

## 変厚矩形板の曲げの一解析法

BENDING ANALYSIS OF RECTANGULAR PLATES  
WITH VARIABLE THICKNESS

崎 山 毅\*・松 田 浩\*\*

By Takeshi SAKIYAMA and Hiroshi MATSUDA

## 1. 序 言

変厚矩形板の基礎微分方程式は、任意の関数として与えられる板剛度および板厚を係数とする、いわゆる変数係数の連立偏微分方程式となるために、その解析解を一般的に求めることはほとんど不可能であると考えられる。そのため、変厚板の解法としていくつかの近似解法、数値解法が提案されてきている。

梶田・成岡<sup>1)</sup>は、一方向に断面の厚さが線形に変化する場合の剛性マトリックスを誘導し、これを用いて、有限要素法で等分布荷重を満載する変厚片持板のたわみおよび曲げモーメントを解析した。倉田・谷平<sup>2)</sup>は、任意の変厚四辺形板の曲げ問題について、解析的近似解法を提案し、変断面形状が板剛度として2回微分可能な関数形で与えられるならば、変厚板でも等厚板と本質的に同じ方法で解くことができることを示し、たわみおよび曲げモーメントの計算を行った。

一方、四辺単純支持という限られた境界条件をもつ変厚矩形板に関しては、いくつかの場合について、理論解が求められている。中川<sup>3)</sup>は、曲げ剛性が  $x, y$  の1次関数で表わされる変厚矩形板について、たわみ影響面の理論解を求めた。また、Fan Jia-rang<sup>4)</sup>は、曲げ剛性が一方向に線形に変化する変厚矩形板について、部分分布荷重および集中荷重に対するたわみおよび曲げモーメントの理論解を求めた。

さらに、久保・吉田<sup>5)</sup>は、任意形状の平板の曲げ問題について、有限要素法と差分法との接点に位置する数値解析法を提案し、その応用として、板厚が徐々に変化する変厚板について、かなりの精度の解を得ることができることを示した。

以上のように、変厚矩形板の曲げ問題について、多く

の研究が行われてきているが、任意の境界条件、荷重条件、および、変断面性に対する解析の容易さおよび方法の一般性という観点に立てば、変厚矩形板の解法に関してまだ検討の余地が残されているものと考えられる。

本論文は、変厚矩形板を基礎微分方程式に基づいて直接的に解析できる解法の確立を目的としたものである。基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用とにより、変厚矩形板の基礎微分方程式の解析的近似解を求め、これに基づく変厚板の解法を提示した。本解法によれば、任意の境界条件および荷重条件をもつ変厚矩形板を一般的に解析することができる。また、板剛度や板厚の変化が不規則で関数表示できない場合についても、矩形板の縦横の等分割線の交点における板剛度、板厚の値が与えられれば、これらが規則的な場合と同様に解析することができる。

## 2. 変厚板の基礎微分方程式

平板のせん断力を  $Q_y, Q_x$ 、ねじりモーメントを  $M_{xy}$ 、曲げモーメントを  $M_y, M_x$ 、たわみ角を  $\theta_y, \theta_x$ 、たわみを  $w$  とすれば、変厚板を含む一般的な矩形板の曲げに関する基礎微分方程式は、Reissnerの平板曲げ理論に基づいて、次の連立偏微分方程式となる。

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \dots\dots\dots (1 \cdot a)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \dots\dots\dots (1 \cdot b)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \dots\dots\dots (1 \cdot c)$$

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} = \frac{M_x}{D} \dots\dots\dots (1 \cdot d)$$

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \frac{M_y}{D} \dots\dots\dots (1 \cdot e)$$

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = \frac{2}{D(1-\nu)} M_{xy} \dots\dots\dots (1 \cdot f)$$

\* 正会員 工博 長崎大学助教授 工学部構造工学科

\*\* 正会員 工修 長崎大学助手 工学部構造工学科

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x = \frac{Q_x}{Gt_s} \dots\dots\dots(1 \cdot g)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y = \frac{Q_y}{Gt_s} \dots\dots\dots(1 \cdot h)$$

ここに、 $q=q(x, y)$ ：横荷重強度、 $E$ ：弾性係数

$G$ ：せん断弾性係数、 $\nu$ ：ポアソン比

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} : \text{板剛度}, t_s = \frac{h}{1.2}$$

$h=h(x, y)$ ：板厚

ここで、断面力  $Q_y, Q_x, M_{xy}, M_y, M_x$  および変形  $\theta_y, \theta_x, w$  に関して、次の無次元量  $X_1 \sim X_8$ ,

$$X_1 = \frac{a^2}{D_0(1-\nu^2)} Q_y, X_2 = \frac{a^2}{D_0(1-\nu^2)} Q_x$$

$$X_3 = \frac{a}{D_0(1-\nu^2)} M_{xy}, X_4 = \frac{a}{D_0(1-\nu^2)} M_y$$

$$X_5 = \frac{a}{D_0(1-\nu^2)} M_x, X_6 = \theta_y, X_7 = \theta_x, X_8 = w/a$$

を導入すれば、式 (1.a)~(1.h) は次のように書き換えられる。

$$\frac{\partial X_1}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial X_2}{\partial \eta} = -\bar{q} \dots\dots\dots(2 \cdot a)$$

$$\frac{\partial X_3}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial X_5}{\partial \eta} = \mu X_2 \dots\dots\dots(2 \cdot b)$$

$$\frac{\partial X_4}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial X_3}{\partial \eta} = \mu X_1 \dots\dots\dots(2 \cdot c)$$

$$\frac{\partial X_6}{\partial \zeta} + \nu \mu \frac{\partial X_7}{\partial \eta} = IX_1 \dots\dots\dots(2 \cdot d)$$

$$\nu \frac{\partial X_6}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial X_7}{\partial \eta} = IX_5 \dots\dots\dots(2 \cdot e)$$

$$\frac{\partial X_7}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial X_6}{\partial \eta} = JX_3 \dots\dots\dots(2 \cdot f)$$

$$\frac{\partial X_8}{\partial \eta} + X_7 = \kappa X_2 \dots\dots\dots(2 \cdot g)$$

$$\frac{\partial X_8}{\partial \zeta} + \mu X_6 = \mu \kappa X_1 \dots\dots\dots(2 \cdot h)$$

ここに、 $x=a\eta, y=b\zeta$

$a, b$ ：矩形板の横、縦の辺長

$$\mu = \frac{b}{a}, \bar{q} = \mu k^2 \frac{q}{q_0}, k^2 = \frac{q_0 a^3}{D_0(1-\nu^2)}$$

$q_0$ ：基準荷重強度

$$I = \mu(1-\nu^2) \left(\frac{h_0}{h}\right)^3, J = 2\mu(1+\nu) \left(\frac{h_0}{h}\right)^3$$

$h_0$ ：基準板厚

$$\kappa = \frac{1}{10} \frac{E}{G} \left(\frac{h_0}{a}\right)^2 \frac{h_0}{h}$$

$$D_0 = \frac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2)} : \text{基準板剛度}$$

式 (2.a)~(2.h) を用いて、分布荷重や集中荷重などの任意の横荷重を受け、任意の境界条件をもつ、変厚矩形板の曲げ解析が行われる。

### 3. 基礎微分方程式の近似解

任意の変厚矩形板に関して、任意の荷重条件および境界条件のもとで、基礎微分方程式 (2.a)~(2.h) の解析解を一般的に得ることはほとんど不可能であると考えられるので、ここでは、Fig. 1 に示すような、矩形板の縦横の等分割線の交点を対象として、これらの離散点における、基礎微分方程式の近似解を求めることとする。

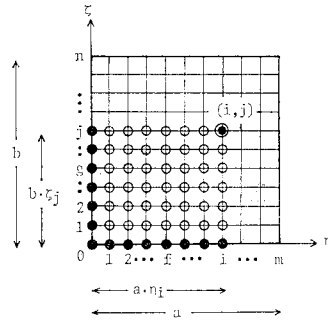


Fig. 1 Discrete Points on Rectangular Plate.

Fig. 1 に示すように、矩形板を横、縦方向にそれぞれ  $m, n$  等分し、これらの等分割線の交点の集合体とみなす。ここで、任意の交点  $(i, j)$  に関連する矩形領域、 $0 \leq \eta < \eta_i, 0 \leq \zeta < \zeta_j$  に注目し、これを領域  $[i, j]$  と表記することとする。また、◎印を付けた交点  $(i, j)$  をこの領域  $[i, j]$  の主要点と称し、領域  $[i, j]$  内の主要点以外の交点  $(f, g), f=0, 1, \dots, i, g=0, 1, \dots, j$  をこの領域の従属点と称することとする。さらに、従属点に関しては、 $\eta=0$  および  $\zeta=0$  の境界辺上にある●印を付けた交点  $(f, 0)$  および  $(0, g)$  を境界従属点と称し、その他の○印を付けた交点  $(f, g)$  を内部従属点と称して区別することとする。

はじめに、基礎微分方程式 (2.a)~(2.h) の各式を領域  $[i, j]$  において面積分し、積分方程式に変換すれば、次の諸式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_0^{\eta_i} X_1(\eta, \zeta_j) d\eta + \mu \int_0^{\zeta_j} X_2(\eta_i, \zeta) d\zeta \\ &= \int_0^{\eta_i} X_1(\eta, 0) d\eta + \mu \int_0^{\zeta_j} X_2(0, \zeta) d\zeta - \int_0^{\eta_i} \int_0^{\zeta_j} \bar{q} d\eta d\zeta \\ & \int_0^{\eta_i} X_3(\eta, \zeta_j) d\eta + \mu \int_0^{\zeta_j} X_5(\eta_i, \zeta) d\zeta \\ &= \int_0^{\eta_i} X_3(\eta, 0) d\eta + \mu \int_0^{\zeta_j} X_5(0, \zeta) d\zeta \\ & \quad + \mu \int_0^{\zeta_j} \int_0^{\eta_i} X_2 d\eta d\zeta \dots\dots\dots \\ & \int_0^{\zeta_j} X_6(\eta_i, \zeta) d\zeta \\ &= \int_0^{\zeta_j} X_6(0, \zeta) d\zeta + \int_0^{\zeta_j} \int_0^{\eta_i} (\kappa X_2 - X_7) d\eta d\zeta \end{aligned}$$

$$\int_0^{\eta_i} X_s(\eta, \zeta_j) d\eta$$

$$= \int_0^{\eta_i} X_s(\eta, 0) d\eta + \mu \int_0^{\zeta_j} \int_0^{\eta_i} (\kappa X_1 - X_0) d\eta d\zeta$$

次に、等間隔の数値積分法的应用により、領域  $[i, j]$  の主要点  $(i, j)$  および従属点  $(f, g)$  の諸量を用いて、これらの積分方程式を離散表示すれば、無次元化された断面力および変形  $X_p$ 、 $(p=1\sim 8)$  の主要点  $(i, j)$  における値  $X_{pij}$  に関する連立方程式が次のように得られる。

$$\beta_{ii}X_{1ij} + \mu\beta_{jj}X_{2ij}$$

$$= \sum_{k=0}^i \beta_{ik}[X_{1k0} - X_{1kj}(1 - \delta_{ki})]$$

$$+ \mu \sum_{l=0}^j \beta_{jl}[X_{20l} - X_{2il}(1 - \delta_{lj})]$$

$$- \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \beta_{ik}\beta_{jl}\bar{q}_{kl}$$

$$\beta_{ii}X_{3ij} + \mu\beta_{jj}X_{5ij}$$

$$= \sum_{k=0}^i \beta_{ik}[X_{3k0} - X_{3kj}(1 - \delta_{ki})]$$

$$+ \mu \sum_{l=0}^j \beta_{jl}[X_{50l} - X_{5il}(1 - \delta_{lj})]$$

$$+ \mu \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \beta_{ik}\beta_{jl}X_{2kl}$$

.....

$$\beta_{jj}X_{6ij} = \sum_{l=0}^j \beta_{jl}[X_{60l} - X_{6il}(1 - \delta_{lj})]$$

$$+ \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \beta_{ik}\beta_{jl}(\kappa_{kl}X_{2kl} - X_{7kl})$$

$$\beta_{ii}X_{8ij} = \sum_{k=0}^i \beta_{ik}[X_{8k0} - X_{8kj}(1 - \delta_{ki})]$$

$$+ \mu \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \beta_{ik}\beta_{jl}(\kappa_{kl}X_{1kl} - X_{6kl})$$

この連立方程式を解くことにより、領域  $[i, j]$  における、主要点  $(i, j)$  の諸量  $X_{pij}$  と境界従属点および内部従属点、 $(f, g)$ 、の諸量  $X_{pfg}$  との間の関係式が求められ、次式となる。

$$X_{pij} = \sum_{f=0}^i \left\{ \sum_{l=0}^i B_{if} A_{pl} [X_{lfo} - X_{lfj}(1 - \delta_{fi})] \right.$$

$$+ \sum_{g=0}^j \beta_{ig}\beta_{pl} [X_{l0g} - X_{lig}(1 - \delta_{gj})]$$

$$+ \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^j \beta_{jf}\beta_{jg} C_{ptfg} X_{lfg}(1 - \delta_{fi}\delta_{gj}) \left. \right\}$$

$$- \sum_{g=0}^j \sum_{l=0}^i \beta_{if}\beta_{jg} A_{pl}\bar{q}_{fg} \dots \dots \dots (3)$$

ここに、 $p=1, 2, \dots, 8, i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$

$$\beta_{if} = \alpha_{if}/m, \quad \beta_{jg} = \alpha_{jg}/n$$

$\delta_{ij}$  : Kronecker's delta

$A_{pt}, B_{pt}, C_{ptfg}$  : Appendix 参照

係数  $\beta_{if}, \beta_{jg}$  は数値積分法における重み係数である。本論文においては、等分割数値積分法として、Simpson

の台形公式を用いることとする。このとき、

$$\alpha_{if} = \begin{cases} 0.5 & (f=0, i) \\ 1 & (f \neq 0, i) \end{cases}$$

$$\alpha_{jg} = \begin{cases} 0.5 & (g=0, j) \\ 1 & (g \neq 0, j) \end{cases}$$

領域  $[i, j]$  を  $[1, 1], [1, 2], \dots, [2, 1], [2, 2], \dots$  と順次拡大してゆけば、ある領域の主要点は、次のより拡大された領域の内部従属点となる。したがって、最小領域  $[1, 1]$  から始めて、順次、領域を拡大しつつ、各領域の主要点の諸量  $X_{pij}$  を式 (3) により求め、これを次の領域の内部従属点における諸量  $X_{pfg}$  として、式 (3) の右辺に逐次代入してゆけば、各領域の内部従属点の諸量はすべて消去され、結局、任意の領域  $[i, j]$  の主要点  $(i, j)$  における諸量  $X_{pij}$  は、この領域の境界従属点  $(f, 0), (0, g)$  における諸量  $X_{rfo}, X_{sog}$ 、 $(r=1, 3, 4, 6, 7, 8), (s=2, 3, 5, 6, 7, 8)$  のみによって表わされることになり、次式のように整理される。

$$X_{pij} = \sum_{d=1}^6 \left( \sum_{f=0}^i a_{1pijfd} \cdot X_{rfo} + \sum_{g=0}^j a_{2pijgd} \cdot X_{sog} \right) + q_{pij} \dots \dots \dots (4)$$

ここに、

$$a_{hpijud} = \sum_{l=1}^8 \left\{ \sum_{k=0}^i \beta_{ik} A_{pl} [a_{htkou} - a_{htkjud}(1 - \delta_{ki})] \right.$$

$$+ \sum_{l=0}^j \beta_{jl} B_{pl} [a_{htolud} - a_{htilud}(1 - \delta_{lj})]$$

$$+ \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \beta_{ik}\beta_{jl} C_{ptkl} a_{htklud}(1 - \delta_{ki}\delta_{lj}) \left. \right\}$$

$$q_{pij} = \sum_{l=1}^8 \left\{ \sum_{k=0}^i \beta_{ik} A_{pl} [q_{tko} - q_{tkj}(1 - \delta_{ki})] \right.$$

$$+ \sum_{l=0}^j \beta_{jl} B_{pl} [q_{tol} - q_{til}(1 - \delta_{lj})]$$

$$+ \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \beta_{ik}\beta_{jl} C_{ptkl} q_{tkl}(1 - \delta_{ki}\delta_{lj}) \left. \right\}$$

$$- \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \beta_{ik}\beta_{jl} A_{pl}\bar{q}_{kl}$$

$p=1\sim 8, i=1\sim m, j=1\sim n, f=0\sim i, g=0\sim j, d=1\sim 6, h=1, 2, u=f (h=1 \text{ のとき}) \text{ or } g (h=2 \text{ のとき})$

$$a_{1r0id} = 1, \quad a_{2s0jd} = 1$$

$$a_{110j01} = \frac{\kappa_{00}}{\kappa_{0j}} \bar{\alpha}_j, \quad a_{22i001} = \frac{\kappa_{00}}{\kappa_{i0}} \bar{\alpha}_i$$

$$a_{140j03} = \frac{\bar{D}_{00}}{\bar{D}_{0j}} \bar{\alpha}_j, \quad a_{25i003} = \frac{\bar{D}_{00}}{\bar{D}_{i0}} \bar{\alpha}_i$$

$$a_{12i0k5} = \frac{1}{\kappa_{i0}} \bar{\beta}_{ik}, \quad a_{210jl4} = \frac{1}{\kappa_{0j}} \bar{\beta}_{jl}$$

$$a_{15i0k3} = \nu \frac{\bar{D}_{00}}{\bar{D}_{i0}} \bar{\beta}_{ik}, \quad a_{240jl3} = \nu \frac{\bar{D}_{00}}{\bar{D}_{0j}} \bar{\beta}_{jl}$$

$$a_{12i0k6} = \frac{1}{\kappa_{i0}} \bar{\gamma}_{ik}, \quad a_{210jl6} = \frac{1}{\mu\kappa_{0j}} \bar{\gamma}_{jl}$$

$$a_{15i0k5} = \frac{1}{\bar{D}_{i0}} \bar{\gamma}_{ik}, \quad a_{240jl4} = \frac{1}{\mu\bar{D}_{0j}} \bar{\gamma}_{jl}$$

$$\bar{\alpha}_i = (-1)^i, \quad \bar{\beta}_{ik} = \delta_{ik} + (-1)^{i+k} \cdot \delta_{0k}$$

$$\bar{\gamma}_{ik} = \frac{4m(-1)^{i+k}}{1 + \delta_{ik} + \delta_{0k}}, \quad \bar{D}_{i0} = \frac{D_0}{D_{i0}}$$

$$r = d + \delta_{2f} + \delta_{3f} + 2(\delta_{1f} + \delta_{5f} + \delta_{6f})$$

$$s = d + \delta_{1f} + \delta_{2f} + 2(\delta_{3f} + \delta_{4f} + \delta_{5f} + \delta_{6f})$$

式(4)は、変厚矩形板の縦横の等分割線の交点における、基礎微分方程式(2・a)~(2・h)の離散表示された近似解である。この解式中に含まれる境界従属点の6個ずつの諸量  $X_{rf0}$ ,  $X_{s0g}$  はいわゆる積分定数であり、境界条件によって決定されるべきものである。また、任意の領域  $[i, j]$  の主要点  $(i, j)$  における諸量  $X_{pij}$  を、この領域の境界従属点  $(f, 0)$ ,  $(0, g)$  における諸量  $X_{rf0}$ ,  $X_{s0g}$  に関係づける要素  $a_{hpjud}$  は、伝達マトリクス法におけるいわゆる伝達マトリクスに相当するものである。近似解(4)に基づいて得られる平板の数値解の収束性および精度に関しては、5.において検討することとする。

#### 4. 積分定数と境界条件

基礎微分方程式(2・a)~(2・h)の近似解(4)に含まれる積分定数  $X_{rf0}$  および  $X_{s0g}$  は、具体的には、それぞれ、平板の  $\zeta=0$  および  $\eta=0$  なる辺上の等分割点  $(f, 0)$  および  $(0, g)$  における断面力および変形を表わす。各分割点において6個ずつの積分定数が存在するが、平板の境界辺の支持条件に応じて、これらの中のいずれか3個の積分定数は既知となる。残りの3個の積分定数の値は対辺の境界条件によって決定される。

Fig. 2~Fig. 6に、5種の異なる境界条件をもつ平板の積分定数と境界条件を示す。これらの各図におい

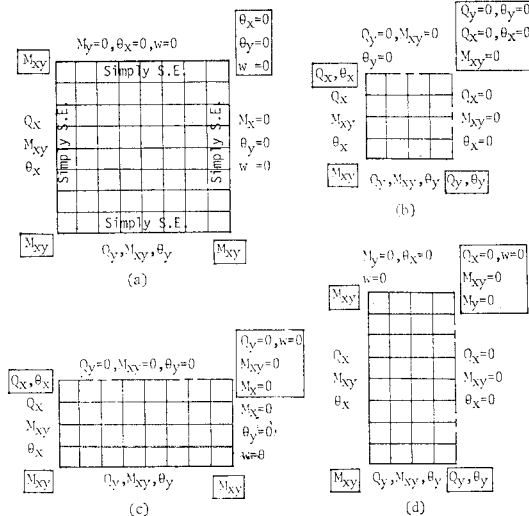


Fig. 2 Integral Constants and Boundary Conditions of Plate with Four Simply Supported Edges.

て、(a)図は平板全体を対象とした場合である。(d)図および、(c)図は、それぞれ、左右または上下の1軸対称性をもつ平板の1/2部分を対象とした場合である。また、(b)図は、左右および上下の2軸対称性をもつ平板の1/4部分を対象とした場合である。各図において、隅角部の分割点の積分定数および境界条件は□で囲まれている。なお、隅角点における積分定数および境界条件は、その隅角点において交差する2境界辺上での諸量間の関係を考慮して定められる。たとえば、Fig. 2(a)に示す四辺単純支持板の、 $x=0, y=0$ なる隅角点における積分定数は次のようになる。すなわち、 $x=0$ なる境界辺上においては、 $M_x = \theta_y = w = 0$ であり、また、 $y=0$

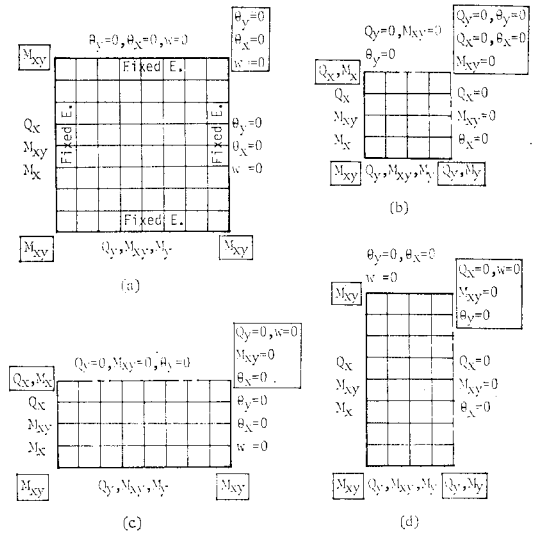


Fig. 3 Integral Constants and Boundary Conditions of Plate with Four Fixed Edges.

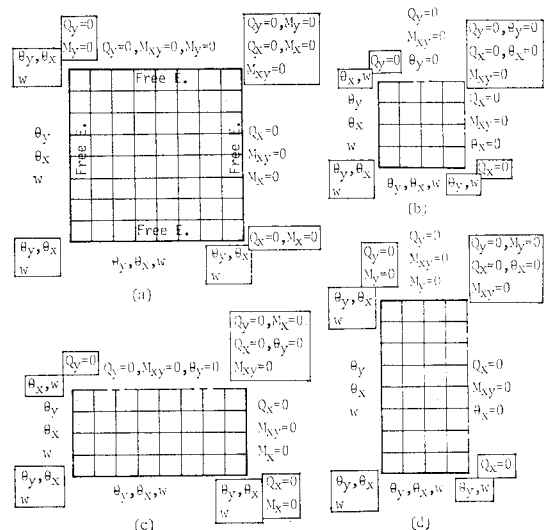
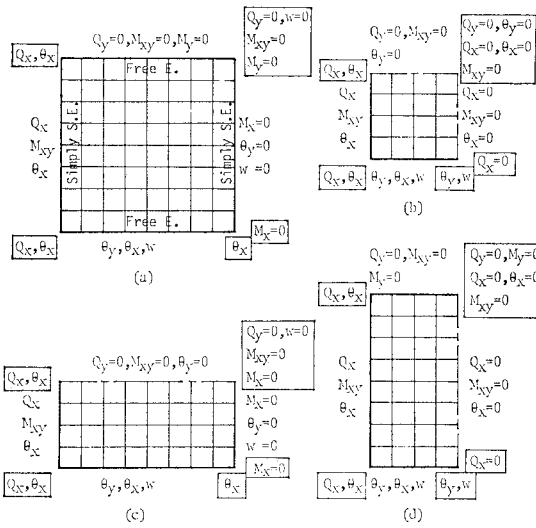
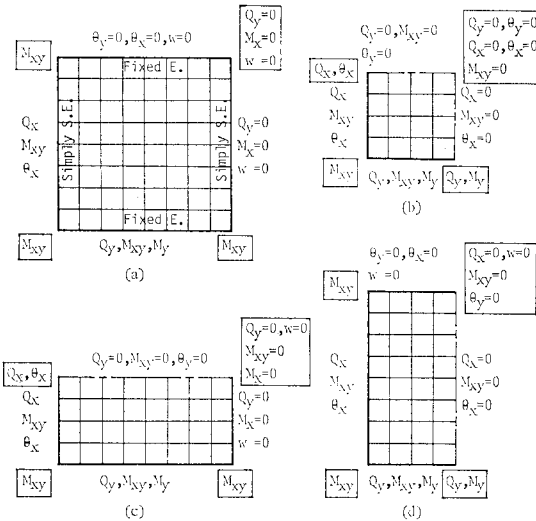


Fig. 4 Integral Constants and Boundary Conditions of Plate with Four Free Edges.



**Fig. 5** Integral Constants and Boundary Conditions of Plate with Two Opposite Edges Simply Supported and the Other Two Edges Free.



**Fig. 6** Integral Constants and Boundary Conditions of Plate with Two Opposite Edges Simply Supported and the Other Two Edges Fixed.

なる境界边上においては、 $M_y = \theta_x = w = 0$  であるから、両境界辺の交点である、 $x=0, y=0$  なる隅角点においては、これらすべてが満足されなければならないので

$$M_y = 0, M_x = 0, \theta_y = 0, \theta_x = 0, w = 0$$

となる。また、境界辺  $y=0$  上においては、 $w=0$ 、であることから、式 (1.g) より、 $\partial w / \partial x = Q_x / Gt_s - \theta_x = 0$ 、となり、 $Q_x / Gt_s = \theta_x$ 、なる関係が得られるが、この辺上においては、 $\theta_x = 0$ 、であるから、また、 $Q_x = 0$  ともなる。したがって、境界辺  $y=0$  上の端点である  $y=0, x=0$ 、の隅角点においては

$$Q_x = 0$$

となる。同様にして、境界辺  $x=0$  上においては、 $w=0$  であることから、式 (1.h) より、隅角点  $x=0, y=0$  において

$$Q_y = 0$$

となり、結局、この隅角点における未知の積分定数としては、 $M_{xy}$  のみが残ることになる。

また、Fig. 2 (a) に示す四辺単純支持板の、 $x=a, y=b$  なる隅角点における境界条件は次のようになる。すなわち、 $x=a$  なる境界边上においては、 $M_x = \theta_y = w = 0$ 、であり、また、 $y=b$  なる境界边上においては、 $M_y = \theta_x = w = 0$  であるゆえ、両境界辺の交点である、 $x=a, y=b$ 、なる隅角点においては、これらすべてが満足されなければならないので、

$$M_y = 0, M_x = 0, \theta_y = 0, \theta_x = 0, w = 0$$

となる。一方、境界辺  $y=b$ 、および  $x=a$  上においては式 (1.d) および (1.e) より

境界辺  $y=b$  上において

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \frac{1}{(1-\nu^2)D} (M_x - \nu M_y)$$

境界辺  $x=a$  上において

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial y} = \frac{1}{(1-\nu^2)D} (M_y - \nu M_x)$$

なる関係が成立する。したがって、本例のように、境界辺  $y=b$  および  $x=a$  上において、それぞれ、 $\theta_x = 0$  および  $\theta_y = 0$  の場合には、 $\partial \theta_x / \partial x = 0$ 、および  $\partial \theta_y / \partial y = 0$  であるから、境界辺  $y=b$  上においては、 $M_x = \nu M_y$ 、となり、また、境界辺  $x=a$  上においては、 $M_y = \nu M_x$  となる。したがって、両境界辺の交点である  $x=a, y=b$  の隅角点においては、必然的に  $M_x = M_y = 0$  となる。よって、この隅角点における独立な境界条件は

$$\theta_y = 0, \theta_x = 0, w = 0$$

の3条件となる。

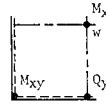
### 5. 数値解の収束性および精度

本解析法による矩形板の数値解の収束性および精度を検討するために、既往の近似解法による解析結果との比較および解析解との比較を行う。なお、数値解の比較に用いた既往の解析結果は、いずれも、せん断変形の影響を無視した Kirchhoff の薄板曲げ理論に基づいている。一方、本論文に用いた基礎式 (1.a)~(1.h) は、せん断変形の影響を考慮した Reissner の平板曲げ理論に基づくものである。したがって、これら両者の比較のために、本法における平板の解析においては、せん断変形の影響を十分に無視できる薄板を取り扱うこととし、板厚  $h$  と辺長  $a$  の比を  $h/a = 0.01$  とする。

**Table 1** Convergency of Numerical Solutions of Plate with Four Simply Supported Edges under Uniform Load ( $\nu=0.3$ ).

m	$Q_y/qa$	$M_{xy}/qa^2$		$M_x/qa^2$		$w/qa^4/D$		
		Author	Kurata	Author	Kurata	Author	Kurata	Kubo
4	0.334	-0.0340	-0.0308	0.0542	0.0472	0.00412	0.00400	0.00394
8	0.336	-0.0328	-0.0319	0.0492	0.0479	0.00408	0.00406	0.00407
12	0.337	-0.0325	-0.0321	0.0484	0.0479	0.00407	0.00406	0.00408
16	0.337	-0.0325	-0.0323	0.0482	0.0499	0.00407	0.00406	0.00408
20	0.338	-0.0325	-0.0324	0.0481	0.0479	0.00407	0.00406	
N.A.S.	0.338	-0.0325		0.0479		0.00406		

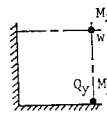
N.A.S. : Navier's Analytical Solution



**Table 2** Convergency of Numerical Solutions of Plate with Four Fixed Edges under Uniform Load ( $\nu=0.3$ ).

m	$Q_y/qa$	$M_x/qa^2$		$M_y/qa^2$		$w/qa^4/D$	
		Author	Kurata	Author	Kurata	Author	Kurata
4	0.664	0.0272	0.0227	-0.0623	-0.0510	0.00130	0.00126
8	0.452	0.0248	0.0226	-0.0525	-0.0515	0.00127	0.00127
12	0.437	0.0238	0.0229	-0.0519	-0.0515	0.00127	0.00127
16	0.440	0.0234	0.0229	-0.0517	-0.0519	0.00127	0.00127
20	0.440	0.0232	0.0230	-0.0515	-0.0539	0.00127	0.00127
T.A.S.		0.0231		-0.0513		0.00126	

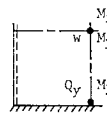
T.A.S. : Timoshenko's Analytical Solution



**Table 3** Convergency of Numerical Solutions of Plate with Two Opposite Edges Simply Supported and the Other Two Edges Fixed under Uniform Load ( $\nu=0.3$ ).

m	$Q_y/qa$	$M_x/qa^2$	$M_{y1}/qa^2$	$M_{y2}/qa^2$	$w/qa^4/D$
4	0.474	0.0280	0.0484	-0.0737	0.00184
8	0.512	0.0251	0.0359	-0.0711	0.00190
12	0.517	0.0247	0.0343	-0.0704	0.00191
16	0.516	0.0246	0.0338	-0.0701	0.00191
20	0.516	0.0245	0.0336	-0.0700	0.00191
T.A.S.		0.0244	0.0332	-0.0697	0.00192

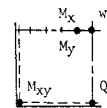
T.A.S. : Timoshenko's Analytical Solution



**Table 4** Convergency of Numerical Solutions of Plate with Four Simply Supported Edges under a Concentrated Load Applied at the Center ( $\nu=0.3$ ).

m	$Q_y/P/a$	$M_{xy}/P$	$M_x/P$		$M_y/P$	$w/Pa^2/D$	
			Author	Kurata		Author	Kurata
4	0.333	-0.0632	—	0.170	—	0.0083	0.0111
8	0.387	-0.0623	—	0.193	—	0.0103	0.0113
12	0.402	-0.0615	0.160	0.205	0.187	0.0110	0.0114
16	0.408	-0.0612	0.153	0.210	0.191	0.0112	0.0115
20	0.411	-0.0611	0.148	0.211	0.193	0.0114	0.0115
24	0.413	-0.0611	0.147	—	0.194	0.0114	—
T.A.S.			0.147		0.202	0.0116	

T.A.S. : Timoshenko's Analytical Solution



(1) 等厚板

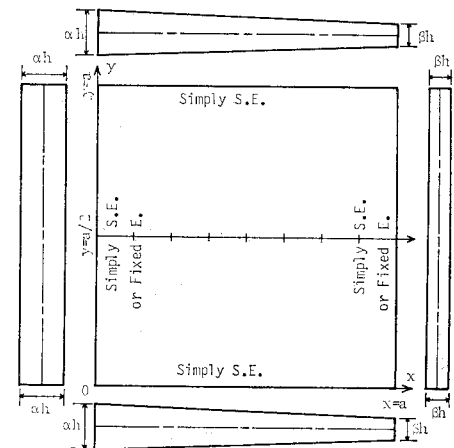
はじめに、等厚板に関して、本解析法による数値解の収束性および精度を明らかにするために、等分布荷重を満載する、四辺単純支持板、四辺固定板、対辺単純支持他対辺固定支持板、および、中央点に集中荷重を受ける四辺単純支持板について、断面力および変形の解析を行った。これらの結果を、文献 2)、5) の結果および既往の

解析解とともに、それぞれ **Table 1~Table 4** に示す。示された諸量は、表中図の各点の断面力および変形である。

いずれの解析においても、本解析法に基づく断面力および変形の数値解は、分割数  $m$  の増加とともに、一様に収束することが示されている。また、8~12 程度の比較的粗い分割のもとでも十分に実用性のある解が得られている。

(2) 変厚板

次に、本解析法による変厚板の数値解の精度を明らかにするために、**Fig. 7** に示すような、一方向にのみ板厚が直線的に変化する変厚板に関して、断面力および変形の解析を行った。この変厚板に関しては、Conway<sup>9)</sup> によって、四辺単純支持の場合および対辺単純支持他対辺固定支持の場合について解が求められている。これらの結果を、**Fig. 7** の  $y=a/2$  断面上のせ



Case 1 :  $\alpha=1.2, \beta=0.8$

Case 2 :  $\alpha=1.1, \beta=0.9$

( $\nu=0.25$ )

**Fig. 7** Rectangular Plate with Varying Thickness.

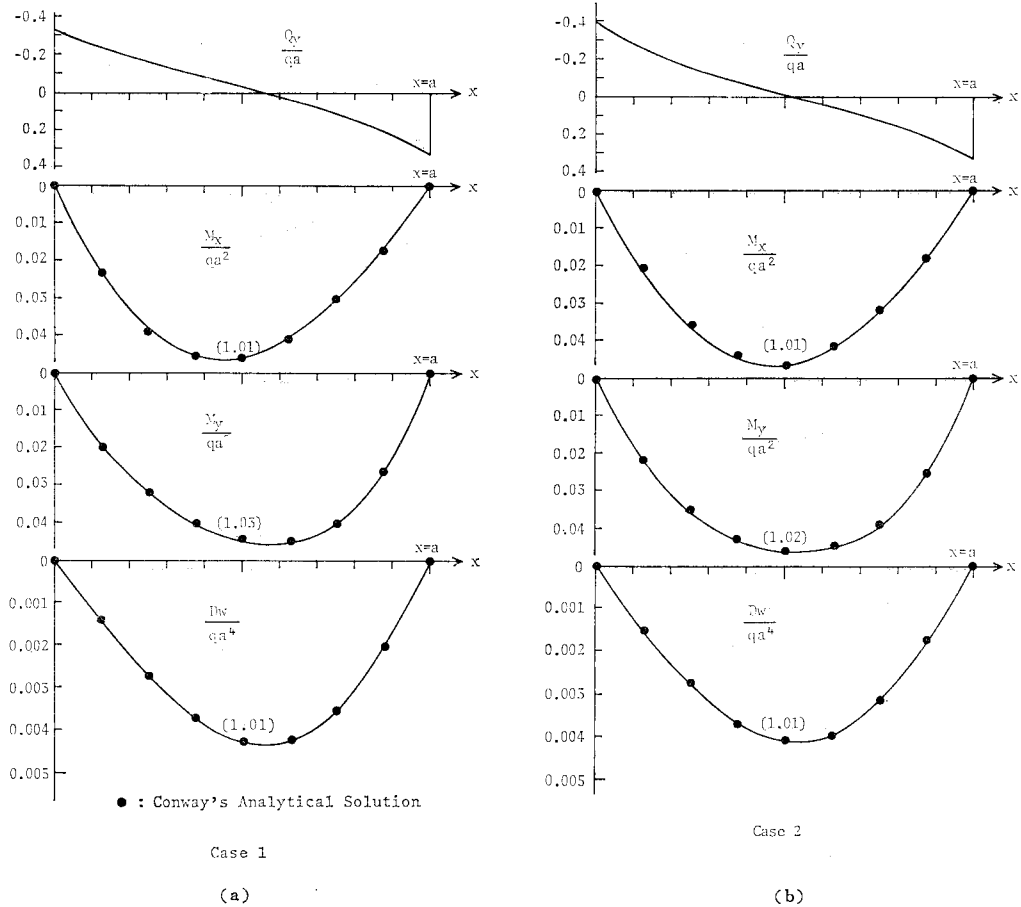


Fig. 8 Shearing Force, Bending Moment and Deflection of Plate with Varying Thickness.

ん断力, 曲げモーメントおよびたわみに関して, Fig. 8 (a), (b) および Fig. 9 (a), (b) に示す. なお, 本解析における分割数  $m$  は 8 である. 図中 ( ) 内に記入の数値は, 本解析法による近似解の Conway の解析解に対する比である. これらの諸量は, Table 1 および Table 3 に示された, 等厚板の  $m=8$  の場合の近似解の解析解に対する比とほぼ同等となっている. このことから, 本例に示された程度の板厚変化を有する変厚板は, 同一分割数のもとで, 等厚板と同程度の精度で解析できるものと判断される.

## 6. 結 語

微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用により, 変厚矩形板の基礎微分方程式の解析的近似解を求め, これに基づく変厚矩形板の一般的な解法を提示した. 数値解析の結果から, 本解析法による数値解は一般的な収束性をもつこと, また, 比較的粗い分割による解析においても実用上十分な精度をもつ解が得ら

れることなどが確認された.

本解析法によれば, 荷重の分布状態や板厚, 板剛度の場所的変化が不規則で関数表示できない場合でも, 矩形板の縦横の等分割線の交点におけるこれら諸量の値が与えられれば, 諸量が規則的な場合とまったく同様に解析することができる.

また, 本解析法は, 矩形板以外の任意の四辺形板の解析や平板の弾塑性解析, 大変形解析などへの応用も容易で, これらについては改めて報告の予定である.

## Appendix

$$\begin{aligned}
 A_{p1} &= \gamma_{p1}, & A_{p2} &= 0, & A_{p3} &= \gamma_{p2}, & A_{p4} &= \gamma_{p3} \\
 A_{p5} &= 0, & A_{p6} &= \gamma_{p4} + \nu \gamma_{p5}, & A_{p7} &= \gamma_{p6}, & A_{p8} &= \gamma_{p7} \\
 B_{p1} &= 0, & B_{p2} &= \mu \gamma_{p1}, & B_{p3} &= \mu \gamma_{p3}, & B_{p4} &= 0 \\
 B_{p5} &= \mu \gamma_{p2}, & B_{p6} &= \mu \gamma_{p6}, & B_{p7} &= \mu (\nu \gamma_{p4} + \gamma_{p5}) \\
 B_{p8} &= \gamma_{p8} \\
 C_{p1kl} &= \mu (\gamma_{p3} + \kappa_{kl} \gamma_{p7}), & C_{p2kl} &= \mu \gamma_{p2} + \kappa_{kl} \gamma_{p3} \\
 C_{p3kl} &= J_{kl} \gamma_{p6}, & C_{p4kl} &= I_{kl} \gamma_{p4}, & C_{p5kl} &= I_{kl} \gamma_{p5}
 \end{aligned}$$

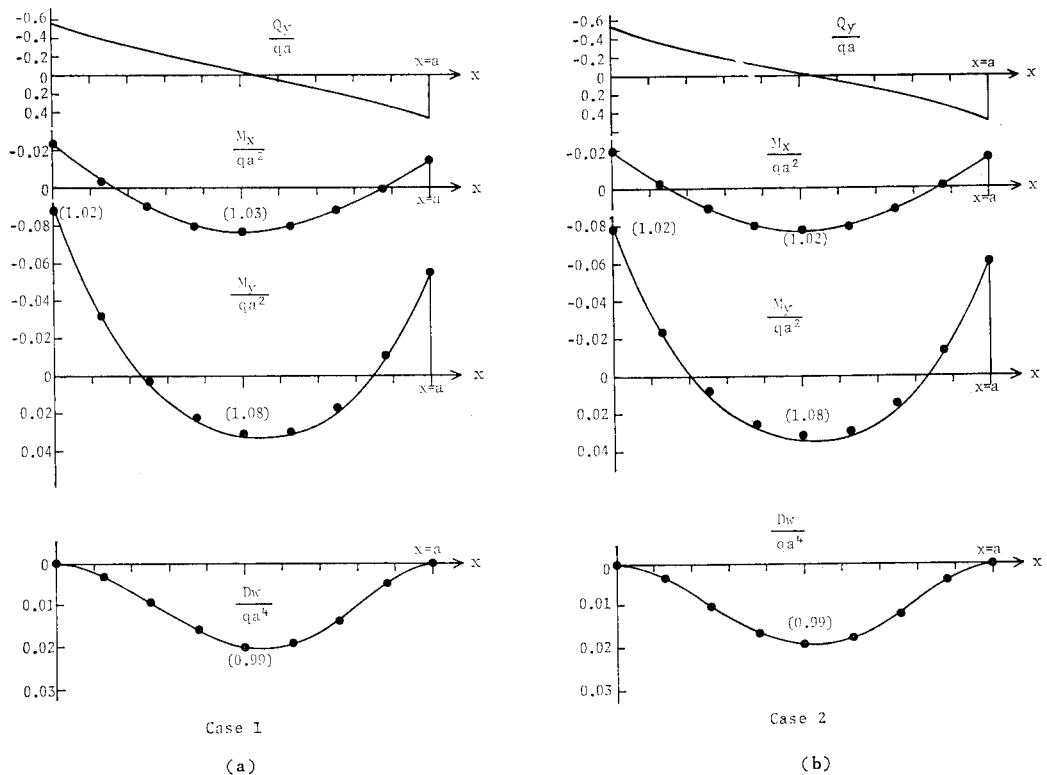


Fig. 9 Shearing Force, Bending Moment and Deflection of Plate with Varying Thickness.

$$C_{pskl} = -\mu \bar{\tau}_{pt}, C_{p7kl} = -\tau_{ps}, C_{pskl} = 0$$

$$[\tau_{pt}] = [\bar{\tau}_{pt}]^{-1}$$

$$\bar{\tau}_{11} = \beta_{ii}, \bar{\tau}_{12} = \mu \beta_{jj}, \bar{\tau}_{22} = -\mu \beta_{ij}, \bar{\tau}_{23} = \beta_{ii}$$

$$\bar{\tau}_{25} = \mu \beta_{jj}, \bar{\tau}_{31} = -\mu \beta_{ij}, \bar{\tau}_{33} = \mu \beta_{jj}, \bar{\tau}_{34} = \beta_{ii}$$

$$\bar{\tau}_{44} = -I_{ij} \beta_{ij}, \bar{\tau}_{46} = \beta_{ii}, \bar{\tau}_{47} = \mu \nu \beta_{jj}, \bar{\tau}_{55} = -I_{ij} \beta_{ij}$$

$$\bar{\tau}_{56} = \nu \beta_{ii}, \bar{\tau}_{57} = \mu \beta_{jj}, \bar{\tau}_{63} = -J_{ij} \beta_{ij}, \bar{\tau}_{66} = \mu \beta_{jj}$$

$$\bar{\tau}_{67} = \beta_{ii}, \bar{\tau}_{71} = -\mu \kappa_{ij} \beta_{ij}, \bar{\tau}_{76} = \mu \beta_{ij}, \bar{\tau}_{78} = \beta_{ii}$$

$$\bar{\tau}_{82} = -\kappa_{ij} \beta_{ij}, \bar{\tau}_{87} = \beta_{ij}, \bar{\tau}_{88} = \beta_{jj}$$

$$\beta_{ij} = \beta_{ii} \cdot \beta_{jj}$$

参考文献

1) 梶田建夫・成岡昌夫：変断面長方形板の曲げ，および，振

動に対する有限要素法の応用，土木学会論文報告集，第 161 号，1969.  
 2) 倉田宗章・谷平 勉：変厚四辺形板の曲げ解析，土木学会論文報告集，第 195 号，1971.  
 3) 中川建治：4 辺単純支持変厚板の曲げたわみに 関する研究，土木学会論文報告集，第 249 号，1976.  
 4) Fan Jia-rang: Plates of Varying Thickness with Four Simply Supported Edges, Proc. ASCE, Vol. 108, EM 1, 1982.  
 5) 久保慶三郎・吉田 裕：任意形状の平板曲げの数値解析法，土木学会論文報告集，第 167 号，1969.  
 6) Petrina, P. and H.D. Conway: Deflection and Moment Data for Rectangular Plates of Variable Thickness, Jour. Appl. Mech., Vol. 39, 1972.

(1982.12.13・受付)