

調和バランス法によるケーブルの非線形振動解析†

AN ANALYSIS OF NONLINEAR VIBRATIONS OF CABLES

BY HARMONIC BALANCE METHOD

高橋和雄*・藤本一人**・村中幸治***・田川賢****

By Kazuo TAKAHASHI, Kazuto FUJIMOTO, Koji MURANAKA

and Masaru TAGAWA

1. はじめに

ケーブルの力学的特徴は変形状に関して幾何学的非線形性を示すことである。したがって、ケーブルで構成される構造物を設計するにあたってはその幾何学的非線形挙動を十分に把握することが重要である。ケーブルの静的問題については1970年代の構造解析法の進歩と電子計算機の発達によって、非線形挙動を対象とした研究が活発に行われるようになり解析手法が体系化されている^{1),2)}。もちろん、これらの解析に基づいて設計されたケーブルは静的荷重に対して妥当な設計強度を有するといえるが、現実の風荷重や走行荷重に対する的確な配慮が困難なためかなりの大きさの振幅を伴う振動現象が生ずる事例が多いことが知られている。このために、ケーブルの動的な幾何学的非線形挙動を体系的に明らかにすることが望まれる。

これまでのところ、ケーブルの非線形振動問題に関する研究は、Ali³⁾、山口ら^{4)~6)}によって行われている。すなわち、Ali³⁾はケーブルの三次元非線形運動方程式を差分法を用いて離散化のうえ、風荷重を受けるケーブルの非線形応答を取り扱っている。また、山口らはケーブルの三次元非線形運動方程式を誘導のうえ⁷⁾、線形固有振動数に等しい加振振動数をもつ正弦波外力を受ける場合のケーブルの非線形過渡応答を時間応答解析を行うことによって求めている^{5),6)}。これより、ケーブルの非線形振動の基本的な性質を手際よく解明している。これらの研究によってケーブルの非線形振動の解明は大きく前進したが、時間座標には数値解法が採用されている。数

値解法は解析上のわずらわしさがなく、かつ非定常な外力を受ける場合の応答を明らかにするための有力な方法である。しかし、シミュレーション計算であるために、非線形振動時の振動数と振幅との関係や、解の唯一性が成立しないために生ずる複数個の非線形応答および通常零である非線形分岐応答などの非線形固有の現象はまだ十分に解明されているとはいえないようである。ケーブルの非線形振動特性を明らかにするためには、上述の諸点を取り扱える非線形振動論に基づく解析的な方法を適用することが必要である。

以上の観点から本論文は山口ら⁷⁾によって誘導された連続体としての周期外力を受けるケーブルの三次元非線形運動方程式の定常応答を空間座標には Galerkin 法、時間座標には Fourier 級数論に基づく調和バランス法⁸⁾を用いて解析するものである。解析の手順は基準座標に関する多自由度系の非線形運動方程式を調和バランス法によって連立非線形代数方程式に変換し、これを数値解析の対象とするものである。本解法は空間および時間の座標について解析的な取扱いで、かつ、連立非線形代数方程式を直接解くものである。したがって、本解法によれば非線形振動の振動数と振幅との関係の情報の把握および非線形固有の解析が可能で、しかもパラメーター解析も容易である。

周知のように線形振動の応答解析では固有振動性が重要であるが、非線形振動においても自由振動特性は非線形振動の応答を支配する重要な量である。本解法によれば、かかる外力の大きさが零である非線形自由振動特性を明らかにすることができる。

本論文では解法の展開ののち、ケーブルの面内および面外非線形自由振動特性に及ぼす各種の形状・材料パラメーターの影響についてパラメーター解析するとともに、面内加振による面内非線形応答および面内加振による面外非線形分岐応答^{注1)}について時間応答解析では得にくい知見を中心に述べるものである。

† 本研究は土木学会昭和56年度年次学術講演会 I-187, 188で発表済みである。

* 正会員 工修 長崎大学助教授 工学部土木工学科

** 川田工業(株)

*** 正会員 長崎県庁

**** 学生会員 長崎大学大学院工学部土木工学科

2. ケーブルの運動方程式⁷⁾

図-1 に示すような座標系のもとにおける 完全可撓性、伸張性を仮定した周期外力を受けるケーブルの三次元非線形運動方程式は次のように与えられる。

$$L_1(u, v, w) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left\{ \left(C_0^2 \frac{1}{x_e'} + C_1^2 x_e'^2 \right) \frac{\partial u}{\partial s_e} + C_1^2 x_e' y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right\} - C_1^2 \frac{\partial}{\partial s_e} \left[\left(x_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} + y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \frac{\partial u}{\partial s_e} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s_e} \right)^2 \right\} \left(x_e' + \frac{\partial u}{\partial s_e} \right) \right] - \frac{p_x \cos \Omega t}{\rho_0} = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$L_2(u, v, w) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left\{ \left(C_0^2 \frac{1}{x_e'} + C_1^2 y_e'^2 \right) \frac{\partial v}{\partial s_e} + C_1^2 x_e' y_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} \right\} - C_1^2 \frac{\partial}{\partial s_e} \left[\left(x_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} + y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \frac{\partial v}{\partial s_e} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s_e} \right)^2 \right\} \left(y_e' + \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \right] - \frac{p_y \cos \Omega t}{\rho_0} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$L_3(u, v, w) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left(C_0^2 \frac{1}{x_e'} \frac{\partial w}{\partial s_e} \right) - C_1^2 \frac{\partial}{\partial s_e} \left[\left(x_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} + y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \frac{\partial w}{\partial s_e} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s_e} \right)^2 \right\} \frac{\partial w}{\partial s_e} \right] - \frac{p_z \cos \Omega t}{\rho_0} = 0 \dots \dots \dots (3)$$

ここに、 u, v : ケーブルの面内水平および鉛直変位、 w : ケーブルの面外変位、 t : 時間、 s_e : ケーブルの初期形状に沿う曲線座標、 $C_0 = \sqrt{H_e/\rho_0}$: ケーブルの横波伝播速度、 H_e : ケーブルの初期水平張力、 ρ_0 : ケーブル

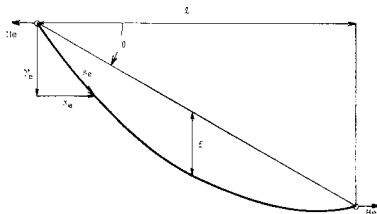


図-1 ケーブルの一般図

の単位長さ当たりの質量、 $C_1 = \sqrt{ES/\rho_0}$: ケーブルの縦波伝播速度、 E : ヤング率、 S : 断面積、 p_x, p_y, p_z : 荷重強度、 Ω : 荷重の円振動数、 x_e', y_e' : 初期形状の s_e による常微分。

また、図-1 において、 θ : 支点間傾斜角、 f : ケーブルサグ ($= (y_e - x_e \tan \theta)_{\max}$)、 l : 支点間水平距離。

3. 解 法

(1) Galerkin 法による時間に関する非線形連立常微分方程式の誘導^{8),9)}

式 (1), (2) および (3) の解を直接求めることは不可能であるから、これらを Galerkin 法を用いて基準座標に関する多自由度系の運動方程式に変換する解法を採用する。

$$\left. \begin{aligned} u &= l \sum_{i=1}^{\infty} P_i(t) U_i(s_e) \\ v &= l \sum_{i=1}^{\infty} P_i(t) V_i(s_e) \\ w &= l \sum_{i=1}^{\infty} Q_i(t) W_i(s_e) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

ここに、

P_i, Q_i : 未知の時間関数

$$\left. \begin{aligned} U_i(s_e) &= \sum_{m=1}^{\infty} P_{xi}^m \sin \frac{m\pi s_e}{l^*} \\ V_i(s_e) &= \sum_{m=1}^{\infty} P_{yi}^m \sin \frac{m\pi s_e}{l^*} \\ W_i(s_e) &= \sum_{m=1}^{\infty} P_{zi}^m \sin \frac{m\pi s_e}{l^*} \end{aligned} \right\} \text{面内線形振動の第 } i \text{ 次固有振動形}$$

l^* : 初期ケーブル長

式 (4) を式 (1), (2) および (3) に代入して、Galerkin 法を適用すれば基準座標 P_n および Q_n に関する次の連立非線形常微分方程式群が得られる。

$$\left. \begin{aligned} m_n^i \ddot{P}_n + k_n^i P_n + k^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} k_{jl}^{in} P_j P_l &+ \frac{1}{2} k^2 \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} k_{qp}^{in} Q_q Q_p \\ &+ \frac{1}{2} k^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k_{jlm}^{in} P_j P_l P_m \\ &+ \frac{1}{2} k^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} k_{jqr}^{in} P_j Q_q Q_r \\ &= 8 r^* f_n^i \cos \omega t \\ m_n^o \ddot{Q}_n + k_n^o Q_n + k^2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} k_{pl}^{on} Q_p P_l &+ \frac{1}{2} k^2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k_{plm}^{on} Q_p P_l P_m \\ &+ \frac{1}{2} k^2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} k_{pqr}^{on} Q_p Q_q Q_r \\ &= 8 r^* f_n^o \cos \omega t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

注 1) 山口らは文献 4) において非線形分岐応答を面内・面外とも 1 自由度系と仮定して調和バランス法の 1 項近似を用いて解析している。これに対して、本研究はケーブルを多自由度系として、調和バランス法の有限項近似を用いて解析するものである。

ここに、 $n=1, 2, \dots, k=C_1/C_0$: ケーブルの縦波-横波伝播速度比、 $r^*=\rho_0 g l / 8 H_e$: ケーブルの初期形状を放物線で近似した場合のサグ比、 g : 重力の加速度、 $m_n^i, k_n^i, k_{ji}^{in}, k_{qp}^{in} \dots m_n^o \dots f_n^o$: Galerkin 法による積分項で、初期形状と面内・面外の固有振動形および荷重の分布形状からなる定数 (文献 6) の p. 45 の補遺参照)、suffix i は面内を、また、suffix o は面外を表わす。上式において、時間関数 P_n および Q_n についてはケーブルのサグ比 $r=f/l$ と同様にケーブルの支点間水平距離 l で無次元化されている。また、時間については傾斜した弦 (サグ比 $r=0$ の場合) の 1 次の固有円振動数 ω_1 の逆数 $l/(\pi C_0 \sqrt{\cos \theta})$ で無次元化されている。また、無次元加振円振動数 ω は加振円振動数 Ω を ω_1 で無次元化したものである。

式 (5) は面内・面外の基準座標 P_n, Q_n に関する連立非線形常微分方程式である。非線形項にはケーブルの弾性伸びに起因する 3 次の項のほか、サグが存在するために 2 次の項が含まれる。

(2) 調和バランス法による連立非線形常微分方程式の解法^{8), 9)}

連立非線形常微分方程式の定常解を求めるにあたっては非線形項が大きくなってでも有効性を失わない調和バランス法を適用する。式 (5) の非線形項に 2 次および 3 次の非線形項が同時に含まれるために、 P_n, Q_n の外力と同じ周期解を次のように Fourier 級数の形に仮定する。

$$\left. \begin{aligned} P_n &= \sum_{e=0}^{\infty} a_e^n \cos e\omega\tau \\ Q_n &= \sum_{e=0}^{\infty} b_e^n \cos e\omega\tau \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 a_e^n, b_e^n : 未定定数

式 (6) を式 (5) に代入して調和バランス法を適用すれば、 a_e^n, b_e^n を求めるための連立非線形代数方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} &(k_n^i - m_n^i e^2 \omega^2) a_e^n + k^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} k_{jl}^{in} f_{jl}^e \\ &+ \frac{1}{2} k^2 \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} k_{qp}^{in} f_{qp}^e \\ &+ \frac{1}{2} k^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k_{jlm}^{in} f_{jlm}^e \\ &+ \frac{1}{2} k^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} k_{jqr}^{in} f_{jqr}^e \\ &= 8 r^* f_n^i \delta_{e1} \\ &(k_n^o - m_n^o e^2 \omega^2) b_e^n + k^2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} k_{pl}^{on} f_{pl}^e \\ &+ \frac{1}{2} k^2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k_{plm}^{on} f_{plm}^e \\ &+ \frac{1}{2} k^2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} k_{pqr}^{on} f_{pqr}^e \\ &= 8 r^* f_n^o \delta_{e1} \end{aligned} \right\}$$

$$\dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $e=0, 1, 2, \dots, \delta_{e1} = \begin{cases} 1 & e=1 \\ 0 & e \neq 1 \end{cases}$, $f_{jl}^e, f_{qp}^e, f_{jlm}^e, f_{jqr}^e, f_{pl}^e, f_{plm}^e, f_{pqr}^e : a_e^j, a_e^l$ などの関数で e を 0, 1, 2, 3 の 3 項まで採用した場合については **Appendix A** に示すとおりである。

本研究の解の決定方程式 (7) は連立非線形偏微分方程式 (1), (2) および (3) の定常解を空間には基準関数 (式 (4)), 時間には Fourier 級数 (式 (6)) を用いて Fourier 級数の展開係数に関する連立非線形代数方程式に変換して得られたものである。これを適当な初期値のもとに Newton-Raphson 法の繰返し計算を用いて数値解析すれば、必要な実根を求めることができる。

(3) 振幅比の定義

式 (4) によって与えられたケーブルの空間的・時間的変動は座標 (s_e, t) によって大きく異なる。本論文では面内振動については水平ケーブルの場合、ケーブルの変位が最下点に達したとき ($\tau=0$) の中央点の面内鉛直変位 (対称振動の場合) および 7/10 点の鉛直変位 (逆対称振動の場合) を振幅比 A として採用する注2)。

$$A = v/l = \sum_{i=1}^{\infty} P_i(0) V_i(s_e) \dots\dots\dots (8)$$

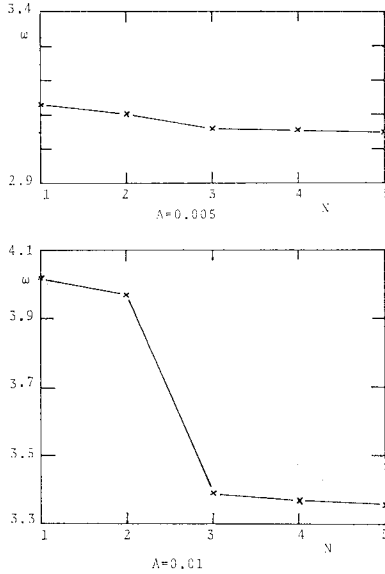
ここに、 $s_e=0.5 l^*$ または $0.7 l^*$
また、傾斜ケーブルの場合には水平ケーブルの鉛直方向に対応する傾斜した弦の軸に対して直角方向の合成変位を用いて定義し直すことにする。また、面外振動については $\tau=0$ の中央点の面外変位を用いて振幅比 A として採用した。

(4) 計算自由度数の設定

ケーブルの非線形振動特性を明らかにするためには、加振振動数と同一の基本波からなる主調波応答 (a_1^n)、2 次の非線形項から生ずる静的応答 (a_0^n) および 2 倍の高調波応答 (a_2^n)、および 3 次の非線形項から生ずる 3 倍の高調波応答 (a_3^n) の各項が最低必要であるから、 $e=0, 1, 2, 3$ の 4 項が時間座標の離散化に入用である。本研究では 1 次振動の主調和振動 ($e=1$ の $a_1^!$) 近傍の非線形振動に注目するために、 $e=1$ が卓越する。 $e=2, 3$ の項は補正項となる。したがって、本研究では非線形振動特性を説明するために e を 3 まで採用した解析を行う。

また、空間座標の離散化に必要な自由度数については、はりおよび薄板に対して確認している⁸⁾が、ケーブルの面内振動にはこれらの場合と異なって 2 次の非線形

注 2) ここで振幅比とは、振幅をスパン長で無次元化した無次元振幅を意味する。



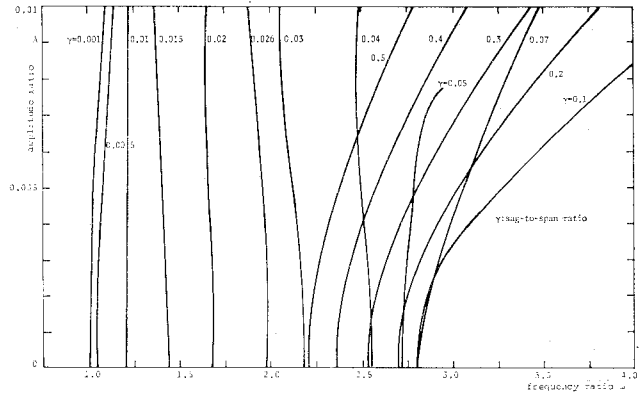
図—2 解の収束状況

項が含まれるために、再度、解の収束を検討する。図—2 は水平ケーブル（サグ比 $r=0.07$ ，伝播速度比 $k=30$ ，傾斜角 $\theta=0^\circ$ ）の面内対称 1 次振動の非線形自由振動について計算自由度 $n=N$ と振動数比 ω との関係を振幅比 $A=0.005$ と 0.01 の 2 ケースについてプロットしたものである。振幅比が小さい $A=0.005$ の場合には自由度数は 1 で十分であるが、振幅比が大きい $A=0.01$ の場合には 1 自由度ではケーブルの非線形性を追従することが無理である。図のように、3 自由度程度が必要である。本論文では振幅比 A が 0.01 以下を対象とし、面内振動の特性計算では 3 自由度まで採用する（Appendix B 参照）。また、非線形性が小さい面外振動の場合には、面内・面外それぞれ 2 自由度を用いることにする。

4. 面内非線形振動

(1) 面内非線形自由振動特性

本節ではケーブルの面内非線形自由振動の振動数と振幅との関係をケーブルの固有振動性状を支配する各種の無次元パラメータ⁷⁾（サグ比 r ，傾斜角 θ ，伝播速度比 k ）のもとに解析する。自律系の非線形自由振動の振動数と振幅との関係は外力の大きさが零である場合の背骨曲線 (back bone curve) に相当し、非線形振動の応答を支配する重要な量である。振幅の大きさによってケーブルの非線形自由振動数がどのように変動するかを示すものである。これは正弦波外力を受ける非線形時間応答解析によっては得にくい量である。以下の論文では大振幅振動が生じやすい最低次の固有振動形をもつ自由度に

図—3 水平ケーブルの対称非線形自由振動 ($k=30$, $\theta=0^\circ$)

注目して非線形自由振動特性を明らかにする。

a) サグ比 r の影響

本研究では文献 7) の p. 33 の図—3 に示されているサグ比 r による固有振動数の変化をもつ水平ケーブル ($k=30$) の対称 1 次振動に着目して非線形自由振動特性を明らかにする。この対称振動の振動形の遷移は同じく文献 7) の p. 33 の図—4 (a) に示されている。

図—3 は水平ケーブル ($k=30$) の対称 1 次振動について非線形自由振動の振動数比 ω (非線形自由振動数/弦の 1 次の固有振動数) と振幅比 A との関係をサグ比 r をパラメータにプロットしたものである。図—4 はケーブルの無次元初期形状 $r=y_e/l$ と非線形自由振動の無次元鉛直変位 $\bar{v}=v/l$ の時間的変動を合成したものである。線形振動では振動数は振幅比の大きさに無関係である。これに対して、非線形振動系では自由振動数は振幅比によって変化する。なお、線形振動の自由振動数は、振幅比 $A=0$ の微小振動の仮定で得られるものである。図—3 の横座標軸上の振動数比 ω は線形自由振動数に対応する。図—3 に示すようにケーブルの場合にはその振動数比と振幅比との関係はサグ比 r によって著しく異なるといえる。

図—3 より明らかなようにケーブルの非線形自由振動特性はサグ比 r によって次の 3 グループに大別される。すなわち、(i) $r=0.001\sim 0.01$ ，(ii) $r=0.015\sim 0.04$ ，(iii) $r>0.05$ の 3 ケースである。この (i)~(iii) の区分は上述の文献 7) p. 33 の図—3 のサグ比による線形振動数の変化に対応している。

(i) サグ比 $r=0.001\sim 0.01$ のケーブルの形状が弦に近い場合には、振動数比と振幅比との関係は $r=0$ に相当する弦と同様に 3 次の非線形項が支配的な弱い硬化ばね特性を示し、振幅比の増大とともに振動数比が増加する。このサグ比の領域では図—4 (a) のようにケーブルは $r=0$ の弦の軸をはきんでほぼ上下対称に振動しており、ケーブルには振幅による弾性伸びからなる変動引

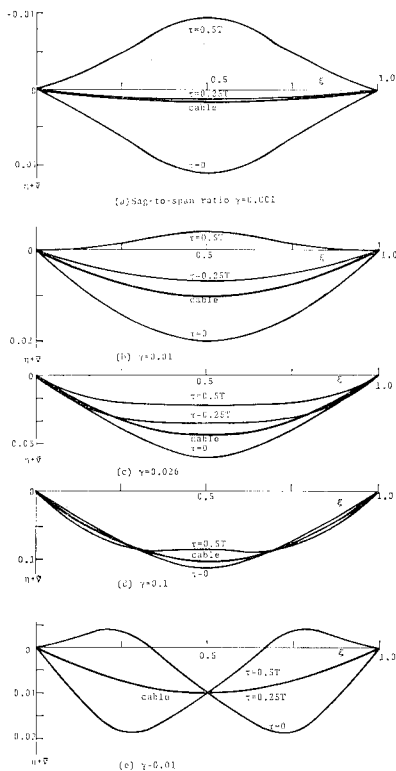


図-4 水平ケーブルの非線形自由振動の振動形の時間的変動

張力が生じている。このために、振動中にケーブルの全水平張力が初期状態より増大するために振動数比と振幅比との関係は硬化ばね特性を示す。

(ii) サグ比 $r=0.015\sim 0.04$ の範囲の振動形の遷移領域²⁾のケーブルでは振幅比の増大とともに振動数比が減少する弱い軟化ばね特性を示す。この原因はこのサグ比と振幅比の領域では2次の非線形項が支配的となるためである。すなわち、図-4 (b), (c) に示すように、ケーブルの2次の非線形項に起因する静的応答 $a_0^{(2)}$ が生じている。この静的応答は振動の平衡点を静的平衡位置から移動させる効果をもち、ケーブルの初期水平張力をキャンセルする方向(鉛直上方)に作用するために、ケーブルの全水平張力は振動中に減少する。したがって、このサグ比の範囲ではケーブルの振動数比と振幅比との関係は軟化ばね特性を示す。図-4 (b), (c) のようにかなりの大きさの静的応答が生じているが^{注3)}、この2次の非線形項が振動数比と振幅比との関係に及ぼす影響は小さいといえる。なお、2次および3次の非線形項が同

注 3) 非線形自由振動においても線形振動の解である基本波(式(6)で $e=1$)の $\cos \omega \tau$ の項が卓越するから、基本波の項が零となる $\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega}$ のときの変位が静的応答にほぼ対応する。

時に含まれる非線形振動系では一般に2次の非線形項は振幅比が比較的小さいときに効いて、振幅比が大きくなると3次の非線形項が支配的となる特性を有するので¹⁰⁾、振幅比がさらに大きい領域では硬化ばね特性を有することが予想される(図-3では $r=0.04$ のケーブルの $A=0.008\sim 0.01$ で現われている)。

(iii) さらに、サグ比が増大して ($r > 0.05$)、ケーブルの対称1次振動の振動形が一段階高次の弦の3次振動に対応する振動形に遷移した⁷⁾にはサグ比の増大とともに振動数比と振幅比との関係は再び3次の非線形項が支配的な硬化ばね特性を示し、その割合は弦の場合よりも大きい。非線形性はサグ比の増加とともに増大し、 $r=0.1$ 付近で最も大きく、サグ比がそれ以上増大すると非線形性は逆に減少してくる。図-4 (d) のように振動形が遷移した後は付加静的荷重の影響は小さくなり、ケーブルは初期形状をほとんどほぼ上下対称に振動している。

以上のように、水平ケーブルの対称非線形自由振動の振動数比と振幅比との関係は線形自由振動特性⁷⁾と密接に関係して、サグ比の影響を著しく受けることがわかる。ケーブルの振動数比と振幅比との関係は特定のサグ比においては弦の場合とは根本的に異なる弱い軟化ばね特性を有する。これは振動数比 ω と振幅比 A との関係に及ぼす2次の非線形項が支配的となるサグ比の領域が存在するためである。この2次の非線形項の評価は式(6)において、 $e=1$ の主調波応答のほか $e=0$ および2の項を選んで始めて得られるものである。

図-5は水平ケーブルの逆対称1次振動の非線形自由振動数の振動数比 ω と振幅比 A との関係を示したものである。逆対称振動の場合には、3次の非線形項のみが含まれるために⁹⁾、サグ比に無関係に振動数比と振幅比との関係は弦と同じ硬化ばね特性を示す。図-5から明らかなようにサグ比の

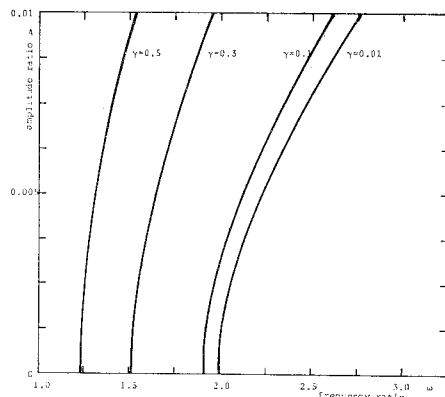


図-5 水平ケーブルの逆対称非線形自由振動 ($k=30, \theta=0^\circ$)

増大とともに非線形性は小さくなる。図-4 (e) に示すように、本例ではケーブルは初期形状をはさんで上下対称に振動する。

b) 伝播速度比 k の影響

図-6 はサグ比 $\gamma=0.1$ 、傾斜角 $\theta=0^\circ$ のケーブルの対称および逆対称 1 次振動の非線形自由振動に及ぼす材料パラメーターである縦波-横波伝播速度比 k の影響をプロットしたものである。線形振動の場合⁷⁾と異なって、非線形振動の場合には非線形項全体に k が係数としてかかるために (式 (5) 参照)、2 次および 3 次の非線形項ともに、 k の影響を受ける。図-6 に示すように対称・逆対称振動の区別なく k が大きくなるほど非線形性が増大する。

c) 傾斜角 θ の影響

図-7 は $k=30$ とした場合の傾斜ケーブル ($\theta=30^\circ$) の 1 次振動の非線形自由振動の振動数比 ω と振幅比 A との関係を示すサグ比 γ をパラメーターにプロットしたものである。図のように、傾斜ケーブルの非線形性の大きさは水平ケーブルの場合よりも小さくなっている。これは振幅をスパン長で無次元化しているために見かけ上非線

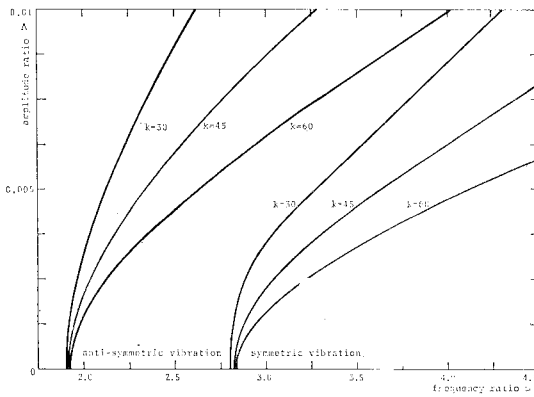


図-6 水平ケーブルの非線形自由振動 ($\gamma=0.1, \theta=0^\circ$)

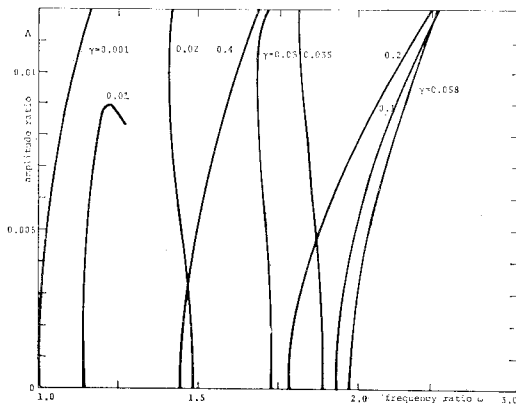


図-7 傾斜ケーブルの非線形自由振動 ($k=30, \theta=30^\circ$)

形性が小さくなることによるものである。線形振動の固有振動形⁷⁾から予想されるように、傾斜ケーブルの非線形自由振動はサグ比が小さく弦に近い場合には水平ケーブルの対称非線形自由振動と、振動形が遷移した後は水平ケーブルの逆対称非線形自由振動と同じ挙動を示すものである。傾斜ケーブルの場合においても水平ケーブルの場合と同様に、振動形の遷移領域内のサグ比 ($\gamma=0.008\sim 0.04$) では振動数比と振幅比との関係は弱い軟化ばね特性を示す。なお、図-3 の $\gamma=0.05$ および図-7 の $\gamma=0.01$ のケーブルにおいて非線形自由振動の振動数比と振幅比との関係を示す曲線が折れ曲がっている部分がある。これは 1 次振動の主調波応答 (a_1^1) と 2 次振動の 3 倍の高調波応答 (a_3^2) の間に非線形連成振動が生じ、2 次振動の高調波共振の影響が効いてくるためである。本論文では最低次の固有振動形にのみ注目しているので、連成が生じた後の振動数比 ω と振幅比 A との関係は省略されている。

(2) 面内非線形強制振動

本解法によれば、非線形強制振動の応答曲線を求めることができる。サグ比 $\gamma=0.1$ についてケーブルの中央点に鉛直方向に集中荷重される対称加振 (荷重強度をケーブルの単位長さ当たりの重量で無次元化した無次元荷重強度 $p=0.025$) の場合の 1 次固有振動数近傍の応答曲線を求めれば、図-8 に示すとおりである。図中において横軸は加振振動数比 ω で、縦軸は応答の振幅比 A である。図中の実線は荷重の時間関数の同位相の応答振幅に、点線は逆位相の応答振幅にそれぞれ対応するものである。応答曲線に付した記号 a_m^n は n 次振動の m 倍の高調波成分が卓越することを示すものである。本研究では連立非線形代数方程式を直接解いているので、図-8 に示すように同一の振動数に対して複数個存在する非線形応答が求められる。

線形応答の場合には 1 次の固有振動数 $\omega=2.80$ の近傍で加振振動数と同じ振動数をもつ基本波からなる主調波応答 a_1^1 による共振のみが生ずる。これに対して、2

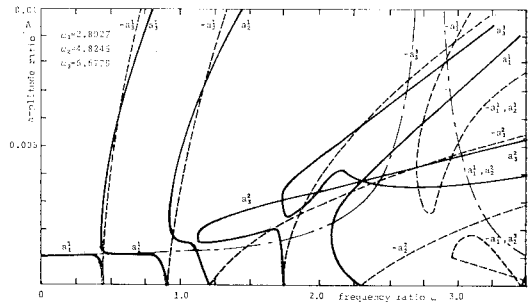


図-8 水平ケーブルの面内対称非線形強制振動 ($k=30, \gamma=0.1, \theta=0^\circ$)

表-1 水平ケーブルの面内対称非線形応答の一覧表

mode No.	1			2		3	
	1	2	3	2	3	2	3
order of harmonic							
frequency	ω_1 2.8027	$\omega_1/2$ 1.4014	$\omega_1/3$ 0.9342	$\omega_2/2$ 2.4123	$\omega_2/3$ 1.6082	$\omega_3/2$ 3.3390	$\omega_3/3$ 2.2260
inplane response	(a_1^1, a_2^2) $(a_1^1, -a_2^2)$	a_2^1	a_3^1	(a_2^2, a_1^1)	a_3^2	$(a_2^3, -a_1^1)$	a_3^3
out-of-plane response	$(-a_1^1, a_2^2)$ $(-a_1^1, -a_2^2)$	$-a_2^1$	$-a_3^1$	$(-a_2^2, a_1^1)$	$-a_3^2$	$(-a_2^3, -a_1^1)$	$-a_3^3$

次および3次の非線形項が同時に含まれるケーブルの対称非線形応答の場合にはこのほかにこれらの振動数領域に1次振動のほかに2次および3次振動の2倍の高調波応答 (a_2^m), 3倍の高調波応答 (a_3^m) による共振および a_2^m に付随する静的応答 (a_0^m) が生ずる。これらの動的応答による共振は $\omega = \omega_n/m$ ($m \geq 1$) 付近の振動数の領域で生ずる。また、非線形振動系ではすべての自由度が非線形項を介して連成するために2つ以上の固有振動形をもった自由度間の連成応答が生じている。各種の共振が生ずる振動数比と連成の様子を示せば、表-1 のとおりである。表-1 において、 a_m^n は荷重の時間関数と同位相の n 次振動形の m 倍の高調波応答が単独に生ずることを意味し、 $(a_m^n, a_m^{n'})$ は n 次振動形の m 倍の高調波応答と n' 次振動形の m' 倍の高調波応答が連成することを意味する。また、 $-$ の符号は荷重の時間関数と逆位相の応答が生ずることを意味する。表-1 に示すとおりに、各種の応答が生ずる振動数が離れている場合には単一の振動形をもった応答が生ずる。これに対して、応答が生ずる振動数が接近している場合には複数個の振動形をもった連成応答が生ずる。

以上のように、非線形振動系では応答振幅によって非線形自由応答の振動数が変動し、かつ高調波応答が生ずるために共振が生ずる振動数領域は線形振動の場合よりもはるかに広がる。また、加振振動数比によって非線形応答の振幅は大いに異なるといえる。当然ながら、固有振動数に等しい振動数をもつ外力を入力しても最大応答は得られない。

5. 面内・面外非線形振動

(1) 面外非線形自由振動

ケーブルは面外方向にサグをもたないので、ケーブルの面外の運動方程式に面外変位 w に関して2次の非線形項が含まれない(式(3)参照)。これより、弦と同様に3次の非線形項のみが効いているので、面外振動は奇数次の高調波成分のみが含まれることになり、ケーブルの面外振動はケーブルの初期状態の面をはさんで左右対

称に生ずる。したがって、面外非線形振動については主調波成分と3倍の高調波成分が生ずる ($b_0^i=0, b_1^i \neq 0, b_2^i=0, b_3^i \neq 0$)。

一方、面内の運動方程式の中に面外の項 $(\partial w / \partial s_e)^2$ の項が存在するので、面外振動によって面内静的付加荷重と面内振動数の2倍の高調波成分をもつ動的付加荷重による面内応答が生ずる ($a_0^i \neq 0, a_1^i=0, a_2^i \neq 0, a_3^i=0$)。

数値的検討によれば、ケーブルの面外非線形振動による面内静的付加荷重は常にケーブルの初期形状を打ち消す方向(鉛直上方)の面内静的応答 (a_0^i) を生ずる。また面内動的付加荷重は面内の共振点 $\omega_1^i/2$ より小さい振動数領域では面外振動と逆位相で、共振点 $\omega_1^i/2$ より大きい振動数領域では面外振動と同位相である。

図-9, 10 は面外1次振動の非線形自由振動の振動数比 ω と振幅比 A_w との関係をサグ比 r をパラメータにプロットしたものである。図-9 が面外と面内の共振点が離れている場合で、図-10 がサグ比 $r=0.02 \sim 0.04$ の両者が接近している場合である。図-11 は面外非線形自由振動と連成する面外の2倍の振動数をもつ面内非線形応答の振動数比 ω と振幅比 A_p との関係を片対数グラフに示したものである。なお、この面外対称振動によって面内対称振動のみが加振され、面内逆対称振動は加振されない。

図-9 に示すように、ケーブルの面外非線形自由振動は弦と同様に3次の非線形項が支配的な硬化ばね特性を

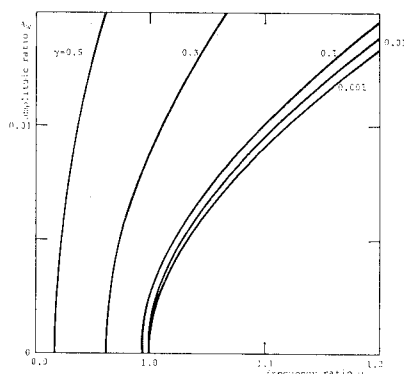
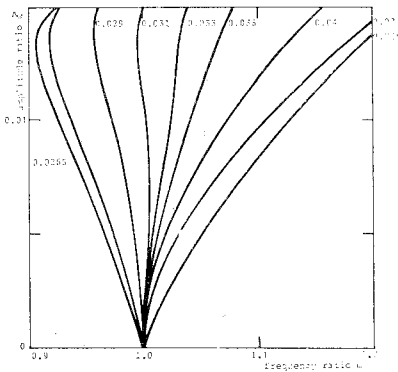
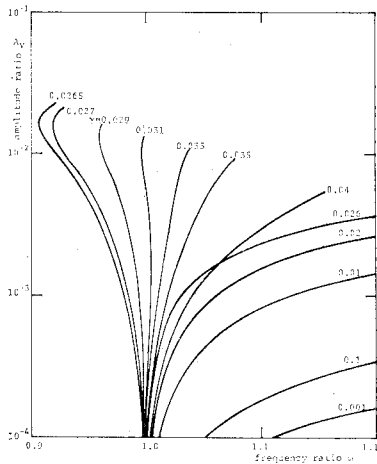


図-9 水平ケーブルの面外非線形自由振動 ($k=30$, その1)



図一10 水平ケーブルの面外非線形自由振動 ($k=30$, その2)



図一11 水平ケーブルの面外非線形自由振動に伴う面内非線形応答

示し、サグ比の増大とともに非線形性が小さくなる。図一11に示したようにこのサグ比および対象とした面外振動の振幅の範囲では、付随する面内非線形応答は小さい。したがって、面外振動の振動数比と振幅比との関係は面内振動の影響をほとんど受けない。一方、図一10の面内振動と面外振動の共振点近傍では、面外非線形自由振動の振動数比と振幅比との関係はサグ比 r にきわめて敏感である。 $r=0.026$ が同位相の面内振動が最も大きく加振される場合で、 $r=0.0265$ が逆位相の面内振動が最も大きく加振される場合である^{5), 6)}。図一11に示すようにこのサグ比の領域では大きな面内非線形応答が生じている。この付随する面内非線形応答によって、ケーブル全体の剛性が初期状態から変化してくるために、面外振動の振動数比と振幅比との関係は面内応答の影響を受けることになる。すなわち、サグ比 $r=0.02\sim 0.026$ の面外振動と同位相の応答が生ずる場合には、面内応答によってケーブルの剛性が高められて、ケーブルの面外

非線形性が増加する。また、サグ比 $r=0.0265\sim 0.04$ の面外振動と逆位相の面内応答が生ずる場合には、ケーブルの剛性が弱められる。この面外と面内振動の相互作用によって、ケーブルの面外非線形自由振動はこのサグ比における面内対称自由振動の振動数比と振幅比との関係と同様な軟化ばね特性を示す領域が存在する。これはケーブルの三次元構造特性が著しく現われた例といえる。

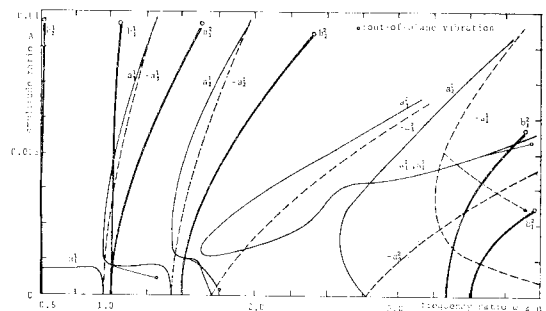
以上によって、ケーブルの面外非線形自由振動の振動数比と振幅比との関係は弦と同様に硬化ばね特性を示すが、面内振動と面外振動の共振点近傍では面外非線形自由振動の振動数比と振幅比との関係は面内応答の影響を著しく受けることが明らかにされた。

なお、傾斜ケーブルの場合には、いずれのサグ比に対しても $\omega_1/2 < \omega_1^0$ のみに対応するために、ケーブルの面外非線形自由振動の振動数比と振幅比との関係は硬化ばね特性を示すことが予想される。

(2) 面内加振による面外非線形分岐応答

面内加振によって面内非線形応答が常に生ずるが、面外振動は直接加振されないために通常は零である。しかし、面内変位の項が面外の運動方程式に係数項として含まれるので、特定の振動数領域で面外係数励振振動が生ずる^{9), 11)}。本研究では非線形方程式を直接解いているので、係数励振振動が生ずる分岐点と分岐後の応答を求めることができる。この問題は面内・面外非線形連成応答用のプログラムを用いてそのまま解析することができる。すなわち、まず面外非線形応答の初期値を零とおいて、面内加振による面内非線形応答のみを求める。次いで、面外非線形分岐応答が生ずる可能性がある振動数の領域で、面外振動の振幅成分に零以外の初期値を設定して連立非線形代数方程式を解けば面外非線形分岐応答と分岐後の面内・面外非線形連成応答が明らかにされる。

図一12は水平ケーブル($r=0.1$, $k=30$)の中央点に集中荷($p=0.025$)される場合について面内非線形応答と面外非線形分岐応答を示したものである。なお、面



図一12 面内加振による水平ケーブルの面外非線形分岐応答

外の自由度として、対称1次および2次振動の2個を採用している。図中において大きい方の○印を付した肉太の実線が面外非線形分岐応答に、小さい方の○印を付した細い実線が面外非線形分岐応答に伴う面内非線形分岐応答にそれぞれ対応している。また、○印のない応答は分岐を伴わない通常の面内非線形分岐応答のみを示すものである。

図において、面外対称1次振動の固有振動数 $\omega_1^o = 0.995$ の1倍 ($\omega \approx 1.0$) および1/2倍 ($\omega \approx 0.5$) において面外1次振動形をもった非線形分岐応答が生じている。また、面外2次振動の固有振動数 $\omega_2^o = 2.964$ の1/2倍 ($\omega \approx 1.5$) および1/3倍 ($\omega \approx 1.0$) 付近において、面外対称2次振動の振動形をもった応答が生じている。面外の2次固有振動数 ω_2^o 付近に生ずるはずの面外2次振動の分岐点は $\omega = 3.0$ よりもかなり高い加振振動数の領域で生じている。 $\omega = 3.0$ 付近の加振振動数の領域では面内非線形分岐応答の振幅が大きいために、ケーブルの剛性が初期状態から変化して増加したことによるものと考えられる。また、非線形分岐応答が生ずる振動数領域で複数個の面内非線形分岐応答が存在する場合には、複数個の面外非線形分岐応答が生じている。

次に、面外非線形分岐応答が生じた後の面内非線形分岐応答に注目すれば、面内非線形分岐応答の振幅は通常の面内非線形分岐応答のそれよりも小さい。この原因は面内振動のエネルギーが面外振動のエネルギーに移行することによるものと考えられる。

以上のように、本解法によれば面外非線形分岐応答が生ずる分岐点と分岐後の三次元非線形分岐応答を明らかにすることができることが示された。

6. 結 語

本論文はケーブルの三次元非線形振動を多自由度系の非線形振動に変換して調和バランス法を用いて解析したものである。本解法は空間については基準関数、時間についてはFourier級数を用いた解析的な取扱いであるためにケーブルの非線形振動の振動数と振幅との関係に及ぼすパラメータの影響および強制振動の非線形分岐応答を明らかにすることができた。得られたいくつかの知見を要約すると、

(1) 本論文によって既往の研究ではやや曖昧であったケーブルの面内および面外振動の振動数比と振幅比との関係(非線形特性の種類と大きさ)が各種の形状・材料パラメータのもとに明らかにされた。

(2) ケーブルの面内振動の振動数と振幅との関係は一般に硬化ばね特性を示すが、特定のサグ比の領域においては弦の場合と根本的に異なる弱い軟化ばね特性を示

す。

(3) ケーブルの面外振動の振動数と振幅との関係は弦と同じ硬化ばね特性をもつ。面内と面外振動の共振点の近傍では振動数と振幅との関係は面内連成振動の影響を著しく受ける。

最後に本研究の数値計算に協力いただいた卒業生 戸田和之氏(現・鉄道建設公団)に記して感謝する次第である。なお、本研究の数値計算には九州大学大型計算機センターのFACOM M-200を使用したことを付記する。

Appendix A

$$f_{j1}^0 = (2a_0^j a_0^l + a_1^j a_1^l + a_2^j a_2^l + a_3^j a_3^l) / 2$$

$$f_{j1}^1 = \{2(a_0^j a_1^l + a_1^j a_0^l) + a_1^j a_2^l + a_2^j a_1^l + a_2^j a_3^l + a_3^j a_2^l\} / 2$$

$$f_{j1}^2 = \{a_1^j a_1^l + 2(a_0^j a_2^l + a_2^j a_0^l) + a_1^j a_3^l + a_3^j a_1^l\} / 2$$

$$f_{j1}^3 = \{2(a_0^j a_3^l + a_3^j a_0^l) + a_1^j a_3^l + a_3^j a_1^l\} / 2$$

$$f_{j1m}^0 = \{4a_0^j a_0^l a_0^m + 2(a_1^j a_1^l a_0^m + a_1^j a_0^l a_1^m + a_0^j a_1^l a_1^m) + 2(a_2^j a_2^l a_0^m + a_2^j a_0^l a_2^m + a_0^j a_2^l a_2^m) + 2(a_3^j a_3^l a_0^m + a_3^j a_0^l a_3^m + a_0^j a_3^l a_3^m) + a_1^j a_1^l a_2^m + a_1^j a_2^l a_1^m + a_2^j a_1^l a_1^m + (a_1^j a_2^l a_3^m + a_1^j a_3^l a_2^m + a_2^j a_1^l a_3^m + a_2^j a_3^l a_1^m + a_3^j a_1^l a_2^m + a_3^j a_2^l a_1^m)\} / 4$$

$$f_{j1m}^1 = \{4(a_0^j a_0^l a_1^m + a_0^j a_1^l a_0^m + a_1^j a_0^l a_0^m) + 3a_1^j a_1^l a_1^m + a_1^j a_1^l a_3^m + a_1^j a_3^l a_1^m + a_3^j a_3^l a_1^m + 2(a_1^j a_2^l a_2^m + a_2^j a_1^l a_2^m + a_2^j a_2^l a_1^m) + 2(a_0^j a_1^l a_2^m + a_0^j a_2^l a_1^m + a_1^j a_0^l a_2^m + a_1^j a_2^l a_0^m + a_2^j a_0^l a_1^m + a_2^j a_1^l a_0^m) + 2(a_0^j a_2^l a_3^m + a_0^j a_3^l a_2^m + a_2^j a_0^l a_3^m + a_2^j a_3^l a_0^m + a_3^j a_0^l a_2^m + a_3^j a_2^l a_0^m) + 2(a_1^j a_1^l a_3^m + a_1^j a_3^l a_1^m + a_3^j a_1^l a_1^m) + a_2^j a_2^l a_3^m + a_2^j a_3^l a_2^m + a_3^j a_2^l a_2^m\} / 4$$

$$f_{j1m}^2 = \{4(a_0^j a_0^l a_2^m + a_0^j a_2^l a_0^m + a_2^j a_0^l a_0^m) + 3a_2^j a_2^l a_2^m + 2(a_0^j a_1^l a_1^m + a_1^j a_0^l a_1^m + a_1^j a_1^l a_0^m) + 2(a_1^j a_1^l a_2^m + a_1^j a_2^l a_1^m + a_2^j a_1^l a_1^m) + 2(a_2^j a_3^l a_3^m + a_3^j a_2^l a_3^m + a_3^j a_3^l a_2^m) + 2(a_0^j a_1^l a_3^m + a_0^j a_3^l a_1^m + a_1^j a_0^l a_3^m + a_1^j a_3^l a_0^m + a_3^j a_0^l a_1^m + a_3^j a_1^l a_0^m) + a_1^j a_2^l a_3^m + a_1^j a_3^l a_2^m + a_2^j a_1^l a_3^m + a_2^j a_3^l a_1^m + a_3^j a_1^l a_2^m + a_3^j a_2^l a_1^m\} / 4$$

$$f_{j1m}^3 = \{4(a_0^j a_0^l a_3^m + a_0^j a_3^l a_0^m + a_3^j a_0^l a_0^m) + a_1^j a_1^l a_1^m + 3a_3^j a_3^l a_3^m + 2(a_1^j a_1^l a_3^m + a_1^j a_3^l a_1^m + a_3^j a_1^l a_1^m) + (a_1^j a_2^l a_2^m + a_2^j a_1^l a_2^m + a_2^j a_2^l a_1^m) + 2(a_2^j a_2^l a_3^m + a_2^j a_3^l a_2^m) + 2(a_2^j a_2^l a_3^m + a_2^j a_3^l a_2^m) + 2(a_2^j a_2^l a_3^m + a_2^j a_3^l a_2^m)\} / 4$$

$$+a_2^j a_3^l a_2^m + a_3^j a_2^l a_2^m) + 2(a_0^j a_1^l a_2^m + a_0^j a_2^l a_1^m + a_1^j a_0^l a_2^m + a_1^j a_2^l a_0^m + a_2^j a_0^l a_1^m + a_2^j a_1^l a_0^m) \} / 4$$

Appendix B

本論文では面内非線形振動特性を評価するために自由度を3まで採用した解析をした。図-3および図-6には図-2の $r=0.007$ の場合よりも非線形性が強いケースが含まれているために、図-A・1(a)に非線形性が最も強い $k=45$, $r=0.1$ (図-6参照)のケーブルの解の収束状況を示す。また、図-A・1(b)にサグ比が最も大きい $r=0.5$ (図-3参照)のケーブルの解の収束状況を示す。図のように3自由度では完全に収束していないが、4・5自由度との差は小さい。本論文では1次振動の基本波成分 a_1^1 が振幅比の増大とともにどのように変

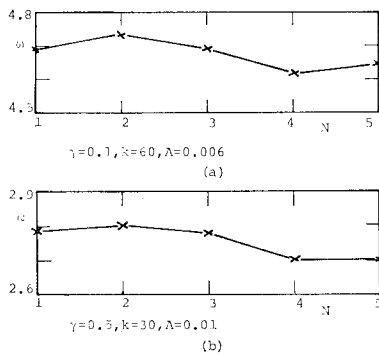


図-A・1 解の収束状況(非線形性が最も強い場合、サグ比が大きい場合)

化するかを追跡したものである。したがって、 a_1^1 の項が他の項に比較して卓越し、他の項が自由度間、調波間の連成による修正項となっている。

以上によって、振幅比 A が0.01以下ではケーブルの非線形振動特性を評価するためには3自由度程度で差し支えないといえる。

参考文献

- 1) 前田・林・前田：サグを考慮したケーブルの計算式，土木学会論文報告集，第257号，pp. 123~126, 1977.
- 2) 後藤：柔ケーブル材の接線剛性方程式について，土木学会論文報告集，第270号，pp. 41~49, 1978.
- 3) Ali, S.A.: Nonlinear Vibrations of Saged Cables, Ph.D. Thesis of the University of Pennsylvania, 1973.
- 4) 山口・宮田・伊藤：ケーブル系の非線形動的応答における一挙動，第24回構造工学シンポジウム論文集，pp. 55~61, 1978.
- 5) 山口・宮田・伊藤：幾何学的非線形性に基づくケーブルの面内・面外連成振動，第35回土木学会年次学術講演会講演概要集，第1部，I-175，pp. 347~348, 1980.
- 6) 山口・宮田・伊藤：正弦波外力を受けるケーブルの時間応答解析，土木学会論文報告集，第308号，pp. 37~45, 1981.
- 7) 山口・伊藤：単一ケーブルの三次元線形自由振動，土木学会論文報告集，第286号，pp. 29~36, 1979.
- 8) 高橋・河原・山辺：はりおよび薄板の非線形振動の Galerkin 法による解の収束性および安定性について，土木学会論文報告集，第293号，pp. 9~22, 1980.
- 9) 高橋：吊橋の鉛直非線形自由振動について，土木学会論文報告集，第286号，pp. 151~155, 1979.
- 10) 高橋・中島：扁平アーチの非線形振動，土木学会第31回年次学術講演会講演概要集，第1部，pp. 497~498, 1976.
- 11) 山口・宮田・伊藤：ケーブル系の動的挙動に関する2,3の考察，第33回土木学会年次学術講演会講演概要集，第1部，I-126，pp. 244~245, 1978.

(1983.1.13・受付)