とする理論値において，土の強度もしくは弾性定数を 0.5 倍すれば，ほぼ実験値を説明し得ることを示している<sup>20)</sup>。

## 5. 結 語

本研究は，杭の水平方向周波数応答を，杭と等しい長

さと曲げ剛性を有する Bernoulli-Euler ばりにその中心を貫かれた剛体円盤列を用いて算定する手法の妥当性と限界を検討したものであり，この研究によって得られた結論をとりまとめると，以下ようになる。

(1) 剛体円盤列モデルによる杭基礎の水平方向周波数応答の近似解は，杭と地盤の固着を完全とした弾性波動論による解析解とよく符合した。これより杭の応答をサブストラクチャー法で解析する場合，地中の剛体円盤をその一半径方向に加振したときの地中の変位解から地盤の複素剛性を評価して差し支えないことが確認された。

(2) この手法には適用可能な周波数の上限があり，この上限は  $A(=\omega \cdot R_0 / V_s) < \pi/4$  で示される。

(3) 円盤列における円盤の間隔を小さくするに依り，杭の応答の計算値は一定の値に近づいていくので，これをもって応答の近似解とするのが妥当である。しかし杭の鉛直方向振動特性の解明に剛体円盤列を用いる場合<sup>13)</sup>に比べ，満足し得る収斂値を得るための円盤の枚数はかなり多くなる。

おわりに本研究を行うにあたって終始懇切なるご指導をいただいた東京大学工学部，松本嘉司教授，また特に剛体円盤を支持する地盤の変形係数に関して貴重なご助言を賜った東京大学生産技術研究所の田村重四郎教授，同地震研究所，伯野元彦教授に深甚なる謝意を表する次第である。

## 参 考 文 献

- 1) Tajimi, H. : Dynamic analysis of a structure embedded in an elastic stratum, Proc. 4th WCEE, Vol. 3, pp. 53~69, 1969.
- 2) Novak, M. and T. Nogami : Soil-pile interaction in horizontal vibration, Int. Jour. Earthquake engineering and structural dynamics, Vol. 5, pp. 263~281, 1977.
- 3) Novak, M. : Dynamic stiffness and damping of piles, Canad. Geotech. J., Vol. 11, pp. 574~598, 1974.
- 4) Gyoten, Y. et al. : Study on soil-pile interaction in vertical vibration, Proc. of the 5th JEES, pp. 377~384, 1978.
- 5) 小坪清真・高西照彦：杭基礎-地盤系における地盤係数の振動特性と付加質量，土木学会論文報告集，No. 305, pp. 35~46, 1981.
- 6) 後藤尚男・亀田弘行：杭基礎上の橋脚の地震応答について，土木学会論文集，No. 131, 1966.
- 7) 小坪清真・高西照彦：鋼管橋脚の耐震性におよぼす基礎地盤変形の影響，土木学会論文集，No. 148, 1972.
- 8) 土岐憲三・三浦房紀・大竹敏雄：3次元ジョイント要素による地盤-構造物系の非線形震動解析，土木学会論文報告集，No. 322, pp. 51~61, 1982.
- 9) 田村重四郎・中村 豊・加藤勝行：地中坑道に発振源がある場合の周辺地盤の震動の解析方法，土木学会論文報告集，No. 281, pp. 465~471, 1978.
- 10) 赤尾嘉彦・伯野元彦：SH 波型の動的解析における無限境界での振動的処理，第 6 回 日本地震工学シンポジウム論文集，pp. 1625~1631, 1982.

- 11) Hakuno, M. : Evaluation of dynamic properties of pile foundation based on wave dissipation theory, Proc. of 5th WCEE, 1973.
- 12) Penzien, J., C.F. Scheffey and R.A. Parmelee : Seismic analysis of bridges on long piles, Proc. of ASCE, Vol. 90, No. EM3, June, 1964.
- 13) 小長井一男 : 鉛直加振を受ける杭の応答特性に関する研究, 土木学会論文報告集, No. 325, pp. 11~21, 1982.
- 14) Muki, R. : Asymmetric problems of the theory of elasticity for a semi-infinite solid and a thick plate, Progress in Solid Mechanics, Vol. 1, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1961.
- 15) 妹沢克惟 : Further studies on Rayleigh waves having some azimuthal distribution, 震研彙報, Vol. 6, 1929.
- 16) Watson : Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, 1922.
- 17) Lamb, H. : On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid, Philosophical Trans., Royal Society, London, Ser. A, Vol. 203, pp. 1~42, 1904.
- 18) 山本鎮男 : 杭のある構造物のロッキング振動, その 1~5, 日本建築学会論文報告集, 第 125 号, pp. 24~29; 第 129 号, pp. 15~21; 第 130 号, pp. 18~23; 第 131 号, pp. 24~31; 第 132 号, pp. 32~40.
- 19) 梅村 魁・大沢 胖・河村壮一 : 埋立地盤にたつ杭支持建物の地震動観測, 関東地震 50 周年記念地震工学シンポジウム論文集, pp. 125~131, 1973.
- 20) 土岐憲三 : 橋梁基礎の地震応答解析と耐震設計, 京都大学防災研究所年報, 第 21 号 A, pp. 1~24, 1978.

(1982.12.16・受付)