

部分縁荷重を受ける長方形板の一座屈，後座屈解析

BUCKLING AND POST-BUCKLING ANALYSIS OF RECTANGULAR PLATES UNDER PARTIAL EDGE LOADINGS

桑 山 八 洲 彦*
By Yasuhiko KUWAYAMA

1. はしがき

フランジから直接輪荷重を受ける腹板のように，板縁に部分縁荷重を受ける板に対する従来の研究は，比較的少数で，座屈係数および耐荷力¹⁾の算定についてなされてきた．しかし，薄板が弾性域において，座屈荷重以上の荷重のもとで安定したつり合い系をもつことは一軸圧縮などの挙動から後座屈現象としてよく知られている．

後座屈挙動に関する研究は数多くなされてきたが，大部分が一軸圧縮を受ける板についてであり，部分縁荷重が作用した場合の挙動を扱った論文は見当たらないようである．腹板がこの種の荷重を受ける機会が多くなっている現状から，部分縁荷重を受ける板の非線形挙動を検討することが必要と思える．この論文は従来の研究では問題となっていた板面内の応力分布を定式化し，さらに，座屈，後座屈と初期たわみを有する場合の非線形挙動を一括した方程式による解として提案している．

基礎支配微分方程式は Marguerre²⁾ によって提案された微小な初期たわみを有する板の大たわみ微分方程式を用いている．座屈解析はこの方程式の定式化の手順の中に含まれる一群の連立方程式の最小固有値問題として扱われている．

部分縁荷重を受ける板の挙動に関する研究は耐荷力および座屈問題に限定されているように思われる．座屈については板の曲げ座屈つり合い方程式を差分法で解いた White³⁾ らの研究，板面内外変位について有限要素法で解いた Rockey⁴⁾ らの研究，有限帯板法を用いた Smith⁵⁾ らの研究があるが，これらは板面内応力分布を数値的に求める手法である．また，Khan⁶⁾ らの一連の研究はたわみ形状関数を2重3角級数で，そして面内応力を多項式で仮定し座屈エネルギー式を Ritz 法で解いて

いる．

次に，初期たわみを有する板の挙動に関する解析的手法による研究は数多くなされてきたが，大部分が一様圧縮，偏心圧縮の荷重条件をもつ板を対象とし，その代表的な研究を示すと次となる．Coan⁷⁾ は一様圧縮を受ける単純支持板を解析し，Yamaki¹⁰⁾ は単純-固定板に拡張している．また，Rhodes ら¹¹⁾ はたわみ形状関数に多項式などを用いて，偏心圧縮板，回転拘束をもつ板を扱った．これらの研究は比較的単純な初期膜応力分布をもつ場合で，複雑な初期膜応力分布をもつ場合には検討がなされていない．

2. 解析式の誘導

(1) 基礎微分方程式と対象板

微小な初期たわみを有する薄板の大たわみ基礎支配方程式は Marguerre²⁾ によって示された．それは次の2組の微分方程式である．

$$L_f(w, F) = F_{,xxxx} + 2F_{,xxyy} + F_{,yyyy} - E\{w_{,xy}^2 - w_{,xx}w_{,yy}\} - (w_{0,xy}^2 - w_{0,xx}w_{0,yy}) = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$L_w(w, F) = w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy} - (w_{0,xxxx} + 2w_{0,xxyy} + w_{0,yyyy}) - \frac{h}{D}(F_{,yy}w_{,xx} + F_{,xx}w_{,yy} - 2F_{,xy}w_{,xy}) = 0 \dots\dots\dots(2)$$

ここに， $x-y$ 平面を板縁の板中立面を通る平面とし， w は $x-y$ 平面からの板中立面の総たわみ， w_0 は $x-y$ 平面からの板中立面の初期たわみ， h は板厚， D は板の曲げ剛性で， $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ である． E はヤング率， ν はポアソン比．また記号 $F_{,xxxx}$ などは微分形で

* 正会員 工修 阿南工業高等専門学校助教授 土木工学科

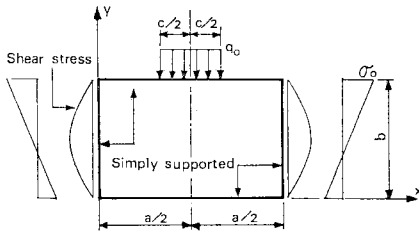


図-1 荷重条件と寸法

$\partial^4 F / \partial x^2 \partial y^2$ である。F は応力関数で、板中立面の膜応力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ とには次式の関係がある。

$$\sigma_x = F_{,yy}, \sigma_y = F_{,xx}, \tau_{xy} = -F_{,xy} \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 σ_x, σ_y は x, y 方向の直応力、 τ_{xy} はせん断応力。

解析の対象とした板を図-1に示す。板縁の支持条件を単純支持とし、 $x=a/2$ に関して対称な部分縁荷重 q_0 が $y=b$ 縁に、 $x=0, a$ 縁には q_0 と釣り合うせん断力と、さらに、曲げ荷重が作用している。なお、曲げ荷重は図では、 $w=0$ の初期状態における分布を示した。

また、 w, w_0 は $x=a/2$ に関し対称形をもつと仮定する。また、板中央面の x 方向変位 u は $x=a/2$ において 0 と仮定する。

境界条件を次に示す。

$$\left. \begin{aligned} x=0, a \text{ で} \\ w=0, w_{,xx}=0 \\ w_0=0, w_{0,xx}=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} y=0, b \text{ で} \\ w=0, w_{,yy}=0 \\ w_0=0, w_{0,yy}=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} y=0 \text{ で} \\ \sigma_y=0, \tau_{xy}=0 \\ y=b \text{ で} \\ \sigma_y=-q_0(x), \tau_{xy}=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} x=0 \text{ で} \\ \int_0^b \tau_{xy} dy = -\frac{1}{2} q_0 C \\ \int_0^b \sigma_x dy = -\frac{1}{2} (1+\phi) \sigma_0 b \\ x=a \text{ で} \\ \int_0^b \tau_{xy} dy = \frac{1}{2} q_0 c \\ \int_0^b \sigma_x dy = -\frac{1}{2} (1+\phi) \sigma_0 b \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $q_0(x)$ は部分縁荷重をフーリエ級数により表現した式、 ϕ は曲げ圧縮荷重の形状を指示する係数で、1 のとき一様圧縮、-1 のとき純曲げとなる。

式 (4), (5), (6) 以外に $x=0, a$ の板縁での x 方向変

位の境界条件があるが、定式化の手順の中で説明する。

(2) 荷重による初期膜応力分布

式 (1) の解 F を次式でおく

$$F = F_0 + F_1$$

$$F_0 = F_{01} + F_{02}$$

ここに、 F_0, F_1 はそれぞれ式 (1) の同次解と特解で、 F_{01} は部分縁荷重に対する、また、 F_{02} は曲げ圧縮荷重に対する応力関数である。式 (1) の同次方程式は F_0 を用いて、

$$F_{0,xxxx} + 2F_{0,xxyy} + F_{0,yyyy} = 0 \dots\dots\dots (7)$$

式 (7) の一般解は次式で与えることができる。

$$F_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_1 \cosh \frac{k\pi y}{a} + C_2 \sinh \frac{k\pi y}{a} \right. \\ \left. + C_3 \frac{k\pi y}{a} \cosh \frac{k\pi y}{a} \right. \\ \left. + C_4 \frac{k\pi y}{a} \sinh \frac{k\pi y}{a} \right) \sin \frac{k\pi x}{a} \\ (k=1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots (8)$$

q_0 による膜応力を $\sigma_{x01}, \sigma_{y01}, \tau_{xy01}$ とする。 q_0 をフーリエ級数展開すると次式となる。

$$\left. \begin{aligned} q_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 4 q_0 d_k \sin \frac{k\pi x}{a} \\ d_k = \sin \frac{k\pi}{2} \sin \frac{k\pi c}{2a} / k\pi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 $k=1, 3, 5, \dots$

図-2 に式 (9) による分布の一例を示す。

積分定数 C_1 から C_4 は式 (5) の境界条件から求める。すなわち、 $y=0$ で $\sigma_{y01}=0, \tau_{xy01}=0$ 、および、 $y=b$ で、 $\sigma_{y01}=-q_0(x), \tau_{xy01}=0$ より決定され式 (3) の関係から各応力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x01} = 4 q_0 \sum_{k=1}^{\infty} d_k S_{1k} \\ \sigma_{y01} = -4 q_0 \sum_{k=1}^{\infty} d_k S_{2k} \\ \tau_{xy01} = -4 q_0 \sum_{k=1}^{\infty} d_k S_{3k} \end{aligned} \right\} (k=1, 3, 5, \dots) \dots\dots\dots (10)$$

$$S_{1k} = \left\{ -A_{1k} \left(\sinh \frac{k\pi y}{a} + \frac{k\pi y}{a} \cosh \frac{k\pi y}{a} \right) \right. \\ \left. + B_{1k} \left(2 \cosh \frac{k\pi y}{a} + \frac{k\pi y}{a} \sinh \frac{k\pi y}{a} \right) \right\} \sin \frac{k\pi x}{a}$$

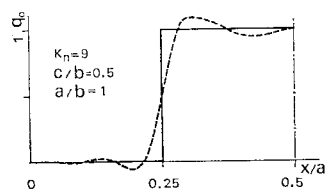


図-2 フーリエ近似による荷重分布の一例

$$\left. \begin{aligned} S_{2k} &= \left\{ A_{1k} \left(\sinh \frac{k\pi y}{a} - \frac{k\pi y}{a} \cosh \frac{k\pi y}{a} \right) \right. \\ &\quad \left. + B_{1k} \frac{k\pi y}{a} \sinh \frac{k\pi y}{a} \right\} \sin \frac{k\pi x}{a} \\ S_{3k} &= \left\{ -A_{1k} \frac{k\pi y}{a} \sinh \frac{k\pi y}{a} \right. \\ &\quad \left. + B_{1k} \left(\sinh \frac{k\pi y}{a} + \frac{k\pi y}{a} \cosh \frac{k\pi y}{a} \right) \right\} \cos \frac{k\pi x}{a} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

式 (11) において A_{1k}, B_{1k} は,

$$\begin{aligned} A_{1k} &= \left(\sinh \frac{k\pi}{\beta} + \frac{k\pi}{\beta} \cosh \frac{k\pi}{\beta} \right) / \\ &\quad \cdot \left\{ \sinh^2 \frac{k\pi}{\beta} - \left(\frac{k\pi}{\beta} \right)^2 \right\} \\ B_{1k} &= \frac{k\pi}{\beta} \sinh \frac{k\pi}{\beta} / \left\{ \sinh^2 \frac{k\pi}{\beta} - \left(\frac{k\pi}{\beta} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

ここに, $\beta = a/b$.

$x=0, a$ 縁における面内曲げ圧縮荷重による式 (7) の同次解 F_{02} より求まる膜応力 $\sigma_{x02}, \sigma_{y02}, \tau_{xy02}$ は次式となる³⁾.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x02} &= -\sigma_0 \left\{ (1-\phi) \frac{y}{b} + \phi \right\} \\ \sigma_{y02} &= 0, \tau_{xy02} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

(3) たわみの仮定と面外変位による応力

式 (4) の境界条件をもつたわみ, および, 初期たわみの形状関数を次の 2 重 3 角級数で仮定した.

$$\left. \begin{aligned} w &= h \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ w_0 &= h \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{0mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

$(m=1, 3, 5, \dots), (n=1, 2, 3, \dots)$

ここに, w_{mn} はたわみ係数で未知定数, w_{0mn} は初期たわみ係数.

式 (13) を式 (1) に代入することにより F の特解 F_1 が求まる.

$$\begin{aligned} F_1 &= Eh^2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (b_{pq} - b_{0pq}) \cos \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} \\ &\quad (p=0, 2, 4, \dots), (q=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \dots\dots\dots(14)$$

ここに,

$$\begin{aligned} b_{pq} &= - \frac{e_1}{8 \left(\frac{p^2}{\beta^2} + q^2 \beta \right)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \{ (mq-np)^2 \\ &\quad \times (w_{m+p, n+q} + w_{m-p, n-q} - w_{m-p, q-n} \\ &\quad - w_{p-m, n-q} + w_{p-m, q-n}) \\ &\quad + (mq+n p)^2 (w_{m+p, n-q} + w_{m-p, n+q} \\ &\quad - w_{m+p, q-n} - w_{p-m, n+q}) \} \dots\dots\dots(15 \cdot a) \end{aligned}$$

b_{0pq} は式 (15) の右辺のたわみ係数 w_{ij} の代わりに w_0 の初期たわみ係数に置き換えた式である. 式 (15・a) は行列の形で表現でき

$$\begin{aligned} [b_{pq}] &= [BPQ] \{w\} \dots\dots\dots(15 \cdot b) \\ &\quad (p=0, 2, 4, \dots, q=0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

ここに, $\{w\}$ はたわみ係数の 2 次の項のベクトルで,

$$\{w\} = (w_{11}w_{11}, w_{11}w_{12}, \dots, w_{12}w_{12}, w_{12}w_{13}, \dots)^T$$

[BPQ] の係数について, いま m, n の仮定した最大の数を \bar{m}, \bar{n} とすると, p, q の最大数は $2\bar{m}, 2\bar{n}$ となる. また, 式 (15・a) の右辺の添字 $m+p, m-p, p-m$ を代表して m' とし, $n+q, n-q, q-n$ を n' とすると, m', n' は次式が成立するときに [BPQ] 行列への組込みが行われる.

$$1 \leq m' \leq \bar{m}, 1 \leq n' \leq \bar{n}$$

また, e_1 は p または q のどちらか一方が 0 のときは $1/2$, それ以外は 1 である. また, b_{00} の項は存在しない. b_{0pq} の項についても同じ約束で作成する.

さて, F_1 による膜応力を $\sigma_{x11}, \sigma_{y11}, \tau_{xy11}$ とすると, 式 (3), (14) より,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x11} &= -Eh^2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{q\pi}{b} \right)^2 (b_{pq} - b_{0pq}) \\ &\quad \cdot \cos \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} \\ \sigma_{y11} &= -Eh^2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{p\pi}{a} \right)^2 (b_{pq} - b_{0pq}) \\ &\quad \cdot \cos \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} \\ \tau_{xy11} &= -Eh^2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{pq\pi^2}{ab} (b_{pq} - b_{0pq}) \\ &\quad \cdot \sin \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

$(p=0, 2, 4, \dots), (q=0, 1, 2, \dots)$

さて, 式 (16) から明らかに $y=0, b$ 縁で y 方向応力 σ_{y11} は 0 でなく, 式 (5) の境界条件が乱される. そこで, 式 (5) を満足させるため F_0, F_1 以外に第 3 番目の応力関数を付加する. したがって, 応力関数 F は

$$F = F_0 + F_1 + F_2$$

で与えられる. F_2 は式 (8) の形をもつ式 (1) の同次解で定義され

$$\begin{aligned} F_2 &= \sum_{p=2}^{\infty} \left(D_1 \cosh \frac{p\pi y}{a} + D_2 \sinh \frac{p\pi y}{a} \right. \\ &\quad + D_3 \frac{p\pi y}{a} \cosh \frac{p\pi y}{a} \\ &\quad \left. + D_4 \frac{p\pi y}{a} \sinh \frac{p\pi y}{a} \right) \cos \frac{p\pi x}{a} \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

$(p=2, 4, 6, \dots)$

いま, F_2 による膜応力を $\sigma_{x12}, \sigma_{y12}, \tau_{xy12}$ とすると, 式 (5) は次式と同等である.

$y=0$ で

$$\sigma_{y01} + \sigma_{y11} + \sigma_{y12} = 0, \tau_{xy01} + \tau_{xy11} + \tau_{xy12} = 0$$

$y=b$ で

$$\sigma_{y01} + \sigma_{y11} + \sigma_{y12} = -q_0(x),$$

$$\tau_{xy01} + \tau_{xy11} + \tau_{xy12} = 0$$

式 (10), (11), (16), (17) より, 積分定数 $D_1 \sim D_4$ を求め, さらに, $F_1 + F_2$ による応力を $\sigma_{x1}, \sigma_{y1}, \tau_{xy1}$ とするとこれらは式 (3) の関係から次式となる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x1} &= \frac{Eh^2\pi^2}{a^2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (b_{pq} - b_{0pq}) T_{1pq} \\ \sigma_{y1} &= -\frac{Eh^2\pi^2}{a^2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (b_{pq} - b_{0pq}) T_{2pq} \\ \tau_{xy1} &= \frac{Eh^2\pi^2}{a^2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (b_{pq} - b_{0pq}) T_{3pq} \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

($p=0, 2, 4, \dots$), ($q=0, 1, 2, \dots$)

ここに,

$$\left. \begin{aligned} T_{1pq} &= p^2 \left\{ -\cosh \frac{p\pi y}{a} + B_{2p} \left(\sinh \frac{p\pi y}{a} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{p\pi y}{a} \cosh \frac{p\pi y}{a} \right) + C_{2p} \left(2 \cosh \frac{p\pi y}{a} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{p\pi y}{a} \sinh \frac{p\pi y}{a} \right) \right\} \cos \frac{p\pi x}{a} \\ &\quad - (q\beta)^2 \cos \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} \\ T_{2pq} &= p^2 \left\{ -\cosh \frac{p\pi y}{a} + B_{2p} \left(\frac{p\pi y}{a} \cosh \frac{p\pi y}{a} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sinh \frac{p\pi y}{a} \right) + C_{2p} \frac{p\pi y}{a} \sinh \frac{p\pi y}{a} \right\} \cos \frac{p\pi x}{a} \\ &\quad + p^2 \cos \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} \\ T_{3pq} &= p^2 \left\{ -\sinh \frac{p\pi y}{a} + B_{2p} \frac{p\pi y}{a} \sinh \frac{p\pi y}{a} \right. \\ &\quad \left. + C_{2p} \left(\sinh \frac{p\pi y}{a} + \frac{p\pi y}{a} \cosh \frac{p\pi y}{a} \right) \right\} \sin \frac{p\pi x}{a} \\ &\quad - pq\beta \sin \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

ここに,

$$\begin{aligned} B_{2p} &= \left(1 - \cosh \frac{p\pi}{\beta} \cos q\pi \right) / \\ &\quad \cdot \left(\frac{p\pi}{\beta} + \sinh \frac{p\pi}{\beta} \cos q\pi \right) \\ C_{2p} &= \sinh \frac{p\pi}{\beta} \cos q\pi / \left(\frac{p\pi}{\beta} + \sinh \frac{p\pi}{\beta} \cos q\pi \right) \end{aligned}$$

以上のように膜応力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ は式 (10), (12), (18) の各項を加算した式である.

さて, 式 (17) において, $p=0$ の項は無視したが, このときの b_{0q} と b_{00q} は $x=0, a$ の板縁に変位の条件を付加することになる. いま, $x=0, a$ における x 方向膜変位 u_0, u_a は F, w と w_0 の項で示せるが⁹⁾, 式 (10), (11), (12), (13), (15), (18), (19) より定式化すると,

$$\begin{aligned} u_a = -u_0 &= \frac{1}{2} \int_0^a \left\{ \frac{1}{E} (F_{,yy} - \nu F_{,xx}) - \frac{1}{2} w_{,x^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} w_{0,x^2} \right\} dx = \frac{4q_0}{E} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{\sinh \frac{k\pi}{\beta} - \left(\frac{k\pi}{\beta} \right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cdot \left\{ -(1-\nu) \left(\sinh \frac{k\pi}{\beta} + \frac{k\pi}{\beta} \cosh \frac{k\pi}{\beta} \right) \sinh \frac{k\pi y}{a} \right. \\ &\quad - (1+\nu) \left(\sinh \frac{k\pi}{\beta} + \frac{k\pi}{\beta} \cosh \frac{k\pi}{\beta} \right) \times \cosh \frac{k\pi y}{\beta} \\ &\quad + (1+\nu) \frac{k\pi}{\beta} \frac{k\pi y}{a} \sinh \frac{k\pi}{\beta} \sinh \frac{k\pi y}{a} \\ &\quad \left. + 2 \frac{k\pi}{\beta} \sinh \frac{k\pi}{\beta} \cosh \frac{k\pi y}{a} \right\} \frac{a}{k\pi} \\ &\quad - \frac{\sigma_0}{2E} \left\{ (1-\phi) \frac{y}{b} + \phi \right\} a \\ &\quad - \frac{h^2\pi^2}{16a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 (w_{mn}^2 - w_{0mn}^2) \dots (20) \end{aligned}$$

($k, m=1, 3, 5, \dots$), ($n=1, 2, 3, \dots$)

式 (20) の右辺で q_0, σ_0 を含む項は初期荷重形で規定され, q_0, σ_0 の変化に応じて比例して u_a, u_0 は変化する. また, w_{mn} と w_{0mn} を含む項は y の関数とならず, 有限変位により一定の縁変位が付加されることを示し, この条件が板縁の変位境界条件となる.

(4) たわみ係数の算定式

w_{mn} の算定のために, 従来¹⁰⁾ に準拠して, Galerkin 法を用いる. すなわち, $r=1, 3, 5, \dots, s=1, 2, 3, \dots$ の各値に対して次式が成立する.

$$\int_0^a \int_0^b L_w(w, F) \sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b} dx dy = 0 \dots (21)$$

式 (10), (11), (13), (12), (18), (19) を式 (2) に代入し式 (21) の積分を行うと, 相当に複雑な過程ののち, 次式の方程式群の形で整理できる.

$$\begin{aligned} &(r^2 + \beta^2 s^2)^2 (w_{rs} - w_{0rs}) \\ &+ Q_1 \frac{2\beta^3}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} d_k \phi w_{mn} \\ &- K_s \beta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma - 3\beta (1-\nu^2) \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \\ &\quad \cdot (b_{pq} - b_{0pq}) \Omega w_{mn} = 0 \dots (22) \end{aligned}$$

($k, m=1, 3, 5, \dots$), ($n=1, 2, 3, \dots$),
($p=0, 2, 4, \dots$), ($q=0, 1, 2, \dots$)

ここに,

$$(Q_1, K_s) = \frac{hb^2}{D\pi^2} (q_0, \sigma_0) \dots (23)$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{r^2}{\pi^2} (1-\phi) w_{rn} \left\{ \frac{1}{(n-s)^2} - \frac{1}{(n+s)^2} \right\} \\ &\quad \cdot \{ \cos(n-s)\pi - 1 \} f_{ns} + \frac{1}{2} r^2 (1+\phi) w_{rs} \end{aligned} \dots (24)$$

式 (24) の f_{ns} は $n=s$ のとき $0, n \neq s$ のとき 1 式 (22) の ϕ, Ω は次式で定義される.

$$\begin{aligned} \phi &= m^2 \{ -A_{1k}(K_1 + K_2) + B_{1k}(2K_3 + K_4) \} P_1' \\ &\quad - n^2 \beta^2 \{ A_{1k}(K_1 - K_2) + B_{1k}K_4 \} P_1' \\ &\quad + 2mn\beta \{ -A_{1k}K_5 + B_{1k}(K_6 + K_7) \} P_2' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dots\dots\dots(25) \\ \Omega = & \frac{2}{\pi} p^2 [n^2 \beta^2 \{-K_8 + B_{2p}(K_{10} - K_9) + C_{2p}K_{11}\} P_3' \\ & - m^2 \{-K_8 + B_{2p}(K_9 + K_{10}) + C_{2p}(2K_8 + K_{11})\} P_3' \\ & + 2mn\beta \{-K_{12} + B_{2p}K_{13} + C_{2p}(K_{12} + K_{14})\} P_5'] \\ & + \beta \{n^2 p^2 P_3' P_4' + m^2 q^2 P_3' P_4' - 2mn pq P_5' P_6'\} \\ & \dots\dots\dots(26) \end{aligned}$$

ここに、 $K_1 \sim K_{14}$ は k, p などの指数関数を含む式でプログラム上の単純化のため、次の E_1, G_1 などの関数を用いて表現する。

$$\begin{aligned} 2K_1 = & G_3(k, n-s) - G_4(k, n-s) \\ & - G_3(k, n+s) + G_4(k, n+s) \\ 2K_2 = & E_3(k, n-s) + E_4(k, n-s) \\ & - E_3(k, n+s) - E_4(k, n+s) \\ 2K_3 = & G_3(k, n-s) + G_4(k, n-s) \\ & - G_3(k, n+s) - G_4(k, n+s) \\ 2K_4 = & E_3(k, n-s) - E_4(k, n-s) \\ & - E_3(k, n+s) + E_4(k, n+s) \\ 2K_5 = & E_1(k, s-n) - E_2(k, s-n) \\ & + E_1(k, n+s) - E_2(k, n+s) \\ 2K_6 = & G_1(k, s-n) - G_2(k, s-n) \\ & + G_1(k, s+n) - G_2(k, n+s) \\ 2K_7 = & E_1(k, n-s) + E_2(k, s-n) \\ & + E_1(k, n+s) + E_2(k, n+s) \\ 2K_8 = & G_3(p, n-s) + G_4(p, n-s) \\ & - G_3(p, n+s) - G_4(p, n+s) \\ 2K_9 = & G_3(p, n-s) - G_4(p, n-s) \\ & - G_3(p, n+s) + G_4(p, n+s) \\ 2K_{10} = & E_3(p, n-s) + E_4(p, n-s) \\ & - E_3(p, n+s) - E_4(p, n+s) \\ 2K_{11} = & E_3(p, n-s) - E_4(p, n-s) \\ & - E_3(p, n+s) + E_4(p, n+s) \\ 2K_{12} = & G_1(p, s-n) - G_2(p, s-n) \\ & + G_1(p, n+s) - G_2(p, n+s) \\ 2K_{13} = & E_1(p, s-n) - E_2(p, s-n) \\ & + E_1(p, n+s) - E_2(p, n+s) \\ 2K_{14} = & E_1(p, s-n) + E_2(p, s-n) \\ & + E_1(p, n+s) + E_2(p, n+s) \end{aligned} \dots\dots(27)$$

いま、 $E_1, G_1 \dots$ の中の引数 k, p を仮引数 k で、 $n-s, n+s, s-n$ を仮引数 φ で表わすと、 $E_1, G_1 \dots$ は次式となる。

$$\begin{aligned} E_1(k, \varphi) = & -\frac{1}{t_1} \varphi k \pi e^{k\pi/\beta} \cos \varphi \pi \\ & + \frac{1}{t_2} 2k^2 \varphi \beta (e^{k\pi/\beta} \cos \varphi \pi - 1) \\ E_2(k, \varphi) = & -\frac{1}{t_1} \varphi k \pi e^{-k\pi/\beta} \cos \varphi \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{t_2} 2k^2 \varphi \beta (e^{-k\pi/\beta} \cos \varphi \pi - 1) \\ E_3(k, \varphi) = & \frac{1}{t_1} \frac{k^2 \pi}{\beta} e^{k\pi/\beta} \cos \varphi \pi \\ & - \frac{1}{t_2} k(k^2 - \beta^2 \varphi^2) (e^{k\pi/\beta} \cos \varphi \pi - 1) \\ E_4(k, \varphi) = & -\frac{1}{t_1} \frac{k^2 \pi}{\beta} e^{-k\pi/\beta} \cos \varphi \pi \\ & - \frac{1}{t_2} k(k^2 - \beta^2 \varphi^2) (e^{-k\pi/\beta} \cos \varphi \pi - 1) \\ G_1(k, \varphi) = & -\frac{1}{t_1} \varphi \beta (e^{k\pi/\beta} \cos \varphi \pi - 1) \\ G_2(k, \varphi) = & -\frac{1}{t_1} \varphi \beta (e^{-k\pi/\beta} \cos \varphi \pi - 1) \\ G_3(k, \varphi) = & \frac{1}{t_1} k (e^{k\pi/\beta} \cos \varphi \pi - 1) \\ G_4(k, \varphi) = & -\frac{1}{t_1} k (e^{-k\pi/\beta} \cos \varphi \pi - 1) \\ & \dots\dots\dots(28) \end{aligned}$$

ただし、 $t_1 = k^2 + (\varphi\beta)^2, t_2 = t_1^2$

$$\begin{aligned} P_1' = & H(r+k-m) + H(r-k+m) \\ & - H(r-k-m) - H(r+k+m) \\ P_2' = & H(r+k-m) + H(r-k+m) \\ & + H(r-k-m) + H(r+k+m) \end{aligned} \dots\dots(29)$$

ここに、 $x \neq 0$ で、 $H(x) = (1 - \cos \pi x)/x$
 $x = 0$ で、 $H(x) = 0$

$$\begin{aligned} P_3' = & \zeta(p-m+r) + \zeta(p+m-r) - \zeta(p-m-r) \\ P_4' = & \zeta(q-n+s) + \zeta(q+n-s) - \zeta(q-n-s) \\ P_5' = & \zeta(p+m-r) + \zeta(p-m-r) - \zeta(p-m+r) \\ P_6' = & \zeta(q+n-s) + \zeta(q-n-s) - \zeta(q-n+s) \\ & \dots\dots\dots(30) \end{aligned}$$

ここに、 $\zeta(x)$ は $x=0$ のとき 1, $x \neq 0$ のとき 0.

以上のように、 Φ, Ω は p, q, m, n, r, s, k を含むきわめて複雑な関数であるが、式 (27), (28), (29), (30) の形で分割し各式を副プログラムで定義すると、比較的容易に数値化できる。

いま、式 (13) の w_{mn}, w_{0mn} の採用項数を N とする。たとえば $w_{11}, w_{12}, w_{31}, w_{32}$ を用いると $N=4$ である。

式 (22) は一般に次式の行列形で表現できる。

$$\begin{aligned} [C] \{w\} + [F_0] + Q_1 [B_1] \{w\} + K_s [B_2] \{w\} \\ + [D_1] \{w\} + [D_2] \{w w w\} = \{0\} \\ \dots\dots\dots(31) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} \{w\} = & (w_{11}, w_{12}, w_{31}, w_{32})^T \\ \{w w w\} = & (w_{11} w_{11} w_{11}, w_{11} w_{11} w_{12}, \dots, \\ & w_{32} w_{32} w_{32})^T \end{aligned}$$

などである。式 (31) において $[C], [B_1], [B_2], [D_1]$ はそれぞれ $N \times N$ の正方行列で式 (22) に対応して、

第1項の w_{rs} の係数行列, Q_1, K_s および b_{0pq} に関する項より求まる係数行列である. また, 列ベクトル $\{F0\}$ は式 (22) の第1項の w_{ors} に関する式から求まる. $[D_2]$ は式 (22) の b_{pq} を含む項から求まる係数行列で式 (15), (26) を用いて数値化できる. たとえば $N=4$ のとき $[D_2]$ は 4×20 の行列となる.

(5) 膜応力と膜ひずみ

膜応力は式 (10), (12), (18) を加えた式であるが, ここでは無次元化して示す.

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = \frac{Eh^2\pi^2}{b^2} (\sigma'_x, \sigma'_y, \tau'_{xy}) \dots (32)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x &= Q_1 \frac{1}{3(1-\nu^2)} \sum_{k=1}^{\infty} d_k S_{1k} \\ &+ \frac{1}{\beta^2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (b_{pq} - b_{0pq}) T_{1pq} \\ &- K_s \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left\{ (1-\phi) \frac{y}{b} + \phi \right\} \\ \sigma'_y &= -Q_1 \frac{1}{3(1-\nu^2)} \sum_{k=1}^{\infty} d_k S_{2k} \\ &- \frac{1}{\beta^2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (b_{pq} - b_{0pq}) T_{2pq} \\ \tau'_{xy} &= -Q_1 \frac{1}{3(1-\nu^2)} \sum_{k=1}^{\infty} d_k S_{3k} \\ &+ \frac{1}{\beta^2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (b_{pq} - b_{0pq}) T_{3pq} \end{aligned} \right\} \dots (33)$$

$$(k=1, 3, \dots), (p=0, 2, \dots), (q=0, 1, 2, \dots)$$

ここに, $\sigma'_x, \sigma'_y, \tau'_{xy}$ は無次元化した応力で, 評価はこの応力によって行う.

3. 解析結果

(1) 座屈係数と精度

座屈解析は式 (31) で, 行列 $[C], [B_1]$ 以外はすべて消去することにより, Q_1 の固有値問題として処理できる.

Q_1 の最小固有値は座屈係数となり, これを Q_{1cr} とする. また, Q_{1cr} は Power Method など以求まる.

また, 座屈荷重を q_{ocr} とすると Q_{1cr} との関係は, 式 (23) より,

$$q_{ocr} = Q_{1cr} D \pi^2 / hb^2$$

Q_{1cr} の精度は式 (9) のフーリエ級数の項数と式 (13) の w_{mn} の項数に依存する. 表-1 はこれを比較したものである. 表中の K_n は式 (9) の k の最大項数, たとえば, $K_n=9$ のときは, $k=1, 3, 5, \dots, 17$ と変化する. また, w_n は w_{mn} の最大項数で, $w_n=4$ のとき, $w_{11}, w_{12}, w_{31}, w_{32}$ を, $w_n=8$ では, $w_{11}, w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{31}, w_{32}, w_{33}, w_{34}$ を採用した. 表-1 の左側と右側

の Q_{1cr} は, それぞれ $\beta=1, c/b=1$ と $\beta=3, c/b=1$ の場合の値である.

表-1 より K_n が 9 と 15 に対して, Q_{1cr} の差は微小であり, 9 の値を

用いても十分な精度を得ることができる. また, w_n については 6 以上では変化が微小である.

座屈前における部分縁荷重による応力分布は式 (10), (11) から求まるが, この式を無次元化し Q_1 との関係で示した式が式 (33) の $\sigma'_x, \sigma'_y, \tau'_{xy}$ の右辺第1項である. σ'_x, σ'_y の右辺第1項を S'_{x0}, S'_{y0} とする.

$\beta=1, c/b=0.5$ で $Q_1=7.807$ での S'_{x0}, S'_{y0} 分布を図-3 に, $\beta=1, c/b=1$ で $Q_1=6.077$ での S'_{x0}, S'_{y0} 分布を図-4 に示す. また, $K_n=15$ とした.

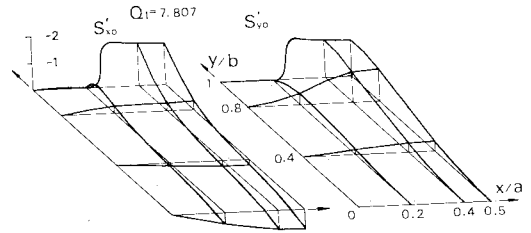


図-3 初期膜応力分布 (その 1, $a/b=1, c/b=0.5$)

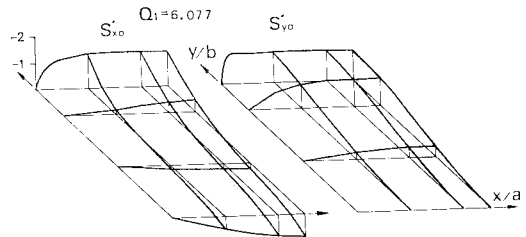


図-4 初期膜応力分布 (その 2, $a/b=1, c/b=1$)

表-2 Q_{1cr} の比較

a/b	c/b	Author			
		$W_n=8$	$K_n=15$	Khan ⁷⁾	F.E.M. ⁹⁾
1	0.25	$W_n=8$	13.600	13.68	14.0
	0.5	$K_n=15$	7.802	7.80	7.8
	0.75		6.366	6.20	6.1
	1.0		6.077	5.57	5.6
2	0.25	$W_n=8$	9.792	9.64	10.0
	0.5	$K_n=15$	5.203	5.18	5.2
	0.75		3.789	3.79	3.9
	1.0		3.152	3.15	3.2
3	0.25	$W_n=9$	9.217	10.88	
	0.5	$K_n=15$	4.891	4.86	
	0.75		3.553	3.55	
	1.0		2.941	2.95	

次に、 β , c/b の数種の値について比較したのが表-2である。 $\beta=3$ では $w_n=9$, $K_n=15$ とし、 w_{31} , w_{32} , w_{33} の項も含めたが、 $\beta=1$ と $\beta=2$ では $w_n=8$, $K_n=15$ を採用した。表-2 には、Khan⁹⁾ の値と有限要素法⁸⁾の結果も併記したが、数項を除いて十分な精度が保障できた。Khan は Alfutov²⁾ の理論に基づいているが、この理論によると座屈点付近の幾何学的、力学的条件から座屈エネルギー式を変換することによって面内応力分布は応力のつり合い条件のみを満たす形で仮定できる。しかし、基礎式は座屈エネルギー式であり、応力分布が既知のときの理論といえる。したがって、応力分布が複雑に変化する後座屈域への適用は困難と思える。

表-2 の有限要素法の結果は長方形要素で分割数を144としたときの値である。1節点の自由度は5である。図-5 に $Q_{1cr}-\beta$ 関係を示す。図中の各 c/b 値とも、 $\beta < 2.5$ では $w_n=8$, $K_n=15$ とし、 $\beta \geq 2.5$ では、 $w_n=9$, $K_n=15$ とした。また、図-5 の各曲線は、 β の大きさを0.125として求めた各値を曲線で結んだものである。

(2) 後座屈と精度

ここでは、式(31)の行列 $[D_2]$ に問題があるか、どうかを検討することを強調して、従来の結果との比較のため、一様圧縮を受ける自由非載荷縁をもつ正方形板の荷重-最大たわみ曲線を求めた。式(31)の数値計算は増分法とNewton法を併用して行った。最大たわみを w' とすると、 w' は板中央に生じた。図-6の曲線A1が本法の結果で、実線が $w_{011}=0.1$ 、すなわち、板厚の0.1倍の x, y 方向とも1半波長の初期たわみの結果である。

また、破線が初期たわみのない完全板の場合である。解析には w_{11} , w_{13} , w_{31} , w_{33} を用いた。

ν は Coan⁹⁾ と同じく0.316を用いた。Coan は A1 に相当する曲線を求めているが、理論解析の段階で式

(17) に対してフーリエ級数に変換している点と、 w_{33} の項は省略して計算している点、本法との多少の差が予想される。たわみの結果を比較すると、 $w_{011}=0.1h$ で、 K_s が8と14に対して本法では、2.1958と3.5269であり、Coanの値は2.16と3.36であった。

図-6では、B1の条件($\psi=0$)をもつ正方形板の結果も示した。 w_{11} , w_{12} , w_{31} , w_{32} と $w_{011}=0.1$ を用いて解析した。また、図には Walker の実験値の一部を示した。

(3) 部分縁荷重による非線形挙動

さて、解析の対象とする条件を表-3, 4に示す。まず、表-3に示す4種類のタイプの板について、各タイプとも初期たわみは表-4の4種類のモードについて解析した。また、 $w_n=6$, $K_n=11$ と仮定した。

座屈係数の3倍程度までは、詳細を省略したが、 w_{34} , w_{51} , w_{52} などの高次項は w_{11} に比較して微小で座屈波形への影響は少ない。したがって、座屈係数値も精度を保障する項として w_{11} , w_{12} , w_{13} , w_{31} , w_{32} , w_{33} を使用した。 β を1と2とした理由は腹板のスティフナー間隔を想定して決定した。また、 K_n を含む行列が座屈解析の場合と同一であるので、 $K_n=11$ はその精度が確認できる。

表-3にこの場合の Q_{1cr} と、図-7に示した各点の座屈時応力値を示した。 S_{x1cr} と S_{x3cr} は式(33)の σ_x' より求めたが、それぞれ点1と3の σ_x' に相当する。また、 τ_{xy}' はこの点で0であり、この2つの値は主応力値でもある。 S_{e2cr} は点2の相当応力で次式から求めた。

$$\sigma_e' = (\sigma_x'^2 - \sigma_x' \sigma_y' + \sigma_y'^2)^{1/2} \dots \dots \dots (34)$$

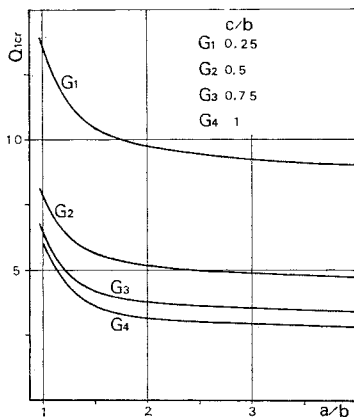


図-5 部分縁荷重を受ける場合の座屈曲線

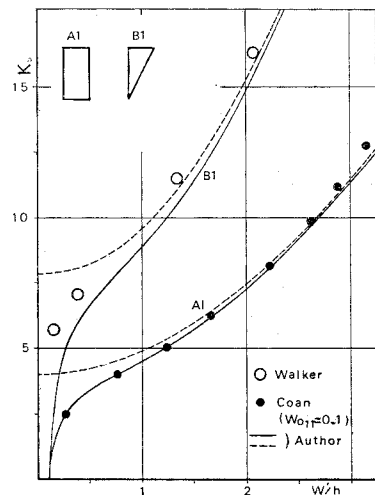


図-6 一様圧縮と曲げと圧縮を同時に受ける場合の荷重-最大たわみ関係

表-3 座屈時のタイプ別諸数値

	a/b	c/b	Q_{1cr}	S_{x1cr}	S_{y1cr}	S_{z1cr}
A	1	0.25	13.676	-1.394 3	0.990 8	0.021 5
B	1	1	6.088	-0.648 6	0.500 0	-0.071 4
C	2	0.25	9.798	-1.402 3	0.702 1	-0.126 1
D	2	1	3.152	-0.772 9	0.473 2	-0.224 4

表-4 初期たわみ形状

	W_0/h
Mode a	$0.2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$
Mode b	Buckling Mode
Mode c	$-0.2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}$
Mode d	$-0.1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}$

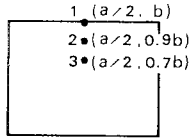


図-7 図-15, 16 および表-9 において対象とする点

表-5 板厚の0.2倍の最大たわみを与える座屈波形

	A	B	C	D
W_{011}	0.166 3	0.170 3	0.165 9	0.179 0
W_{012}	-0.058 8	-0.059 6	-0.028 6	-0.028 0
W_{013}	0.010 7	0.009 4	0.002 6	0.001 9
W_{031}	-0.005 1	-0.002 7	-0.025 3	-0.014 7
W_{032}	0.001 8	-0.001 2	0.005 9	0.000 6
W_{033}	-0.000 7	0.000 9	-0.001 0	0.000 5

次に、表-4の初期たわみ関数は各モードとも最大初期たわみ値を板厚の0.2倍をもつように統一している。モードaはx, y方向とも1半波形の対称形、モードbは表-5に示す係数をもつ座屈波形で図-8にその形状を示した。モードc, dは図-9の実線と破線で示すように、板中立面からの最大値がそれぞれ0.2h, 0.1hのy方向に2半波、x方向に1半波の正弦波形とした。また、モードdは全振幅が0.2hとなり、この場合全振幅をもって0.2hの初期たわみと解釈した。

表-5よりタイプA, Bの板は w_{11}, w_{12} が支配的であるが、これは座屈形状がx方向では1半波形、y方向では1半波形と2半波形の混在を意味する。タイプC, Dではやや混在の程度が弱い、x方向に3半波形の影響が出ている。

以下表-3と表-4の組合せでタイプA-aなどと記す。

図-10に $x=a/2$ における付加たわみと板厚の比 $(w-w_0)/h$ の形状の一例を示す。条件はタイプA-aである。比較的 Q_{1cr} に比べて小さい Q_1 に対して、座屈形状に近似したが、 Q_1 の増大により、その最大値が $y=b$ 側へ移行する傾向がある。いま、完全板について最大たわみの生ずる $x=a/2$ でのy方向の位置を内挿法で求めると次となった。

Q_{1cr} 付近の Q_1 についてタイプA-p, B-p, C-pとD-pの位置はそれぞれ、0.68b, 0.67b, 0.60b, 0.59bとなり座屈波形の最大位置と一致した。なお、A-pな

どの記号pは完全板を意味する。

$Q_1=2Q_{1cr}$ ではそれぞれ0.72b, 0.71b, 0.65b, 0.64bに移った。これよりc/bの比較では差がないが、 β が1と2では差が生じている。また、初期たわみをもつ場合は次となった。

タイプA-a, A-b, A-c, A-dの $Q_1=0.2Q_{1cr}$ での付加たわみの最大位置はそれぞれ、0.63b, 0.67b, 0.69b, 0.69bで初期たわみの最大位置、すなわちタイプA-a, A-b,

A-c, A-dのそれぞれに対して0.5b, 0.67b, 0.75b, 0.75bの値と座屈波形のそれの間の値を示した。また、このことは他のタイプにも当てはまった。 $Q_1=2Q_{1cr}$ では初期たわみ形の区別なく完全板の $Q_1=2Q_{1cr}$ の値と同一の値を得た。

図-11, 12に総たわみwのほぼ最大となる点の値を w' とし、 Q_1-w'/h 曲線を示した。

図-11は(0.5a, 0.7b)、図-12は(0.5a, 0.6b)の値である。図中A-p, B-p, C-pとD-pの記号で示した曲線は完全板のものである。

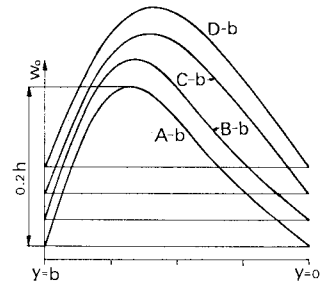


図-8 モードbの $x=a/2$ における形状

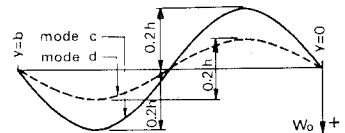


図-9 モードcとモードdの $x=a/2$ における形状

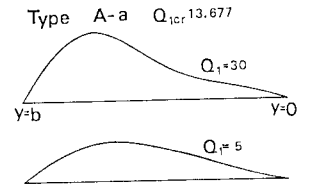


図-10 付加たわみの変化

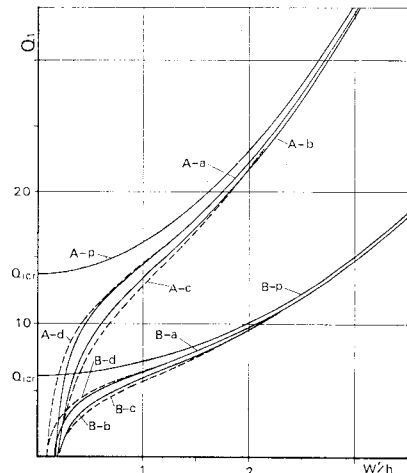


図-11 Q_1-w'/h 関係 (その1)

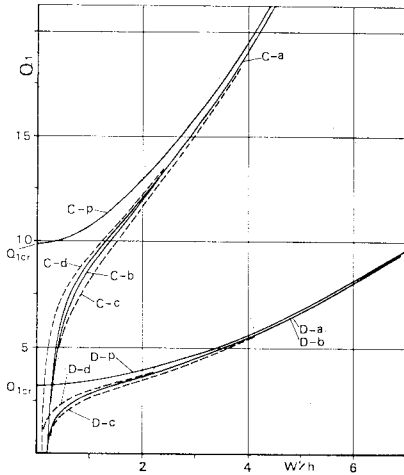


図-12 Q_1-w/h 関係 (その2)

各曲線とも 図-6 と類似した性状をもつことが示された。すなわち，初期たわみの影響は座屈点付近で顕著で，それ以上の Q_1 に対してはだいに不明瞭となり w/h は完全板の曲線に漸近する。また，初期たわみをもつ場合の曲線の反曲点は，座屈点付近にあり，たわみの最大の増加率は座屈点近くにあった。

次に，図-11, 12 から，以上のほかに得られた性状について説明する。完全板の曲線を除いて，モード a とモード b の曲線は Q_{1cr} 以下の Q_1 に対して，モード c と d の曲線の間に位置する。また， Q_1 が $1.5Q_{1cr}$ ないし $2Q_{1cr}$ 以上となると初期たわみ形の相違に関係なくほぼ同一の軌跡を描いた。また，タイプ A-d, B-d ではほぼ Q_{1cr} 以上の Q_1 について，タイプ A-a, B-a の曲線に一致した。タイプ C-d, D-d では $1.5Q_{1cr}$ 以上の Q_1 についてタイプ C-a, D-a に一致した。なお，タイプ D-a と D-b はほぼ同一の軌跡を描いた。

表-6, 7 に Q_1 とたわみ係数の関係を示す。表-6 はタイプ B-a, 表-7 はタイプ D-a の結果で， Q_{1cr} の3倍程度までの変化を示した。表-6, 7 とも各 Q_1 値に対して，係数 w_{11} が他の係数に比較して大きい。また， w_{11} 以外の係数の w_{11} に対する比は $\sin(\pi x/a)\sin(\pi y/b)$ に重ね合わされる他の形状の割合である。

$Q_1/Q_{1cr}=3$ 程度のこれらの比を調べると， $w_{12}, w_{13}, w_{31}, w_{32}, w_{33}$ とも $\beta=1$ の方が $\beta=2$ よりも大きい。

これは $\beta=2$ の方が $\beta=1$ より w_{11} の項を含む形状が支配的な形状でたわみが増加していることを意味する。

また，図-5 の座屈解析において， $\beta=4$ の波形を調べると w_{31}/w_{11} は 0.529 で， x 方向の3半波形成分がかなり全体の座屈波形に影響を与えているので後座屈域でも w_{31} などの3半波形成分の影響が出るものと予想される。しかし， $\beta=2$ 程度では，これらの成分のたわ

表-6 荷重とたわみ係数 (タイプ B-a)

Q_1	W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{31}	W_{32}	W_{33}
2.9	0.3027	-0.0302	0.0027	-0.0005	-0.0017	0.0004
6.1	0.8175	-0.2294	0.0409	-0.0055	-0.0095	0.0047
10.1	1.6745	-0.7307	0.2166	-0.0074	-0.0479	0.0305
15.7	2.2336	-1.3552	0.5412	-0.0411	-0.1204	0.0899
18.1	2.2965	-1.6206	0.6900	-0.0723	-0.1535	0.1193

表-7 荷重とたわみ係数 (タイプ D-a)

Q_1	W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{31}	W_{32}	W_{33}
1	0.2725	-0.0095	0.0002	-0.0038	-0.0010	0.0000
3	1.1217	-0.1472	0.0118	-0.0446	-0.0059	0.0005
5	3.4126	-0.6842	0.1238	0.0309	-0.0662	0.0180
7	5.0830	-1.2665	0.3317	0.1094	-0.1154	0.0600
9	6.3929	-1.8030	0.5966	0.1612	-0.1389	0.1137

表-8 付加たわみ \bar{w}/h に対する初期たわみの影響

初期たわみ Type	a	b	c	d
	A	0.7208	0.8144	0.9020
B	0.7203	0.8341	0.9162	0.7917
C	1.0474	1.1067	1.3277	1.0951
D	1.1748	1.2375	1.4907	1.2148

表-9 ($S_{x1}-S_{x1cr}$) に対する初期たわみの影響

初期たわみ Type	a	b	c	d
	A	-0.2729	-0.4053	-0.4679
B	-0.2597	-0.3627	-0.4307	-0.2718
C	-0.2444	-0.3058	-0.4411	-0.2734
D	-0.2363	-0.2769	-0.3958	-0.2486

みへの寄与は微少である。

図-13, 14 に $x=a/2$ における σ_x' と σ_y' の曲線を示した。 σ_x' については各タイプとも Q_1 が $2\sim 3Q_{1cr}$ をこえる程度を境にして，膜作用により $y=0.7b$ 付近の引張応力の増加が著しく最大の引張応力値を示した。

また， $y=b$ における σ_x' は常に最大の圧縮応力となっている。 σ_y' は $y=b$ での値は Q_1 に比例するが， Q_1 の増加により， $y=b$ 側へ集中する傾向にある。

図-15, 16 に点 1, 3 の σ_x' と点 2 の σ_e' を S_{x1}, S_{x2}, S_{e2} とすると，この応力の一部を示した。 σ_x', σ_e' などは式 (32), (33), (34) で示されるように，無次元化された応力で 図-15, 16 の縦，横軸の単位は無名数である。各タイプとも共通する点は座屈点において，初期たわみの影響が最大となった。図中の S_{x1} は $(0.5a, 0.5b)$ 点の σ_x' で S_{x2} との比較のために描いた。

次に，表-8, 9 に Q_1 が Q_{1cr} のときの初期たわみの影響の一部を示す。表-8 において \bar{w}/h はタイプ A, B については $(0.5a, 0.7b)$ 点の，タイプ C, D については $(0.5a, 0.6b)$ 点の付加たわみ $(w-w_0)/h$ である。最大初期たわみを $0.2h$ としたが， $\bar{w}, S_{x1}-S_{x1cr}$ とも，モード c が最大で，順次モード b, モード d, モ

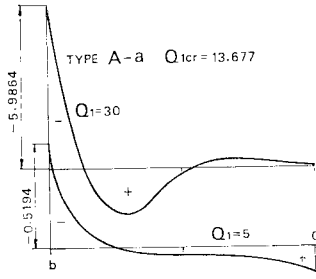


図-13 $x=a/2$ での σ'_x 分布

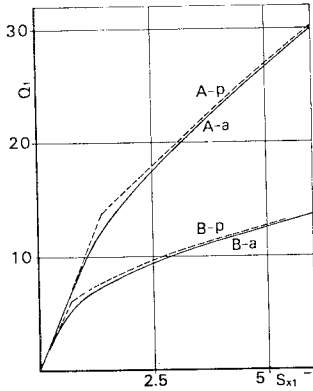


図-15 $S_{x1}-Q_1$ 関係

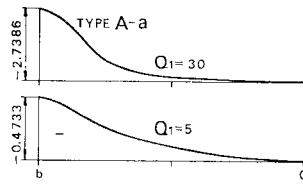


図-14 $x=a/2$ での σ'_y 分布

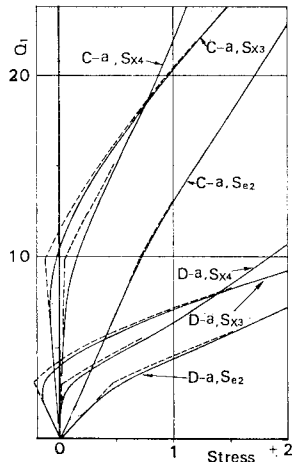


図-16 応力-荷重関係

ード a と小さくなっている。座屈波形で最大とならない点は注目に値する。また、モード d は $x-y$ 面からの最大初期たわみを $0.1h$ で規定したが、その影響が $0.2h$ の値をもつモード a の影響よりも大きくでている。したがって、モード c, d などの y 方向に 2 半波をもつ初期たわみ形状にかなり敏感であると思える。

4. 結 語

(1) 初期たわみを有する部分縁荷重を受ける単純支持長方形板に対して、荷重と変形 (w, w_0, u) が $x=a/2$ に関して対称な場合の座屈、有限変位解析が式 (22) ~ (30) を用いることにより可能となった。

(2) 部分縁荷重を受ける場合の後座屈解析を β が 1 と 2, c/b が 0.25 と 1 の場合について行った。また、完全板と 4 種類の初期たわみ形状の場合に検討を加えた。この結果、次のことが明らかになった。

a) Q_1-w'/h 曲線は一様圧縮板の曲線と類似した性状をもつ。すなわち、初期たわみの影響は座屈点付近で最大となり、それ以上の Q_1 に対して完全板の曲線に漸近する。また、初期たわみをもつ曲線の反曲点は座屈点付近にある。b) 最大付加たわみの位置は Q_1 の増加とともに、載荷辺側へ移る。 $Q_1=2Q_{1cr}$ における最大位置は $x=a/2$ 辺上に生じ、 y 方向の位置は初期たわみ形状の区別なく、タイプ A, B, C, D のそれぞれに対し、

$0.72b, 0.71b, 0.65b, 0.64b$ となる各値で示される位置は完全板の $Q_1=2Q_{1cr}$ での位置に等しい。c) $(0.5a, 0.7b)$ 付近の σ'_x は Q_1 が Q_{1cr} の 2~3 倍となると板内の最大引張応力となる。d) $Q_1=Q_{1cr}$ における初期たわみの影響を付加たわみと x 方向の最大圧縮応力について調べた。その結果、 y 方向に 2 半波形の初期たわみ形状をもつモード c が最大の値となる。また、モード d はモード a より影響が大きい。座屈波形のモード b の影響は最大ではない。e) Q_1 -応力曲線も Q_1-w'/h 曲線と同じく $Q_1=Q_{1cr}$ で最大の初期たわみの影響をもち、その後、 Q_1 の増加につれ完全板の曲線に漸近する。

参 考 文 献

- 1) Timoshenko, S.P.: Theory of Elastic Stability, McGraw Hill, 1961.
- 2) Alfutov, N.A. and L.I. Balabukh: On the possibility of solving plate stability problems without a preliminary determination of the initial state of stress, PMM, Vol. 31, No. 4, pp. 716~722, 1967.
- 3) Marguerre, K.: Zur Theorie der gekrümmten Platte grosser Formänderung, Proc. 5th International Congress for Applied Mechanics, pp. 93~101, 1938.
- 4) Levy, S.: Bending of rectangular plates with large deflections, NACA, Report No. 737, 1942.
- 5) Timoshenko, S.P.: Theory of Elasticity, McGraw Hill, 1951.
- 6) Khan, M.Z. and K.C. Johns: Buckling of plates with partially loaded edges, Proc. ASCE, No. ST 3, pp. 547~558, Mar., 1977.
- 7) White, R.N. and W. Cottingham: Stability of plates under partial edge loading, Proc. ASCE, No. EM 5, pp. 67~87, Oct., 1962.
- 8) Rockey, K.C. and D.K. Bagchi: Buckling of plate girder webs under partial edge loadings, Int. J. Mech. Sci., Vol. 12, pp. 61~76, 1970.
- 9) Coan, J.M.: Large-deflection theory for plates with small initial curvature loaded in edge compression, Jour. of Applied Mechanics, Vol. 18, pp. 143~151, June, 1951.
- 10) Yamaki, N.: Postbuckling behaviour of rectangular plates with small initial curvature loaded in edge compression, Jour. of Applied Mechanics, Vol. 26, pp. 407~414, Sept., 1959.
- 11) Rhodes, J. and J.M. Harvey: Effects of eccentricity of load or compression on the buckling and post-buckling behaviour of flat plates, Int. J. Mech. Sci., Vol. 13, pp. 867~879, 1971.
- 12) Smith, T.R.G. and S. Sridharan: A finite strip method for the buckling of plate structures under arbitrary loading, Int. J. Mech. Sci., Vol. 20, pp. 685~693, 1978.
- 13) Roberts, T.M.: Slender plate girders subjected to edge loading, Proc. Instn. Civ. Engrs., Part 2, 71, pp. 805~819, Sept., 1981.