

蛇曲流路における流れと平衡底面形状に関する研究

A STUDY ON FLOWS AND BED TOPOGRAPHIES
IN MEANDERING CHANNELS

長谷川 和義*

By Kazuyoshi HASEGAWA

1. まえがき

本邦河川には交互砂州の発生が広くみられ、しばしば2個ごとに1蛇行を繰り返す蛇曲流路(木下²⁾)を形成している。この流路は、砂州が平面形状に対してある位相だけずれて停留し、河岸の特定部分に水流を集中させる。護岸など流路の安定化を図るには、この性質を考慮し、最大深掘れ深やその位置を機構的に明らかにすることが重要である。

関連研究は、大きく3つに分けられる。第1は、交互砂州そのものに関する研究であり、この数年大きな前進がもたらされた。その大要が最近の「洪水流の三次元流況と流路形態に関する研究」²⁾に見出される。第2は、一樣弯曲水路中の二次流と平衡横断形状に関する研究である。Odgaard³⁾によると、実験および野外観測データとの照合では、自身の式および吉川・池田・北川⁴⁾の式が最もよく一致し、Zimmermann・Kennedy⁵⁾がこれに次いでいるようである。しかし、これらの諸式は、流下方向に変化のない二次流の十分発達した領域を対象としているため、蛇行流路全域には適用しがたい。Engelund⁶⁾は、蛇行流路の底面形状を求めるにあたり、第一近似として平衡式をそのまま用い、続いてその上の流速解を導いて修正解を得た。Hooke⁷⁾の実験への適用結果は良好であった。しかし、彼の理論は、砂州の存在が考慮されていないこと、数値計算を伴うことなど方法上の問題が残されている。第3は、河川の実態に基づく帰納的研究であり、木下・三輪⁸⁾によって砂州の移動が停止する限界蛇行角が発見されるなど、重要な成果が報じられている。これらの研究に比して、解析研究は遅れているものと考えられる。

本研究は、交互砂州を考慮しつつ、蛇曲流路における流れと底面形状の解析解を求めようとするものであり、それらから水衝点や限界蛇行角の理論解を誘導する。

2. 蛇行流路による移動床実験

(1) 目的と方法

蛇行流路中に砂州が発生した場合(蛇行砂州)と、そうでない場合(蛇行非砂州)の底面形状と流速分布の違いをみるために表-1に示す実験を行った。水路平面形状には中心線 s の谷軸に対する偏角 θ が、 $\theta = \theta_0 \sin(2\pi s/\tilde{L})$ にて表わされる sine generated curve が使用されている。最大偏角(蛇行角) θ_0 は表中に示すように 30° (ME-1, 2) および 20° (ME-3) の2種類であり、蛇行長 \tilde{L} はそれぞれ 220 cm, 240 cm としている。なお同表には Hooke の実験もあわせて載せているが、水路形状は $\theta_0 = 55^\circ$, $\tilde{L} = 13.2$ m である。

図-1は、実験装置の概要を示すものである。測定区間は、上流端から1.5~2波長下流の1蛇行長間にとられている。使用砂は中央粒径 0.43 mm, 比重 2.661 のほぼ均一なふるい砂であり、これを一樣に敷きならした後通水し、定常に達したと判断された時点で停水して測定断面とした。給砂は観測区間の上流部分が十分に長いので行っていない。底面形状は、ポイントゲージにより縦断方向に 10 cm, 横断方向に 1 cm 間隔で測定した。流速は、底面を速乾性の接着剤にて固定した後、直径 3 mm のプロベラ流速計を用いて、縦断方向に 10 cm, 横断方向に 2 cm, 水深方向に 3 mm 間隔にて測定した。その際、流速計を回転台上にセットし、タフト法および最大流速示現角度の読み取りによって流向角を測定した。なお、底面の固定化は粗度を若干減少させ、水位の低下を招いた。また、定常状態に達した段階では、最上流端の弯曲を除き個々の蛇行内の底面形状はほとんど同一となり、上流側からの過渡的影響はほとんど見受けられなかった。

(2) 実験結果

平衡状態の底面形状と流速分布の概略を、図-3(a)~5(a)および3(b)~5(b)に示す。図のベクトルは、流速の流下方向成分、横断方向成分をそれぞれ水深にわたって平均し、合成したものである。

Run ME-1, ME-2 は、河床形態が異なり砂州の有無による現象の相違をみるのに都合がよい。底面形状では次の点が重要な違いになっている。ME-1では、水衝部(深掘れ部)から対岸の水衝部にかけて、砂州性の前

* 正会員 工修 北海道大学助手 工学部土木工学科

表-1 蛇行実験水路の諸元と主要水理量

実験番号	蛇行角 θ_0	流路幅 \tilde{B} (cm)	蛇行長 \tilde{L} (cm)	河床材料中央粒径 d (cm)	流量 Q (l/s)	平均河床勾 i	平均水深 \tilde{H}_0 (cm)	平均流速 \tilde{U}_0 (cm/s)	河床形態	表示号
ME-1	30°	30	220	0.043	0.75	0.014 1	0.89	32.21	交互砂州	●
ME-2	30°	30	220	0.043	1.87	0.003 33	2.58	24.16	砂澁	▲
ME-3 (砂州発生時)	20°	22	240	0.043	0.54	0.006 25	0.93	26.41	交互砂州	■
ME-3 (流速測定時)	20°	22	240	0.043	0.59	0.006 25	1.37	19.54	〃	〃
Hooke ⁷⁾ の実験 10	55°	100	1 320	0.030	10.0	0.002 13	5.2	19.2	砂澁・砂堆	○
〃	20	55°	100	0.030	20.0	0.002 07	7.3	27.5	〃	○
〃	35	55°	100	0.030	35.0	0.002 21	9.5	36.8	〃	○
〃	50	55°	100	0.030	50.0	0.002 23	12.8	39.4	〃	○

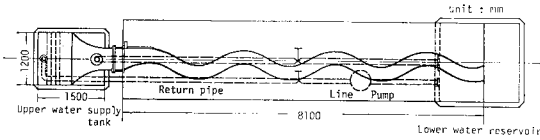
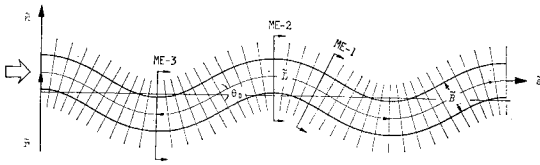
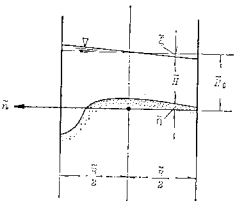


図-1 実験装置の概要



(a)



(b)

図-2 平面および横断流路形状の概要と記号の定義

縁と側壁によって挟まれた狭い「水みち」が確認されるのに対して、ME-2では深掘れが発生しているものの、水路を斜めに横断してこれらをつなぐ「水みち」が明りように存在しない。同様な「水みち」はME-3にも認められ蛇行砂州河床に固有な形状と考えられる。一方、流れに関

しては、ME-2が概して直進性を示し、流速の横断分布が平坦で流向が谷軸に平行する傾向を示すのに対し、ME-1、ME-3では「水みち」に沿う蛇行性が顕著で、水衝部から水衝部へ流路を横断する流れが認められ、流速分布が中央山形を呈する。

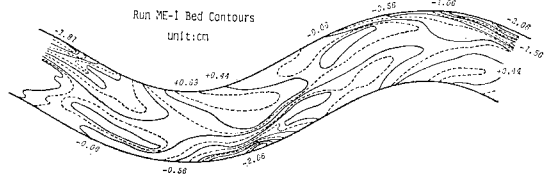
底面形状の特徴を一層明らかにするために、重調和分析を試みる。いま、図-2に定義するように流路中心線に沿い下流向きを正にとって s 軸を、また s 軸に直交し左岸向きを正として n 軸を設けると、平均河床面からの任意河床点の変位 η は、式(1)のように表現することができる。ただし、 s および n は平均水深 \tilde{H}_0 にて、また n は流路半幅 $\tilde{B}/2$ にて無次元化し、それぞれ s, η, n と表記する。

$$\eta \approx \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{ij} \sin\left(\frac{i\pi n}{2} + \frac{\pi}{2} \delta_{ie}\right) \cdot \cos\left\{j \frac{2\pi \tilde{H}_0}{\tilde{L}} (s - \sigma_{ij})\right\} \dots \dots \dots (1)$$

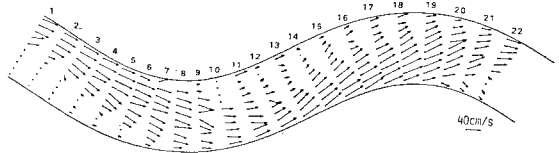
ここでは n 軸方向の基本周期を流路幅の2倍にとって

4としており、波数を i にて表わしている。また、 s 軸方向の基本周期は1蛇行長 \tilde{L}/\tilde{H}_0 に選び、波数を j としている。 α_{ij}, σ_{ij} はそれぞれ n, s 方向の波数が (i, j) の波の振幅と位相を示し、いずれも \tilde{H}_0 にて無次元化されている。 δ_{ie} は $\{1 + (-1)^i\}/2$ 、すなわち i が奇数のとき0、偶数のときに1を表わす簡略記号とする。

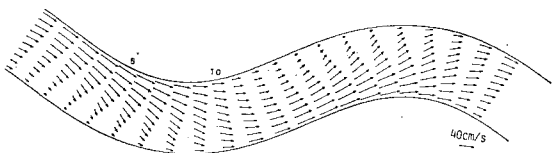
図-6は、表-1に掲げる実験につき、式(1)を用いて振幅成分を求め、その絶対値の大きいものから順に第4位までを取り上げ比較したものである。横軸には砂州の形成や、平面流線のパターンに関係の深い流路幅/水深比がとられている。河床波の違い、流路平面形状の違いにもかかわらず、主要振幅成分が同一なことから、 α_{11} が1前後の一定に近い値を示すこと、 $\alpha_{22}, |\alpha_{20}|, \alpha_{31}$ が \tilde{B}/\tilde{H}_0 の増加とともに増加していることなどが共通の性質として指摘できる。このように、決まった成分の振幅が上位を占めるのは、それらが二次流の成長と密接に関係しているためと考えられ、4.において詳しく検討する。なお上位4項による原河床形状の再現割合は、50~



(a) Run ME-1 (砂州実験) における河床等高線図



(b) 同・実測平均流速ベクトル図 (数字は横断測線番号)

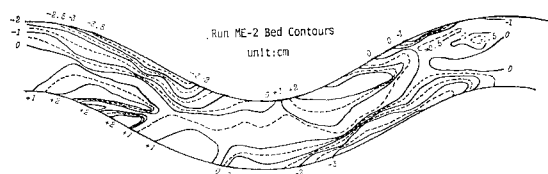


(c) 同・二次元浅水モデルによる理論流速ベクトル (使用項数 1, $r=4/3$)

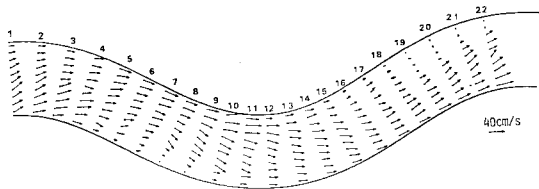
図-3

60%に達する。なお、蛇行角の増加に伴って流下方向距離が内岸側で短く、外岸側で長くなるが、実験データの範囲内ではその影響が解析結果に現われてこない。

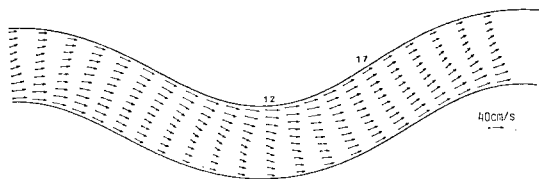
直線流路における砂州（直線砂州）に関して同様な解析を試みると、 α_{11} , α_{20} , α_{31} , α_{22} が、ほぼこの順位で並ぶ。それぞれ、0.3~0.8, 0.2~0.6, 0.1~0.5, 0.1~0.3 程度の値をとり、いずれも \tilde{B}/\tilde{H}_0 の増加とともに増加する。



(a) Run ME-2 (非砂州実験) における河床等高線図

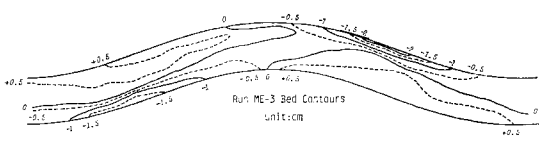


(b) 同・実測平均流速ベクトル図 (数字は横断測線番号)

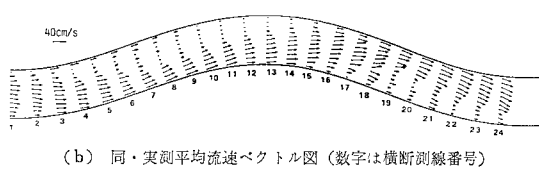


(c) 同・二次元浅水流モデルによる理論流速ベクトル (使用項数 6, $\gamma=4/3$)

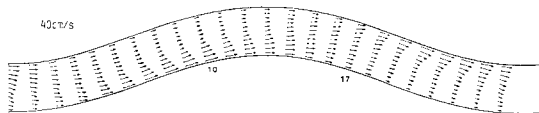
図—4



(a) Run ME-3 (砂州実験) における河床等高線図



(b) 同・実測平均流速ベクトル図 (数字は横断測線番号)



(c) 同・二次元浅水流モデルによる理論流速ベクトル (使用項数 298, $\gamma=2$)

図—5

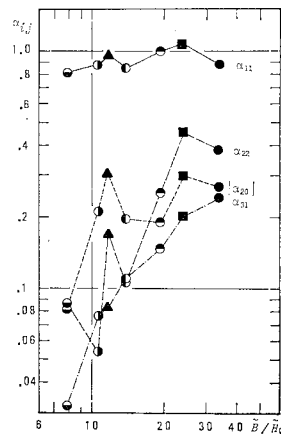
一方、(1, 1) の波を基準にして他の波の相対的な位相のずれをみると、図—7 となる。ただし位相差を $\tilde{\sigma}_{Bij}$ と表わし、 \tilde{L} に対する比率でみている。 $\tilde{\sigma}_{B22}/\tilde{L}$, $\tilde{\sigma}_{B31}/\tilde{L}$ ともに一定値のまわりに散らばっているようであるが、(2, 2) の波は理論のうへでは移動することになっており、常時保たれる性質が否かについては不明である。蛇行流路では、むしろ平面形状に対する位相差が重要な問題である。図—7 中に、凹岸曲頂が左岸側にくる位置の流路中心を原点として測った (1, 1) の波の位相 $\tilde{\sigma}_{11}/\tilde{L}$ を示す。これらは、深掘れ部までの距離にはほぼ対応しているが、蛇行角の大きい Hooke の一連の実験で小さく、蛇行角最小の ME-3 において最も大きい。このことについては、4. において理論的検討を加える。

3. 蛇行流の解法

(1) 基礎方程式

本論文が対象としている現象は、蛇曲段階のものであり、流路幅に比して中心線の曲率半径が十分に大きく、かつ水深が十分小さいものと考えてよい。このとき、せん断抵抗は河床面のみから作用するものと考えことができ、二次元の浅水流方程式によって現象を記述し得る。

しかし、原式のままでは解析解は得がたく、何らかの項の省略や線形化が不可欠である。一般に行われる高次微小項の省略方法は、各変数の有する代表スケールによるオーダー比較か、あるいは 1, 2 の摂動パラメーターによる展開である。しかし、微小であっても現象にとって本質的な意味をもつ項を生かすためには、各項の吟味を行って、方程式を確定させる必要がある。二次元方程式で最初に問題となるのは、水深方向にわたる平均操作の際に現われる \overline{UV} の扱いである (U : 流下方向流速, V : 横断方向流速、一は水深にわたる平均を表わす)。二次流が発達している場合には、一般に $\overline{UV} = \overline{U}\overline{V}$ とはならず、特に、平坦河床では \overline{UV} の効果を抜きに強制渦型の分布を説明できない。しかし、移動床水路では、二次流による底面洗掘が生じて局所水深の影響が強まり、この効果は無視しても結果はあまり変わらないようになる。したがって、基礎方程式は図—2 の定義記号を用いて以下のように



図—6 蛇行実験における底面形状の調和分析結果・主要振幅成分の性質

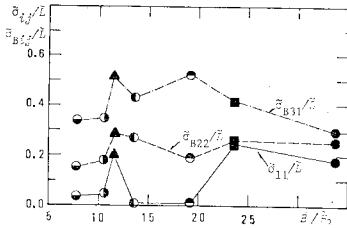


図-7 主要成分波の位相に関する性質

$$\begin{bmatrix} \frac{\tilde{r}+\tilde{n}}{\tilde{r}}\tilde{V} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{r}+\tilde{n}}{\tilde{r}}\tilde{V} & \frac{\tilde{r}+\tilde{n}}{\tilde{r}}g \\ 0 & \frac{\tilde{r}+\tilde{n}}{\tilde{r}}\tilde{H} & \frac{\tilde{r}+\tilde{n}}{\tilde{r}}\tilde{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial\tilde{U}}{\partial\tilde{n}} \\ \frac{\partial\tilde{V}}{\partial\tilde{n}} \\ \frac{\partial\tilde{H}}{\partial\tilde{n}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{U} & 0 & g \\ 0 & \tilde{U} & 0 \\ \tilde{H} & 0 & \tilde{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial\tilde{U}}{\partial\tilde{s}} \\ \frac{\partial\tilde{V}}{\partial\tilde{s}} \\ \frac{\partial\tilde{H}}{\partial\tilde{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\tilde{U}\tilde{V}}{\tilde{r}}+gi+g\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial\tilde{s}}-\frac{\tilde{r}+\tilde{n}}{\tilde{r}}\frac{f\tilde{U}^2}{2\tilde{H}} \\ \frac{\tilde{U}^2}{\tilde{r}}+\frac{\tilde{r}+\tilde{n}}{\tilde{r}}g\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial\tilde{n}}-\frac{\tilde{r}+\tilde{n}}{\tilde{r}}\frac{f\tilde{U}\tilde{V}}{2\tilde{H}} \\ -\frac{\tilde{H}\tilde{V}}{\tilde{r}} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2\cdot a\sim c)$$

ここに、 \tilde{U}, \tilde{V} ：それぞれ水深方向に平均した流速の s, \tilde{n} 軸方向成分、 \tilde{H} ：任意点の水深、 i ：平均河床面の水平面に対する傾き、 f ：摩擦係数、 \tilde{r} ：流路中心線の曲率半径、 g ：重力加速度である。方程式系の性質を知るために左辺 2 項の係数マトリックスの固有値を求め、特性方程式を導くと次のようになる。

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{n}}{d\tilde{s}} = \frac{\tilde{r}+\tilde{n}}{\tilde{r}} \cdot \frac{\tilde{V}}{\tilde{U}} \dots\dots\dots(3\cdot a) \\ \frac{d\tilde{n}}{d\tilde{s}} = \frac{\tilde{r}+\tilde{n}}{\tilde{r}} \cdot \frac{1}{F_U^2-1} [F_U F_V \pm \sqrt{F_U^2+F_V^2-1}] \\ \approx \pm \frac{\tilde{r}+\tilde{n}}{\tilde{r}} \cdot \frac{1}{\sqrt{F_U^2-1}} \quad (F_V \ll 1 \text{ のとき}) \dots\dots\dots(3\cdot b) \end{cases}$$

ただし、 $F_U = \tilde{U}/\sqrt{g\tilde{H}}$ 、 $F_V = \tilde{V}/\sqrt{g\tilde{H}}$

式 (3・a) は流線を示し、この上でベルヌイ式が成立することを示唆している。一方、(3・b) は水面形に強く関係し、 $F_U < 1$ の場合には方程式の型が変わり \tilde{H} に関して楕円型になるが、 $F_U \geq 1$ いずれの場合にも水路側壁の境界条件が重要な意味をもつことになる。

さて、加速度項の省略を以下の 2 つのケースについて行い特性方程式への影響をみる。すなわち、① $\tilde{V} \approx 0$ とみなし関連する項を省略するが、 $\partial\tilde{V}/\partial\tilde{s}, \partial\tilde{V}/\partial\tilde{n}$ を残す場合、② 主流方向の加速度項を残し、横断方向のそれを、遠心力項を除いて省略する場合につき調べる。

① に対しては、

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{n}}{d\tilde{s}} = 0 \dots\dots\dots(4\cdot a) \\ \frac{d\tilde{n}}{d\tilde{s}} = \pm \frac{\tilde{r}+\tilde{n}}{\tilde{r}} \cdot \frac{1}{\sqrt{F_U^2-1}} \dots\dots\dots(4\cdot b) \end{cases}$$

となり、流線上で成立する現象に関して誤差が現われるが、側壁における境界条件の必要性が保たれる。一方、② に対しては、

$$\frac{d\tilde{n}}{d\tilde{s}} = \frac{\tilde{r}+\tilde{n}}{\tilde{r}} \cdot \frac{\tilde{V}}{\tilde{U}} \dots\dots\dots(5)$$

のみが得られ、流線上の現象は保たれるが、側壁における境界条件には直接関係しなくなる。

平坦固定床の問題に対しては、多く ② の近似が用いられ、またそれがふさわしいが、砂州上の流れを考える本論文の場合には、① の近似が望ましい。砂州の発生理論においては、側壁における境界条件を通じて流路幅の影響が導入され、結果の理論卓越波長が実測波長をよく説明する。

次に、式 (2) の右辺側の微小項の省略と、線形化を行う。① の近似法に従い、 $\tilde{V} \approx 0$ とし、また式 (2・b) における横断方向の摩擦項を省く。式 (2・a) の等流関係式

$$0 = gi - f_0 \tilde{U}_0^2 / (2\tilde{H}_0) \dots\dots\dots(6)$$

\tilde{U}_0 ：等流流速、 f_0 ： f の断面平均

を式 (2・a) から差し引き、 $\tilde{U} = \tilde{U}_0(1+u)$ 、 $\tilde{V} = \tilde{U}_0 v$ 、 $\tilde{H} = \tilde{H}_0(1+\xi+\eta)$ 、 $\tilde{r} = \tilde{H}_0 r$ などの置き換えを行う。ただし、 $\tilde{U}_0 u$ は平均流速からの偏倚流速、 $\tilde{H}_0 \xi$ は水面の平均水位からの変位 (上向き正) である。また、 f が局所水深の変化に応じて変わるものと考え、

$$f = f_0 (\tilde{H}_0 / \tilde{H})^{r-1} \dots\dots\dots(7)$$

のように表す。 r は定数で、Manning-Strickler の抵抗則が成立する場合には、 $r=4/3$ となる。 $u, v, \xi, \eta, n/r \ll 1$ とみなし、これらの 3 次以上の微小項を省略すると、線形無次元化方程式が次のように求まる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\epsilon}{F^2} \\ 0 & \epsilon & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} \\ \frac{\partial v}{\partial n} \\ \frac{\partial \xi}{\partial n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{F^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial v}{\partial s} \\ \frac{\partial \xi}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_0 \left\{ u - \frac{r}{2}(\xi+\eta) + \frac{n}{2\epsilon r} \right\} \\ \frac{1}{r} \\ -\frac{\partial \eta}{\partial s} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(8\cdot a\sim c)$$

ただし、 s, n の無次元化法は前章と同じであり、また $F = \tilde{U}_0 / \sqrt{g\tilde{H}_0}$ 、 $\epsilon = 2\tilde{H}_0 / \tilde{B}$ である。

(2) 解

流路形状は、 $1/r$ と η にて定められるが、それぞれ式

(9) および (1) をもって一般表現する。

$$\frac{1}{r} = \sum_l \frac{1}{R_l} \cos \left\{ l \frac{2\pi \tilde{H}_0}{\tilde{L}} (s - \sigma_{Rl}) \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 R_l : 波数 l の蛇行波の有する最小曲率半径、 σ_{Rl} : 同じく位相。以上が与えられたとき、基礎方程式 (8) は、近似解 (10)~(12) をもつものと仮定できる。

$$u = \sum_{i=0} \sum_{j=0} \sin \left(\frac{i\pi n}{2} + \frac{\pi}{2} \delta_{ie} \right) \left[A_{ij} \alpha_{ij} \sin \{ j\omega (s - \sigma_{ij}) \} + B_{ij} \alpha_{ij} \cos \{ j\omega (s - \sigma_{ij}) \} + A_{ij}' \frac{1}{R_j} \sin \{ j\omega (s - \sigma_{Rj}) \} + B_{ij}' \frac{1}{R_j} \cos \{ j\omega (s - \sigma_{Rj}) \} \right] \dots\dots\dots (10)$$

$$v = \sum_{i=0} \sum_{j=0} \cos \left(\frac{i\pi n}{2} - \frac{\pi}{2} \delta_{ie} \right) \left[C_{ij} \alpha_{ij} \sin \{ j\omega (s - \sigma_{ij}) \} + D_{ij} \alpha_{ij} \cos \{ j\omega (s - \sigma_{ij}) \} + C_{ij}' \frac{1}{R_j} \sin \{ j\omega (s - \sigma_{Rj}) \} + D_{ij}' \frac{1}{R_j} \cos \{ j\omega (s - \sigma_{Rj}) \} \right] \dots\dots\dots (11)$$

$$\xi = \sum_{i=0} \sum_{j=0} \sin \left(\frac{i\pi n}{2} + \frac{\pi}{2} \delta_{ie} \right) \left[E_{ij} \alpha_{ij} \sin \{ j\omega (s - \sigma_{ij}) \} + F_{ij} \alpha_{ij} \cos \{ j\omega (s - \sigma_{ij}) \} + E_{ij}' \frac{1}{R_j} \sin \{ j\omega (s - \sigma_{Rj}) \} + F_{ij}' \frac{1}{R_j} \cos \{ j\omega (s - \sigma_{Rj}) \} \right] \dots\dots\dots (12)$$

$A_{ij} \sim F_{ij}$ などは未知係数であり、また $\omega = 2\pi \tilde{H}_0 / \tilde{L}$ である。式 (1), (9), (10), (11), (12) を式 (8) に代入することによって残差を求め、重み関数として $\sin(i\pi n/2)$, $\cos(i\pi n/2)$, および $\sin j\omega s$, $\cos j\omega s$ を選んで重みつき残差法を適用すれば、未知係数に対する連立方程式が得られる。これらの解析解を文末の補足に示す。平均水理量からこれらを算定すれば、任意点の解が式 (10)~(12) より得られることになる。

(3) 理論解と実測値の比較

実験 ME-1, 2, 3 につき比較を行う。平面形状は、sine-generated curve なので、式 (9) は $l=1$ の 1 項のみとなる。図-5 (c) は、すべての実測 α_{ij} , σ_{ij} を与えて計算した ME-3 の理論流速を示すものである。図-5 (b) と比較すると、おおよその一致が得られていることがわかる。特に水衝部 (断面 5~7 右岸, 17~19 左岸) を通過した後の加速区間で対応がよい。図-8 (a) は、この区間の例を取り出し、流速、水深の横断分布を詳しくみたものである。一方、水衝部とその上流にお

る流速分布の遷移部では十分な一致が得られておらず、特に 図-8 (b) にみられるような中央山形の主流速が表現されていない。このような流速分布は「水みち」の存在と深く関係しているのであるが、実測河床形状を与えてもこれを表現し得ないのは、後述のように流れのモデルがこの部分に十分対応できないためと考えられる。なお流速分布の山形は、 r によっても変わり、これが大きくなるほど山が高くなる。本ケースでは $r=2$ が適当したが、他は 4/3 が適値であった。

図-4 (c) は、ME-2 に対する理論結果を示すものである。ただし、 α_{ij} の大きいものから順に 6 項までを採り、それらによって河床を表現した場合の解である。図-4 (b) と比較しても、両者は大略一致している。河床表現の項数をこれ以上増やしても結果はあまり変わらず、通常の計算では 4 ないし 6 項程度で十分である。理論の適合度は、先の場合と同様、水衝部 (断面 5~8 左岸, 15~18 右岸) の下流でよく (図-9 (a) 参照)、上流側で悪い (図-9 (b) 参照)。また、水衝部へ流線が集中する結果、対岸側に剝離が生じ、不一致を大きくしている。

図-3 (c) は、ME-1 に関する理論結果である。ただし、 $i=j=1$ の波形のみを用い、振幅には実測波高の半分を与えている。最も単純な表現であるが実測値との対応は良好といえる。このケースでは、項数を多くし過ぎるとかえって不一致が目立つようになった。このことは、砂州に模した詳しい河床波形を与えても、高波数成分の高次項における誤差が累積する結果となり、砂州上の微妙な流れの性質を再現するのが難しいこ

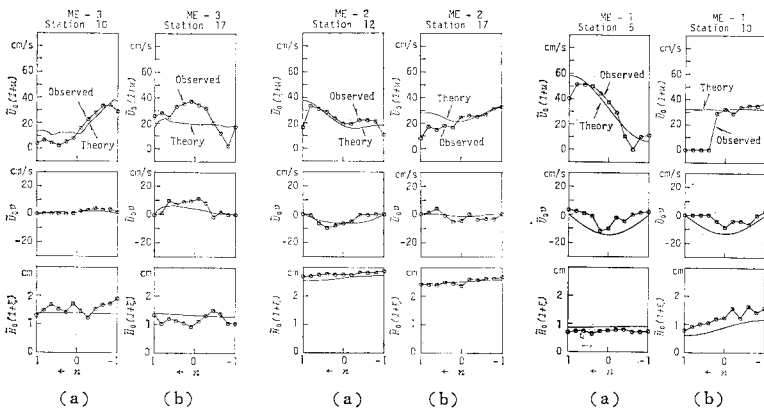


図-8 Run ME-3 の断面 10 および 17 における流速、水深 (理論値 (実線) と実測値 (円印) の比較) 図-9 Run ME-2 の断面 12 および 17 における流速、水深 (理論値 (実線) と実測値 (円印) の比較) 図-10 Run ME-1 の断面 5 および 10 における流速、水深 (理論値 (実線) と実測値 (円印) の比較)

とを示している。不一致箇所は、水衝部（断面 1~2 左岸，9~12 右岸）とその上流であり，下流での良好さと対照的である（図-10 (a), (b) 参照）。

以上のように，流れのモデルの対応が悪い箇所は決まっているが，その原因として次のことが考えられる。① 同箇所では流速分布のピークが対岸側に遷移し，流線に沿って運動量の横断方向輸送が生じているのに対し，理論では流線に誤差が現われ，横断方向への輸送現象を表現しきれないこと。② 同所が砂州の接続部でもあり，流れの三次元性が強まること。③ 同所で深掘れ側に向かって流線が収束する一方，対岸で剥離が生じやすくなること。

これらは，いずれも簡単に取り扱えない問題であり，その解決は今後の課題とせざるを得ない。しかし，式 (10)~(12) によっても流れのおおよその様子を表わすことは可能であり，次章で応用を図ることにする。

4. 蛇行流路における平衡底面形状の理論

(1) 流砂量式と平衡条件式

浅水流の仮定が成立する場合，底面せん断力の s 軸方向成分 τ_s は，流速 \vec{U} を用いて次のように表わされる。

$$\tau_s = \frac{1}{2} f \rho \vec{U}^2 = \frac{1}{2} f \rho \vec{U}_0^2 (1+u)^2 \dots\dots\dots (13)$$

ρ : 水の質量密度

f に対して式 (7) を代入し，無次元掃流力の形で表現し直すと，

$$\tau_* = \tau_{*0} (1+\xi+u)^{1-\tau} (1+u)^2 \dots\dots\dots (14)$$

ただし， ρ_s, d : それぞれ砂粒の質量密度および代表径， τ_{*0} : 断面平均の無次元掃流力。

次に流砂量式として表現の簡単な次式を用いる。

$$\bar{q}_s = k \sqrt{(\rho_s/\rho - 1)gd^3} \cdot (\tau_* - \tau_{*c})^{p'} \dots\dots\dots (15)$$

k, p' は定数で，通常 8 および 1.5 程度の値をとる。また τ_{*c} は無次元限界掃流力である。これに式 (14) を代入し，二項展開を行って高次の微小項を省略すれば，

$$\bar{q}_s \approx \bar{q}_{s0} \{1 + p\phi_* u + (1-\tau)\phi_* \eta\} \dots\dots\dots (16)$$

を得る。ただし， $\bar{q}_{s0} = k \sqrt{(\rho_s/\rho - 1)gd^3} \cdot (\tau_{*0} - \tau_{*c})^{p'}$ ， $\phi_* = \tau_{*0}/(\tau_{*0} - \tau_{*c})$ ， $p = 2p'$ である。

一方，横断方向流砂量は斜面傾斜角や横断方向二次流の影響を強く受けて定まる。斜面の上流砂量の非平衡性は，一般には無視し得るので，平衡時の粒子運動における力のつり合いを考えると，結果的に横断方向流砂量が，次式のように求まる。

$$\bar{q}_n \approx \bar{q}_{s0} \left(v + \tan \phi + \varepsilon T \frac{\partial \eta}{\partial n} \right) \dots\dots\dots (17)$$

ただし， $\vec{U}_0(v + \tan \phi)$ は，砂粒に働く横断方向流速であり，したがって $\tan \phi$ は，平均流を差し引いた二次流による底面流線の傾きを表わす。また $T = \sqrt{\tau_{*c}/(\mu_s \mu_k \tau_{*0})}$ ， μ_s : 砂粒の静止摩擦係数， μ_k : 動摩擦係数， ε :

$\partial \eta / \partial n = \tan \beta$ ， β : 斜面の横断傾斜角であり， $\varepsilon T \cdot \partial \eta / \partial n$ は斜面による重力効果を表わしている。

蛇行流路における流砂の連続条件は，

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{1-n_e} \left[\frac{\bar{r}}{\bar{r}+\bar{n}} \frac{\partial \bar{q}_s}{\partial \bar{s}} + \frac{1}{\bar{r}+\bar{n}} \frac{\partial \{(\bar{r}+\bar{n})\bar{q}_n\}}{\partial \bar{n}} \right] \dots\dots\dots (18)$$

にて与えられる。ここに， n_e : 砂の空隙率， \bar{t} : 実時間。上式に式 (16)，(17) を代入し， $\bar{t} = \{(1-n_e)\bar{H}_0^2/\bar{q}_{s0}\} \cdot t$ なる置き換えを行うとともに， $\bar{n}/\bar{r} \ll 1$ とみなして省略すれば，底面の平衡条件式が以下のように定まる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial \bar{t}} = p\phi_* \frac{\partial u}{\partial \bar{s}} + (1-\tau)\phi_* \frac{\partial \eta}{\partial \bar{s}} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial n} + \varepsilon \frac{\partial \tan \phi}{\partial n} + \varepsilon^2 T \frac{\partial^2 \eta}{\partial n^2} \dots\dots\dots (19)$$

(2) 形状解の導出

流路平面形状が式 (9) の一般形をしているものとし，底面形状が未知の振幅と位相 X_{ij}, σ_{ij} によって表わし得るものとする。すなわち，

$$\eta = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} X_{ij} \sin \left(\frac{i\pi n}{2} + \frac{\pi}{2} \delta_{ie} \right) \cdot \cos \{j\omega(s - \sigma_{ij} - c_{ij}t)\} \dots\dots\dots (20)$$

のようにおく。 c_{ij} は，直線流路の場合のように波が移動するときの速度であり，他の記号はすべて前章までの約束に従うものとする。このとき，流速解は，式 (10)~(12) の α_{ij} を X_{ij} に，また σ_{ij} を $(\sigma_{ij} + c_{ij}t)$ に置き換えたものになる。

次に， $\tan \phi$ に関する考察を行う。円弧水路における発達した二次流の底面流速については，種々の式が提案されている。それらの大部分は，式 (21) の形を有しており，係数が異なるのみである。

$$\tan \phi = -N_* \frac{\bar{H}}{\bar{r}+\bar{n}} \approx -N_* \frac{\bar{H}_0}{\bar{r}} \dots\dots\dots (21)$$

N_* に関する主要な式を掲げると以下のとおりである。

Rozovskii¹⁰⁾ : $N_* = 11 \sim 11.5$ (粗面) $\dots\dots\dots (22)$

Engelund⁹⁾ : $N_* = 7$ $\dots\dots\dots (23)$

池田^{11),11)} : $N_* = 1.226(\sqrt{2/f_0} - 1.584)$ $\dots\dots\dots (24)$

Zimmermann-Kennedy^{5),12)} :

$$N_* = (4.52 + 8\sqrt{f_0}) / (3.83\sqrt{f_0} + 13.56 f_0) \dots\dots (25)$$

ただし，式 (25) は，砂粒に働くせん断力の方向角につき求めたものである。

さて，変曲率の水路中の二次流に関しては不明なことが多い。本研究では曲率変化に従って生ずる平均流の上二次流が発達するものと考え，さらに以下の考察によつて， $\tan \phi$ を式 (26) のように表現する。

$$\tan \phi = - \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{N_{ij}}{R_j} \cos \left(\frac{i\pi n}{2} - \frac{\pi}{2} \delta_{ie} \right) \cdot \cos \{j\omega(s - \sigma_{Rj})\} + M_{ij} \cos \left(\frac{i\pi n}{2} - \frac{\pi}{2} \delta_{ie} \right) \right]$$

$$\cdot \cos \{j\omega(s - \sigma_{ij} - c_{ij}t)\} \Big] \dots \dots \dots (26)$$

上式中の右辺括弧内の第1項は、式(21)と同様な意味を有しており、流路曲率に比例して二次流流速が増大することを表わしている。ただし、 $n = \pm 1$ (側壁)において $\tan \phi = 0$ の条件を満たし、横断方向に分布をもたせている。 N_{ij} は、二次流の (i, j) の波数成分にかかわる係数であるが、 $1/R_j = 0$ のときには意味がなく、また、 i が小さい場合には、式(22)~(25)と似た性質をもつことが予想される。第2項は、二通りの意味をもたせて導入されている。その1は、底面の起伏に伴って生ずる流れの遷移すなわち偏倚流速の発生が原因となって誘起される二次流を表現しようとするものである。その場合、二次流の強さは、振幅のべき乗に比例するものと考えられるが、式(26)中には X_{ij} が含まれていない。もしこれが含まれると線形理論による限り X_{ij} を求めることが不可能になる。ここでは、振幅に関係する他の要素 (u や v) が本来有する X_{ij} に対するべき数に比べて、二次流が有するべき数がオーダー的に小さいため、線形化の段階で X_{ij} のゼロ乗になるものと解釈する。その2は、これまでに取り扱ってきたモデルの不十分さに対する補正である。現在のところ M_{ij} に対する知識が皆無に近いので、後に河床形状から逆算を行ってその性質を調べる。

さて、式(19)に、式(20)、(26)および式(10)、(11)の α_{ij} を X_{ij} に、 σ_{ij} を $(\sigma_{ij} + c_{ij}t)$ に置き換えた式を代入し、整理すると、 $\sin j\omega s$, $\cos j\omega s$ に関する多項式が得られる。これが恒等的に成立するためには、各項の係数がすべてゼロとなる必要があり、そこから以下の方程式と解が求められる。なお、 $i=0$ の場合には、解が得られないが、小規模河床波を対象と考えていないので矛盾はない。

a) $j=0$ の場合

方程式は次のように表わされる。

$$\left\{ (-1)^i D_{i0} - \frac{i\pi\epsilon}{2} T \right\} X_{i0} + (-1)^{i+1} M_{i0} = 0 \dots \dots (27)$$

補足の式中に示されているように $D_{i0} = 0$ なので、結局振幅は、

$$X_{i0} = (-1)^{i+1} \frac{2 M_{i0}}{i\pi\epsilon T} \dots \dots \dots (28)$$

にて与えられる。この波は s 軸にそう変化がないので位相や波速は存在しない。

b) $j \neq 0$ の場合

以下の2本の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & [-\kappa_{ij} \cos \{j\omega(\sigma_{ij} - c_{ij}t)\} + \lambda_{ij} \sin \{j\omega(\sigma_{ij} - c_{ij}t)\}] X_{ij} = K_{ij} \cos j\omega\sigma_{Rj} - A_{ij} \sin j\omega\sigma_{Rj} \\ & + (-1)^i m_{ij} \sin \{j\omega(\sigma_{ij} - c_{ij}t)\} \dots \dots \dots (29) \\ & [\kappa_{ij} \sin \{j\omega(\sigma_{ij} - c_{ij}t)\} + \lambda_{ij} \cos \{j\omega(\sigma_{ij} - c_{ij}t)\}] X_{ij} = -K_{ij} \sin j\omega\sigma_{Rj} - A_{ij} \cos j\omega\sigma_{Rj} \\ & + (-1)^i m_{ij} \cos \{j\omega(\sigma_{ij} - c_{ij}t)\} \dots \dots \dots (30) \end{aligned}$$

ここに、

$$\kappa_{ij} = c_{ij} + p\phi_* B_{ij} + (1-\tau)\phi_* + (-1)^{i+1} \frac{i\pi\epsilon}{2j\omega} C_{ij} \dots \dots \dots (31)$$

$$\lambda_{ij} = p\phi_* A_{ij} + (-1)^i \frac{i\pi\epsilon}{2j\omega} D_{ij} - \frac{(i\pi\epsilon)^2}{4j\omega} T \dots \dots \dots (32)$$

$$K_{ij} = \left(p\phi_* B_{ij}' + \frac{i\pi\epsilon}{2j\omega} C_{ij}' \right) / R_j \dots \dots \dots (33)$$

$$\begin{aligned} A_{ij} = & \left\{ p\phi_* A_{ij}' - \frac{i\pi\epsilon}{2j\omega} D_{ij}' \right. \\ & \left. + (-1)^{i+1} \frac{i\pi\epsilon}{2j\omega} N_{ij} \right\} / R_j \dots \dots \dots (34) \end{aligned}$$

$$m_{ij} = (i\pi\epsilon/2j\omega) M_{ij} \dots \dots \dots (35)$$

$1/R_j = 0$, すなわち直線流路あるいは蛇行流路で j の波数の曲率変化が含まれていない場合の解は、式(29)、(30)において $\kappa_{ij} = 0$ の条件下でのみ求めることができる。この条件より

$$c_{ij} = - \left\{ p\phi_* B_{ij} + (1-\tau)\phi_* + (-1)^{i+1} \frac{i\pi\epsilon}{2j\omega} C_{ij} \right\} \dots \dots \dots (36)$$

なる有限な波速が定まる。振幅は次式となる。

$$X_{ij} = (-1)^i \frac{m_{ij}}{\lambda_{ij}} \dots \dots \dots (37)$$

一方、 $1/R_j \neq 0$ の場合には、 $c_{ij} = 0$ を条件として式(29)、(30)を連立して解くことから、次式を得る。ただし、自明のファイックスは省略する。

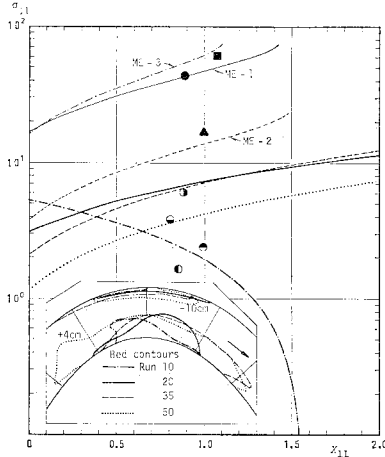
$$X_{ij} = \frac{(-1)^i \lambda m \pm \sqrt{(K^2 + A^2)(\kappa^2 + \lambda^2) - (\kappa m)^2}}{\kappa^2 + \lambda^2} \dots \dots \dots (38)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & \sigma_{Rj} + \frac{1}{j\omega} \tan^{-1} \\ & \cdot \left[\frac{(-1)^{i+1} \kappa m (\kappa K + \lambda A) \pm (\lambda K - \kappa A)}{(-1)^{i+1} \kappa m (\lambda K - \kappa A) \mp (\kappa K + \lambda A)} \right]^* \\ & \cdot \left[\frac{\sqrt{(K^2 + A^2)(\kappa^2 + \lambda^2) - (\kappa m)^2}}{\sqrt{(K^2 + A^2)(\kappa^2 + \lambda^2) - (\kappa m)^2}} \right]^* \\ & \text{(複号同順)} \dots \dots \dots (39) \end{aligned}$$

以上より、 M_{ij} , N_{ij} が既知であれば、水路の幾何形状と平均水理量のみから、平衡状態にある底面地形を推測できることになる。ただし、これらの式は X_{ij} , σ_{ij} の満たすべき必要条件であって、式中の複号は同一の幾何形状、同一の水理条件のもとでも二通りの解が存在することを示す。したがって、現象的に無意味な解を除去するなど、十分性を吟味する必要があるが、重根に近い場合にはいずれも有意なことが多く、一方を特定できないことがある。

(3) 振幅と位相の関係式

式(38)、(39)から内容のよくわからない M_{ij} を消去し、 X_{ij} と σ_{ij} の関係式を導いて実測値との照合を行



図一11 主要底面波形の振幅と位相の関係（図中の曲線は、式(40)による理論曲線・描点は実測値。等高線は、Hookeの一連の実験における底面形状を+4cmの線と、-10cmの線で重ねて表現したものであり、Hooke²⁾より引用)

う。i=j=1の場合について考えると式(40)を得る。

$$\sigma_{11} = \frac{1}{\omega} \tan^{-1} \left[\frac{-\kappa A X_{11} \pm K \sqrt{K^2 + A^2 - (\kappa X_{11})^2}}{-\kappa K X_{11} \pm A \sqrt{K^2 + A^2 - (\kappa X_{11})^2}} \right] \dots\dots\dots (40)$$

A中に含まれているN₁₁が不明のままでは計算ができないので、式(22)~(25)を参考にこれを仮定する。図一11は、N₁₁=14とし、表一1の実験の水理量を与えて描いたX₁₁とσ₁₁の関係である。ただし、p=3, r=4/3としている。図中の描点は実測値であるが、Run 20を除き、いずれも理論線の近傍に位置している。Run 20の不一致の原因は現在のところ明らかにできない。しかし蛇行角、河床材料、発生河床波がそれぞれ異なる6種類の実験において理論との対応が良好であり、N₁₁=14の見積りが妥当なこと、前節までに導いてきたモデルが基本的に正しく、有効なことがわかる。また、図によれば、蛇行角が小さいほど、振幅が大きいほど大きな位相のずれが生ずるようであるが、Run 10のように振幅の増加とともに減少して負となるケースもあり、平均水理量の組合せによってさまざまな変化の起こることがわかる。Run 10の深掘れ部の最大振幅/平均水深の値は、1.5ほどに達しており、これに合わせてX₁₁を採るものとする、最深点が曲頂の上流側に現われる図のような現象を説明できることになる。

(4) 砂州の前進が止まる限界蛇行角

砂州領域においては、交互砂州が自励的に成長して常にX₁₁≧0となり、一方式(40)が値をもつためには同式の根号内が正にならなければならない。したがって、砂州が安定してとどまる流路の曲率(あるいは蛇行角)のとり得る範囲には限界が存在することになる。限界以下の蛇行角においては、式(40)で示される砂州の

停止位置は存在し得ず、蛇行内の砂州は前進し続けることになる。式(40)の根号内をゼロとおいた式に、式(33)、(34)およびsine-generated curveで成り立つ1/R₁=θ₀ωを用いると、限界角が次のように求まる。

$$\theta_c = \frac{\{p\phi_* B_{11} + (1-r)\phi_* + \pi\epsilon C_{11}/(2\omega)\}^*}{\omega \sqrt{\{p\phi_* B_{11}' + \pi\epsilon C_{11}'/(2\omega)\}^2 + \pi\epsilon C_{11}/(2\omega) X_{11} + \{p\phi_* A_{11}' - \pi\epsilon D_{11}'/(2\omega) + \pi\epsilon N_{11}/(2\omega)\}^2}} \dots\dots\dots (41)$$

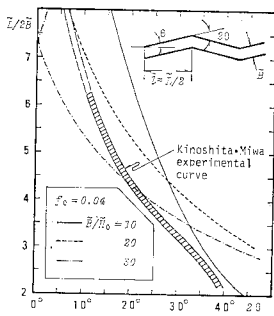
このときの位相σ_{c11}は、

$$\sigma_{c11} = \frac{1}{\omega} \tan^{-1} \left[\frac{p\phi_* A_{11}' - \pi\epsilon D_{11}'/(2\omega) + \pi\epsilon N_{11}/(2\omega)}{p\phi_* B_{11}' + \pi\epsilon C_{11}'/(2\omega)} \right] \dots\dots\dots (42)$$

にて表わされる。式(41)にはX₁₁が含まれており、確定した関係式とはいえないが、図一6で得られたX₁₁≒1を用いて計算することにする。平均水理量をさまざまに変えた結果では、θ_cはF, τ_{*0}による影響は小さく、f₀とB̃/H̃₀による変化が大きい。いま、砂州の発生領域を満たすように、f₀=0.04, B̃/H̃₀=10, 20, 30を与えると図一12の結果を得る。ただし、木下らの実験曲線と比較するために横軸にθ_cの2倍を度数でとり、縦軸に半蛇行長/流路幅をとっている。多くの仮定にもかかわらず、式(41)は実験曲線に近い値を示している。一方、図一13は、同じ条件を与えて式(42)を計算したものである。いずれも、位相が1/4蛇行長を越えており、砂州の移動停止限界時の水衝点が、流路の変曲点を越えたところに現われることを示している。これは実際現象によく対応しているものといえよう。しかし、本来X₁₁は一定ではなく、また後述のようにN₁₁もf₀とともに変化する可能性があり、より信頼し得る条件式を確立するにはこれらの検討が不可欠である。

(5) 係数M_{ij}, N_{ij}の性質

M_{ij}, N_{ij}が定まれば、X_{ij}, σ_{ij}の理論値を直接求めることができる。ここでは、式(38)、(39)に対して実測のX_{ij}, σ_{ij}を与え、両式を連立してM_{ij}, N_{ij}を解き、その性質を調べることにする。その際、直線流路における交互砂州に関するM_{ij}の性質を調べるために、表一2の実験に対し、式(37)を使って計算を進める。得られたM_{ij}のうち、M₁₁の値はすべて負となった。式(26)によれば、横断面内で水深の小さい方の岸から、深い方の岸へ流れが生じていることを意味する。このことは、s軸方向の流砂の出入りによって成長する波高を、二次流が抑止し、平衡を保っているものと解釈できるが、現在のところ実態は明らかでない。図一14は、横軸に村本・藤田¹³⁾による領域区分パラメーター(B̃/H̃₀)(B̃/d)^{-1/3}をとり、Run 20を除く全ケースの|M₁₁|



図—12 限界蛇行角の理論曲線と実験曲線の比較

示し、波高を構成する機構的な違いを際立たせている。

同様に、 M_{22} , M_{20} , M_{31} などに関して計算を進めると以下のような性質が明らかになる。 M_{20} は 0.061, M_{31} は 0.045 の平均値をもち、ほぼ一定な値をとるが、 M_{22} は上述の砂州区分パラメーターに対して1次比例する傾向を示し、その2.8前後の値を境に負から正へ転ずる。

一方、 N_{11} については、図—15 に示すような結果となった。 $N_{11} = 14$ がほぼ代表的な値であることが確かめられる。しかし、著者および Hooke の実験ごとに f_0 の関数としてまとめ、池田や Zimmermann らの理論線と同じ傾向を示すようにもみえる。

以上のように逆算された係数は、何らかのまとまりを示し、定式化も可能なように思われるが、データ数が不足していること、理論的根拠が明確でないこと、各係数の変化に対して X_{ij} , σ_{ij} の動きが敏感であり、かなりの精度が必要なことから、本論文では定性的なことがらを述べるにとどめることにする。

5. まとめ

(1) 蛇行砂州形状の特徴は、前縁に沿って「水みち」が形成されることにあり、非砂州の場合にはこれがみられない。また前者の河床上の流れの特徴は、流路内の蛇行性が顕著なことであり、後者の流れは谷軸に平行する傾向が強い。

(2) 表—1, 2 の実験の底面形状に対して調和分析を試みた結果、流路幅の2倍、および1蛇行長を基本周期として、砂州、非砂州実験ともに、波数(1, 1), (2,

についてその関連を調べたものである。直線砂州のデータは、このパラメーターのほぼ3乗に比例してまとまっている。蛇行砂州の2つのデータも4倍弱の大きさを示すが、同一の傾きをもって並んでいる。これに対し、蛇行非砂州のデータは明らかに異なる性質を示し、波高を構成する機構的な違いを際立たせている。

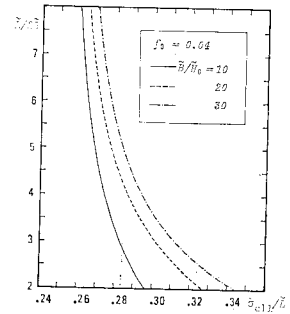
0) の波の振幅が卓越した。蛇行砂州では(2, 2)の波が(1, 1)に次ぎ、「水みち」に対応した。(3, 1)の波は砂州に固有な性質を反映している。非砂州では、(2, 2), (3, 1)ともに値が小さい。

(3) (1, 1)の波の最深点は、深掘れ部の最深点にはほぼ一致し、また水衝点にはほぼ対応している。

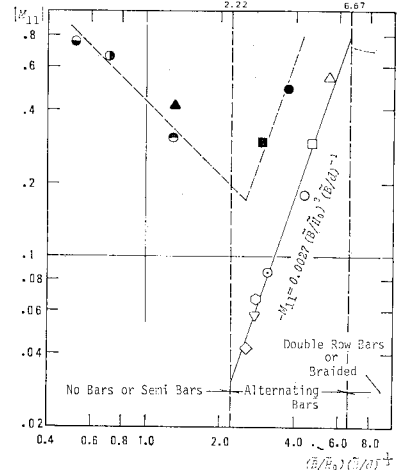
(4) 二次元浅水流モデルの線形解は、① 砂州、非砂州のいずれの場合にも、流れのおおよその傾向を再現できる。② しかし、水衝部とその上流区間の流速分布を表現しきれない。③ 底面形状は、4~6項をもって表わせれば十分であり、場合によっては(1, 1)の1項のみでよい。これ以上項数を増しても高波数域での誤差が累積し、理論流速の結果は変わらないか逆に悪くなる。

(5) 二次流底面流速が、平面曲率と底面形状の影響によって生ずるものとして横断方向流量を表現し、蛇行流の解を縦横断方向流量に結びつけて流砂の平衡条件を求めると、底面波の振幅ならびに位相が満たすべき条件が得られる。これらの中には二次流にかかわる未知パラメーター M_{ij} , N_{ij} が含まれる。

(6) 実験値を用いて M_{ij} , N_{ij} を逆算したところ、



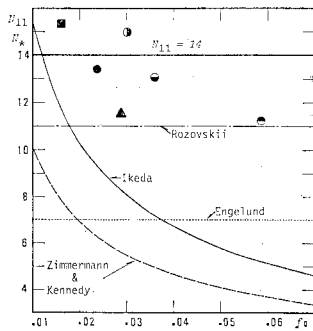
図—13 限界蛇行角時の水衝点位置



図—14 係数 M_{11} の性質 (砂州の領域区分は村木・藤田¹⁴⁾による)

表—2 直線水路における交互砂州実験の主要水理量

実験番号	流路幅 \tilde{B} (cm)	河床材料中央粒径 d (cm)	流量 Q (l/s)	平均河床勾配 i	平均水深 \tilde{H}_0 (cm)	平均流速 \tilde{U}_0 (cm/s)	砂州波長 \tilde{L} (cm)	表示記号
ST-1	30	0.043	0.75	0.0140	0.77	32.55	209	○
ST-2	22	0.043	0.70	0.0126	0.87	36.15	240	●
ST-4	22	0.076	0.83	0.0100	1.20	31.83	189	▽
ST-6	22	0.076	0.87	0.0083	1.30	30.65	260	◇
ST-8	22	0.076	0.78	0.0125	1.20	35.59	189	◇
西谷ら ¹⁴⁾ の実験	50	0.233	4.90	0.0200	1.77	55.37	400	□
井口 ¹⁵⁾ の実験	50	0.233	3.52	0.0185	1.53	46.16	400	△

図-15 係数 N_* および N_{11} の比較

る、以下の性質が明らかになった。 N_{11} は、円弧水路における二次流の理論係数 N_* に近い性質を示す。 M_{11} は、砂州の形成領域区分パラメータと密接に関係するが、砂州領域内と以外で異なる特性をもつ。

(7) 振幅と位相の式から M_{ij} を消去すると、両者の関係式が得られる。 $i=j=1$ の場合に、同式は河床波の違いによらず、また蛇行角 55° という比較的強い弯曲にかかわらず成立した。同式は、振幅に常識的な値を与えることにより、水衝点を予測するのに利用し得る。

(8) 上記の式が実数解をもつべき条件から、砂州の移動が停止する限界蛇行角が求められた。これは、砂州の形成領域内で、木下・三輪の実験曲線に近い結果を示す。また、そのときの水衝位置が流路変曲点の下流にすることが理論的に説明された。

以上のことから、本研究における線形モデルの有効性を示している。

謝 辞：本研究を進めるにあたり、山岡教授、岸教授より懇切な指導・助言をいただいた。また、東京工業大学の福岡助教授、埼玉大学の池田助教授からも、有益な討議をいただいた。池田先生には、Hooke の文献を拝見願った。実験資料の整理、自動作画において、本学技官の道口氏、大学院生の渡辺康玄君に全面的な協力を願った。末尾ながら、これらの方々に深謝の意を表する次第である。

補 足

$$\begin{aligned} \delta_{i0} &= \{1 - (-1)^i\} / 2 \\ \Delta &= 2(j\omega)^2 \{4(F^2 - 1)(j\omega)^2 - (i\pi\epsilon)^2\}^2 \\ &\quad + 2f_0^2 \{2F^2(\tau + 2)(j\omega)^2 - (i\pi\epsilon)^2\}^2 \\ A_{ij} &= -f_0 j\omega [16(\tau + 2)F^2(j\omega)^4 \\ &\quad + 4(\tau F^2 - \tau - 2)(j\omega)^2(i\pi\epsilon)^2 - \tau(i\pi\epsilon)^4] / \Delta \\ B_{ij} &= [32(F^2 - 1)(j\omega)^6 - 2\{4(j\omega)^2 + \tau(\tau + 2) \\ &\quad \cdot (f_0 F)^2\}(j\omega)^2(i\pi\epsilon)^2 + \tau f_0^2(i\pi\epsilon)^4] / \Delta \\ A_{ij}' &= \delta_{i0}(-1)^{(i+1)/2} \cdot 8\epsilon f_0 j\omega [(-1)^{(i+1)}(\tau F^2 + 2) \\ &\quad \cdot \{4F^2(j\omega)^2 - (i\pi\epsilon)^2\} + 16F^2(F^2 - 1) \\ &\quad \cdot (j\omega)^4 / (i\pi\epsilon)^2 - 4\{2(F^2 - 1)(j\omega)^2 + (i\pi\epsilon)^2\}] / \Delta \\ B_{ij}' &= \delta_{i0}(-1)^{(i+1)/2} \cdot 8\epsilon [(-1)^i \{8(F^2 - 1)(j\omega)^4 \\ &\quad - 2\tau(\tau + 2)f_0^2 F^4(j\omega)^2 - \{2(j\omega)^2 - \tau(f_0 F)^2\} \\ &\quad \cdot (i\pi\epsilon)^2\} + f_0^2 \{8(\tau + 2)F^4(j\omega)^4 / (i\pi\epsilon)^2 \\ &\quad - 2(\tau + 4)F^2(j\omega)^2 + (i\pi\epsilon)^2\}] / \Delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{ij} &= (-1)^{i+1/2} 2(i\pi\epsilon)(j\omega) [8(F^2 - 1)(j\omega)^4 + 2(\tau + 2)^2 \\ &\quad \cdot (f_0 F)^2 \cdot (j\omega)^2 - \{2(j\omega)^2 + (\tau + 2)f_0^2\} \cdot (i\pi\epsilon)^2] / \Delta \\ D_{ij} &= (-1)^{i+1/2} f_0(i\pi\epsilon)(j\omega)^2 \{4(\tau + 2)(j\omega)^2 \\ &\quad + \tau(i\pi\epsilon)^2\} / \Delta \\ C'_{ij} &= -\delta_{i0}(-1)^{(i+1)/2} \cdot \frac{16}{i\pi} j\omega [8(F^2 - 1)^2(j\omega)^4 \\ &\quad + 2(\tau + 2)^2 f_0^2 F^4(j\omega)^2 - \{2(F^2 - 1)(j\omega)^2 \\ &\quad + (\tau + 2)(f_0 F)^2\}(i\pi\epsilon)^2 + (-1)^i f_0^2 \{2(\tau + 2) \\ &\quad \cdot F^2(j\omega)^2 - (i\pi\epsilon)^2\}] / \Delta \\ D'_{ij} &= -\delta_{i0}(-1)^{(i+1)/2} \cdot 16\epsilon f_0(j\omega)^2 [(\tau F^2 + 2)(i\pi\epsilon) \\ &\quad - (-1)^i \{4(F^2 - 1)(j\omega)^2 / (i\pi\epsilon) - i\pi\epsilon\}] / \Delta \\ E_{ij} &= 4f_0 F^2(j\omega)^3 \{4(\tau + 2)(j\omega)^2 + \tau(i\pi\epsilon)^2\} / \Delta \\ F_{ij} &= -4F^2(j\omega)^2 [8(F^2 - 1)(j\omega)^4 + 2(\tau + 2)^2 \\ &\quad \cdot (f_0 F)^2(j\omega)^2 - \{2(j\omega)^2 + (\tau + 2)f_0^2\}(i\pi\epsilon)^2] / \Delta \\ E'_{ij} &= \delta_{i0}(-1)^{(i+1)/2} \cdot 32\epsilon f_0 F^2(j\omega)^3 [(-1)^i(\tau F^2 + 2) \\ &\quad - \{4(F^2 - 1)(j\omega)^2 / (i\pi\epsilon)^2 - 1\}] / \Delta \\ F'_{ij} &= -\delta_{i0}(-1)^{(i+1)/2} \cdot 16\epsilon F^2 [(-1)^i \{4(F^2 - 1)(j\omega)^4 \\ &\quad + 2(\tau + 2)(f_0 F)^2(j\omega)^2 - \{(j\omega)^2 + f_0^2\}(i\pi\epsilon)^2\} \\ &\quad + 2f_0^2(j\omega)^2 \{2(\tau + 2)F^2(j\omega)^2 / (i\pi\epsilon)^2 - 1\}] / \Delta \end{aligned}$$

参 考 文 献

- 1) 木下良作：石狩川河道変遷調査，科学技術庁資源局資料第36号，1961-11.
- 2) 洪水流の三次元流況と流路形態に関する研究，土木学会水理委員会研究小委員会（代表声田和男），1982-3.
- 3) Odgaard, A.J. : Transverse Bed Slope in Alluvial Channel Bends, Jour. of Hy. Div., ASCE, Vol. 107, No. HY 12, 1981-12.
- 4) Kikkawa, H., S. Ikeda and A. Kitagawa : Flow and Bed Topography in Curved Open Channels, Jour. of Hy. Div., ASCE, Vol. 102, No. HY 9, 1976-9.
- 5) Zimmermann, C. and J.F. Kennedy : Transverse Bed Slopes in Curved Alluvial Streams, Jour. of Hy. Div., ASCE, Vol. 104, No. HY 1, 1978-1.
- 6) Engelund, F. : Flow and Bed Topography in Channel Bends, Jour. of Hy. Div. ASCE, Vol. 100, No. HY 11, 1974-11.
- 7) Hooke, R.L. : Shear-stress and Sediment Distribution in a Meander Bend, Ungi Rapport 30, Univ. of Uppsala, 1974.
- 8) 木下良作・三輪 式：砂レキ堆の位置が安定化する流路形状，新砂防，94，1974.
- 9) 長谷川和義：非平衡性を考慮した側岸浸食量式に関する研究，土木学会論文報告集，第316号，1981-12.
- 10) Rozovskii, I.L. : Flow of Water in Bends of Open Channels, Academy of Science of the Ukrainian S.S. R., Israel Program for Scientific Translations, 1961, 2nd. Impress.
- 11) 池田駿介：移動床河川の彎曲部における二次流と動的横断平衡河床について，土木学会論文報告集，第229号，1974-9.
- 12) Zimmermann, C. : Roughness Effects on the Flow Direction Near Curved Stream Beds, Jour. of Hydraulic Research 15, No. 1, 1977.
- 13) 井口昌平：砂礫堆の形成に関する水理学的考察，東京大学生産技術研究所報告，第14巻，第5号，1965.
- 14) 西谷隆互・吉野文雄・牧野立平：洪水による河床変動についての実験的研究，法政大学工学部研究集報（第9号），1973-2.
- 15) 村本嘉雄・藤田裕一郎：中規模河床形態の分類と形成条件，第22回水理講演会論文集，1978-2.