

接続マトリックスを用いた骨組構造の最適設計

APPLICATION OF CONNECTION MATRIX TO OPTIMUM DESIGN OF FRAMED STRUCTURES

小林 一郎*・吉本 俊裕**・三池 亮次***

By Ichiro KOBAYASHI, Toshihiro YOSHIMOTO and Ryoji MIIKE

1. はじめに

最適設計研究の初期の段階においては、たとえば、Schmit¹⁾の3部材トラスのような簡単な構造をモデルとし、しかも部材断面特性としては、単に部材断面積 A のみを設計変数とすることが多かったが、近年、示方書に準拠したより実用的な部材断面を用いる傾向がある^{2)~5)}。

より実用的で大規模かつ複雑な構造物の最適設計問題に関心が移行するに従って、設計変数と制約条件式の数が膨大なものとなり、計算機の容量の制約と計算精度と効率の向上を図るために Suboptimization の研究^{7)~9)}や、小山・長⁶⁾のように、変数変換により制約条件式を整理したり、余裕ある制約条件式を除く解法が試みられた。

構造物の部材断面 (sizing) の最適設計だけでなく、最適形状 (optimal configuration, geometry) を自動的に得ようとする研究もまた、最適設計における重要課題の1つである^{10), 11), 14)}。

Pederson¹²⁾ は、部材断面積と節点座標を設計変数とし、直接剛性法を用いた SLP 法に従って、立体トラスの最適形状を得ており、Saka¹³⁾ は、変位 d と外力 p の関係式を付帯条件式として、変位 d を設計変数に加えて解析している。わが国では、節点を設計変数とするピン結合トラスの最適設計の定式化について、中村¹⁵⁾、大久保¹⁾の、剛結合部材も含めた構造について古田¹⁶⁾の研究がある。

外力と部材端力を結びつけるマトリックス C は、一般に incidence matrix^{2), 16)} とよばれるが、同様のものを、Romstad と Wang¹⁷⁾ は statics matrix, Livesley¹⁸⁾ は

接続マトリックス (connection matrix) と称した。

接続マトリックス C を用いると、外力 p と部材断面力 p_m とが陽形式で結びつけられるので直接剛性法に比べると1次導関数すなわち感度係数の算出が容易となる。

ここでは、① 接続マトリックス C が部材端におけるいわゆる座標変換マトリックス T と平衡マトリックス H によって構成されるため、接続マトリックス C の設計変数による感度係数は、結局、 T と H の感度係数の問題に帰着することを明らかにし、したがって、② 接続マトリックスを用いることによって、剛結骨組構造における座標を設計変数とする最適形状設計の定式化が組織的になって容易であり¹⁹⁾、この解法が大久保¹⁾によるピン結合トラスの最適形状設計の基礎式を一般化したものであることを示す。また、③ 接続マトリックスは、部材断面力の影響線を与えるマトリックスであり、これを用いることによって最大の部材断面力を生ぜしめるような荷重配置を考慮した、より現実的な荷重条件のもとでの最適設計が可能となることを明らかにする²⁰⁾。さらに、④ ③の解析においては、より実用的な箱型断面のピン結合トラスを例題とするが、断面の特性値として、ウェブとフランジの板厚 t_w, t_f と部材幅 b 、部材高 h の4つの変数の代わりに、これを断面積 A 、細長比 λ 、部材幅 b および断面の形状係数 C_F (または、部材高 h) の4つの独立な設計変数に変換して用いる。制約条件式として、道路橋示方書²²⁾に示される板厚の制限、面外座屈防止の条件も考慮し、より現実的な最適断面が得られることを示す。なお、最適化手法としては、反復線形計画法 (SLP) を用いる。

2. 接続マトリックスを用いた骨組形状の最適設計

構造物の最適設計のアルゴリズムが正確かつ円滑に実

* 正会員 工修 熊本大学助手 工学部土木工学科

** 正会員 工修 建設省九州地方建設局 (元熊本大学工学部大学院工学研究科)

*** 正会員 工博 熊本大学教授 工学部土木工学科

行されるためには、構造解析の基礎式が適切でなければならぬ。しかるに直接剛性法を用いた基礎式による方法では、一般に、局所座標系に基づいて作成された応力の制約条件式と全体座標系に基づく構造全体の剛性マトリックスの関連が Taylor 展開して線形化することも手伝って非常に繁雑となる。

Livesley¹⁸⁾ のいうように、接続マトリックスは、座標変換マトリックスと平衡マトリックスによって組み立てられている。われわれは、このことに着目して、接続マトリックスを用いると、最適設計における感度係数の誘導がより簡潔にかつ組織的に行えること、したがって、剛結骨組構造物の座標を設計変数としたり、移動荷重に対して最大断面力を与える荷重配置を考慮した最適設計の定式化が比較的容易となることをさきに指摘した^{19), 20)}。また、接続マトリックスを用いると剛結合やピン結合が混在する節点をもった構造の最適設計も容易に解析することができる。

記号の説明をかねて以下に構造解析の基礎式を示す。外力 p 、部材端力 p_m 、節点変位 d 、接続マトリックス C 、剛性マトリックス K_m ^{注1)} とすると

$$p = Cp_m \dots\dots\dots (1)$$

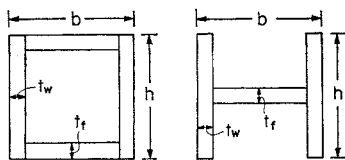
$$d = (CK_m C^T)^{-1} p = G^{-1} p \dots\dots\dots (2)$$

$$p_m = KC^T d \dots\dots\dots (3)$$

となる。接続マトリックス C は、座標変換マトリックス T_i と部材端 1 および 2 における断面力 p_{i1} と p_{i2} の関係を規定する平衡マトリックス H_i ^{注2)} と T_i ^{注3)} の積 $U_i = T_i H_i$ の $i=1, 2, \dots, k$ のすべての値の関数として与えられる。

(1) 設計変数²¹⁾

骨鋼筋構造において、もっぱら用いられる箱型とか I 型の断面形状を示す設計変数は、図—1 に示すとおり、部材幅 b 、部材高 h とそれぞれの板厚 t_f, t_w の 4 個であるが、板厚の代わりに断面積 A と細長比 λ を用い、独立の設計変数を A, λ, h, b の 4 個とする方が数式の展開が容易となる。部材高の代わりに、断面 2 次半径を r とし、 $C_F = h/2r$ という無次元パラメーターを用いることも可能である。以下に断面形状に関する設計変数の



(a) 箱型断面 (b) I型断面

図—1 断面形状

注 1) 補遺 (1) 参照
 2) 補遺 (2) 参照
 3) 補遺 (2) 参照

関係式を示す。

a) (t_f, t_w, h, b) と (A, λ, h, b) の関係式

[箱型断面]

$$t_f = \frac{A(12\beta - 1)}{4b}, t_w = \frac{3A(1-4\beta)}{4h}, h=h, b=b \dots\dots\dots (4)$$

[I型断面]

$$t_f = \frac{A(1-12\beta)}{b}, t_w = \frac{6A\beta}{h}, h=h, b=b \dots\dots\dots (5)$$

ただし、 $\beta = \left(\frac{L}{\lambda h}\right)^2$

b) (t_f, t_w, h, b) と (A, λ, C_F, b) の関係式

[箱型断面]

$$\left. \begin{aligned} t_f &= \frac{A(3-C_F^2)}{4bC_F^2}, t_w = \frac{3A\lambda(C_F^2-1)}{8C_F^3L} \\ h &= \frac{2C_FL}{\lambda}, b=b \end{aligned} \right\} \dots\dots (6)$$

[I型断面]

$$\left. \begin{aligned} t_f &= \frac{A(C_F^2-3)}{bC_F^2}, t_w = \frac{3A\lambda}{4C_F^3L} \\ h &= \frac{2C_FL}{\lambda}, b=b \end{aligned} \right\} \dots\dots (7)$$

ただし、 L は部材長である。上記の 4 個の独立パラメーター A, λ, C_F, b を用いるとき、 i 部材の剛性マトリックスは、

$$K_i = E_i A_i \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{L\lambda^2} & -\frac{6}{\lambda^2} \\ 0 & -\frac{6}{\lambda^2} & \frac{4L}{\lambda^2} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (8)$$

である。ここに、 E_i は i 部材の弾性係数である。また、断面力 p_m より応力 σ_m を求める式 $\sigma_m = D_m p_m$ ^{注4)} における係数マトリックスは i 部材について

$$D_i = \left[\frac{1}{A} \pm \frac{\xi h}{2I} \pm \frac{h}{2I} \right]_i = \left[\frac{1}{A} \pm \frac{\xi C_F \lambda}{AL} \pm \frac{C_F \lambda}{AL} \right]_i \dots\dots\dots (9)$$

となる。ただし、 $\xi=0$ または L で、 I は断面 2 次モーメントである。

(2) 感度係数

任意の設計変数 X について、 σ_m と p_m を微分すると

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial X} = \frac{\partial D_m}{\partial X} p_m + D_m \frac{\partial p_m}{\partial X} \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{\partial p_m}{\partial X} = \frac{\partial K_m}{\partial X} C^T d + K_m \frac{\partial C^T}{\partial X} d + K_m C^T \frac{\partial d}{\partial X} \dots\dots\dots (11)$$

となる。上式において D_m, K_m, C の感度係数が得られれば $\partial \sigma_m / \partial X$ が求められる。 $\partial C / \partial X$ は、 $\partial T_i / \partial X$ と

注 4) 補遺 (1) 参照

$\partial H_i / \partial X$ が求めれば機械的に作成することができる。また K_m と D_m の感度係数は各部材のマトリックス K_i と D_i の感度係数を求めればよい。したがって、 T_i, H_i, K_i, D_i の導関数が計算されれば式 (10), (11) の感度係数は解析的に求められる。以下にこれらの感度係数を示す。ただし、添字 j は節点 j を表わす。

a) 断面に関するパラメーターを設計変数にする場合
 T_i と H_i は節点座標のみの関数であるので、感度係数はゼロである。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial D_i}{\partial A_i} &= \left[-\frac{1}{A^2} \mp \frac{\xi C_F \lambda}{A^2 L} \mp \frac{C_F \lambda}{A^2 L} \right]_i = -\frac{1}{A} D_i \\ \frac{\partial D_i}{\partial \lambda_i} &= \left[0 \pm \frac{\xi C_F}{AL} \pm \frac{C_F}{AL} \right]_i \\ \frac{\partial D_i}{\partial C_{Fi}} &= \left[0 \pm \frac{\xi \lambda}{AL} \pm \frac{\lambda}{AL} \right]_i, \quad \frac{\partial D_i}{\partial b} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial K_i}{\partial A_i} &= \frac{1}{A_i} K_i, \quad \frac{\partial K_i}{\partial C_F} = \frac{\partial K_i}{\partial b} = 0 \\ \frac{\partial K_i}{\partial \lambda_i} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{24}{L\lambda^3} & \frac{12}{\lambda^3} \\ 0 & \frac{12}{\lambda^3} & -\frac{8L}{\lambda^3} \end{bmatrix}_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

b) 節点座標を設計変数とする場合

任意の節点座標を x_j とする。また、 $r_i = \cos \theta_i, \mu_i = \sin \theta_i$ であり θ_i は x 軸と部材軸のなす角である注5)。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_i}{\partial x_j} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_j} & -\frac{\partial \mu}{\partial x_j} & 0 \\ \frac{\partial \mu}{\partial x_j} & \frac{\partial r}{\partial x_j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_i \\ \frac{\partial H_i}{\partial x_j} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial L}{\partial x_j} & 0 \end{bmatrix}_i \\ \frac{\partial D_i}{\partial x_j} &= \left[0 \mp \frac{\xi C_F \lambda}{AL^2} \frac{\partial L}{\partial x_j} \mp \frac{C_F \lambda}{AL^2} \frac{\partial L}{\partial x_j} \right]_i \\ \frac{\partial K_i}{\partial x_j} &= -E_i A_i \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & & 0 \\ & \frac{12}{\lambda^2 L^2} & \\ 0 & & -\frac{4}{\lambda^2} \end{bmatrix}_i \frac{\partial L_i}{\partial x_j} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

なお、ピン結合トラスの場合には、平衡マトリックス $H_i = 1$ であり、座標変換マトリックス $T_i = [r_i \mu_i]^T$ となるため接続マトリックスは、座標変換マトリックスのみによって構成されることとなり、大久保⁹⁾による座標を設計変数とする最適形状設計の解式に一致することになる。

注 5) 補遺 (3) 参照

3. 影響線マトリックスを用いた最適設計²⁰⁾

(1) 影響線マトリックス

接続マトリックス C は、外力 p を部材断面力 p_m に変換する係数マトリックスで式 (1) によって与えられるが、静定構造の場合は逆に

$$p_m = C^{-1} p \equiv \Gamma p \dots\dots\dots(15)$$

であり、不静定構造の場合は、式 (2), (3) より

$$\Gamma = K_m C^T G^{-1} \dots\dots\dots(16)$$

となる。上式で定義される Γ の要素は、任意の節点に単位の荷重が作用するときの部材断面力である。すなわち Γ マトリックスは、その i 行ベクトル $l_i^T = [l_{i1} \ l_{i2} \ \dots \ l_{im}]$ が、 i 部材の部材断面力の影響線の縦距を与えることになる。同様に式 (2) より G^{-1} は変位の影響線マトリックスを与える。

この l_i を使用して、等分布死荷重 p_d と等分布活荷重 p_l および集中活荷重 P_l が作用するときの最大部材断面力を求める。図-2 の影響線図の正の面積の絶対値を S_+ 、負の面積の絶対値を S_- 、両者のうちの大きい方の面積を S とする。また、 $S_+ > S_-$ のとき、縦距の最大値を l_{\max} とし $S_- > S_+$ のときは、縦距の最小値を l_{\max} とすると、

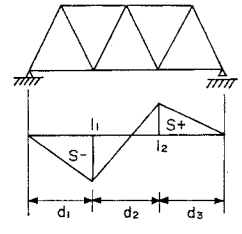


図-2 トラスの影響線図

i 部材の最大断面力 $p_{m,\max,i}$ は

$$p_{md} = (S_+ - S_-) p_d \dots\dots\dots(17\cdot a)$$

$$p_{ml} = l_{\max} P_l + S p_l \dots\dots\dots(17\cdot b)$$

$$p_{m,\max,i} = p_{md} + p_{ml} \dots\dots\dots(17\cdot c)$$

である。これは

$$p_{m,\max,i} = l_i^T E P \dots\dots\dots(18)$$

のようにマトリックス表示することができる。ここに、 $P = [p_d \ P_l \ p_l]^T$ であり、 $E = [e_1 \ e_2 \ e_3]$ とするが、その列ベクトル e_i ($i=1, 2, 3$) は、次のように求められる。

① e_1 は、式 (17・a), (18) より注6)

$$l_i^T e_1 = (S_+ - S_-) \dots\dots\dots(19)$$

となるので、おのおのの隣り合う縦距で囲まれた台形の面積を求めればよい。図-2 の各パネルの長さを $d_i, i=1, 2, \dots, s$ とすると、 e_1 は次のように定められる。

$$e_1 = \left[\frac{d_1 + d_2}{2} \ \frac{d_2 + d_3}{2} \ \dots \ \frac{d_{s-1} + d_s}{2} \right]^T \dots\dots(20)$$

② e_2 は、式 (17・b), (18) より

$$l_i^T e_2 = l_{\max} \dots\dots\dots(21)$$

注 6) 補遺 (4) 参照

でなければならないので、 l_{\max} がベクトル l_i の第 k 番目の値であるならば、

$$e_3 = \begin{matrix} (1) & (k) \\ [0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots 0]^T \end{matrix} \dots\dots\dots (22)$$

とすればよい。

③ e_3 は、式 (17・b), (18) より

$$l_i^T e_3 = S \dots\dots\dots (23)$$

としなければならない。つまり、 S_+ か S_- の一方のみを求めることになる。ただし、ワーレントラスの上下弦材のように、縦距の符号がすべて同じ場合は、 S_+ か S_- のどちらか一方は 0 であるので、 $e_3 = e_1$ でよい。隣り合う縦距の符号が 1 か所以上異なっている場合は、図-2 に示すように、符号の変化する所では台形でなく、2 つの三角形のうち一方の面積を求めることになるため、次に定義する q を補正量として面積を求める。

$$q(k, k+1) = \frac{|l_k|}{|l_k| + |l_{k+1}|} \dots\dots\dots (24)$$

したがって、たとえば、図-2 において S_- の面積を求める場合に用いる e_3 は、

$$e_3 = \left[\frac{d_1 + d_2 \cdot q(1, 2)}{2} \quad 0 \right]^T \dots\dots\dots (25)$$

となる。以上より、 E が求まるので、式 (18) より得られた $p_{m, \max, i}$ を第 i 番目の要素とする最大部材断面力ベクトルを $p_{m, \max}$ とし、最大応力を σ_{\max} として次式が得られる。

$$\sigma_{\max} = D_m p_{m, \max} \dots\dots\dots (26)$$

(2) 影響線マトリックスを用いた最適設計

活荷重の作用する骨組構造の最適設計において、応力や変位の制約条件は、影響線を描いて各断面の最大応力や変位を生ぜしめるような荷重配置に対して成立する必要がある。静定骨組構造で、設計変数として断面特性値のみを用いるときは、影響線は設計変数に関係なく一定であるから、最適設計の計算に最大応力や変位を与えるような荷重配置を決めることが可能であり、従来このような操作による最適設計の研究は行われている。

ここでは、静定構造であっても、構造が複雑で影響線の作図が困難であって、しかも節点座標を設計変数とする場合、また、不静定構造で、影響線そのものが設計変数の関数となり、あらかじめ荷重配置を設定することができない場合を対象にして、既述の影響線マトリックスを用いた最適設計における感度係数の誘導を試みる。

式 (26) と式 (18) における応力 σ_{\max} および部材断面力 $p_{m, \max}$ の要素 $p_{m, \max, i}$ の設計変数 X についての導関数は、

$$\frac{\partial \sigma_{\max}}{\partial X} = \frac{\partial D_m}{\partial X} \cdot p_{m, \max} + D_m \frac{\partial p_{m, \max}}{\partial X} \dots\dots\dots (27)$$

および

$$\frac{\partial p_{m, \max, i}}{\partial X} = \frac{\partial l_i^T}{\partial X} E P + l_i^T \frac{\partial E}{\partial X} P \dots\dots\dots (28)$$

である。縦距 l_i は式 (16) の Γ マトリックスから直接求められるので、上式の $\partial l_i^T / \partial X$ は次式から得られる。

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial X} = \frac{\partial K_m}{\partial X} C^T G^{-1} + K_m \frac{\partial C^T}{\partial X} G^{-1} + K_m C^T \frac{\partial G^{-1}}{\partial X} \dots\dots\dots (29)$$

また、式 (28) において

$$\frac{\partial E}{\partial X} = \sum_{k=1}^{s-1} \frac{\partial E}{\partial l_k} \frac{\partial l_k}{\partial X} \dots\dots\dots (30)$$

である。ここで、マトリックス E において、 l_k に依存するのは式 (24) で定義される $q(k, k+1)$ のみであることに留意すれば $\partial E / \partial l_k$ は容易に求められる。

X が断面特性値のみからなる場合は、不静定構造であっても、接続マトリックスを構成する T および H は X には無関係であるから $\partial C / \partial X = 0$ となる。また、静定構造では $\partial p_{m, \max} / \partial X = 0$ である。

4. 適用例

上記の理論を用いて、骨組形状の最適設計と影響線を用いたトラス橋の最適設計の解析例について述べる。制約条件は道路橋示方書²²⁾に従うものとするが、剛結合部材の圧縮許容応力度は、感度係数の算出が複雑になるので、本適用例においては定数 (SS 41 では -1400 kg/cm^2) として解析した。採用した制約条件式は、次のとおりである。

- ① 応力制限 $\sigma_{ac}(\lambda) \leq \sigma_m \leq \sigma_{at} \dots\dots\dots (31)$
- ② 細長比制限 $\lambda_L \leq \lambda \leq 120 \text{ or } 200 \dots\dots\dots (32)$
- ③ 板厚制限 $t_w \text{ and } t_f \geq 0.8 \text{ cm} \dots\dots\dots (33)$
- ④ たわみ制限 $d_s \leq L_s / 600 \dots\dots\dots (34)$

ここに、 σ_m は実応力度、 σ_{at} は許容引張応力度、 $\sigma_{ac}(\lambda)$ は許容圧縮応力度で、細長比 λ の関数となる。また、 λ_L は細長比の下限で、面外座屈防止の条件 $I_y > I_x$ より求められる。 d_s は節点のたわみの最大値、 L_s はスパン長である。目的関数は、主構体積 z で、これを最小とする。すなわち、次式のとおりである。

$$z = \sum_{i=1}^k A_i L_i \rightarrow \min. \dots\dots\dots (35)$$

(1) 6 パネルトラス

6 パネルトラスについて、骨組形状の最適設計を行う。スパン長 50.4 m 使用鋼種 SS 41 の場合について、次の 3 ケースの解析を行う。

[ケース 1]

制約条件：式 (31), (32)

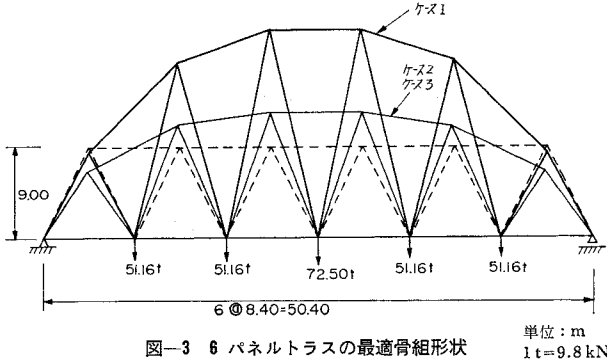


図-3 6 パネルトラスの最適骨組形状

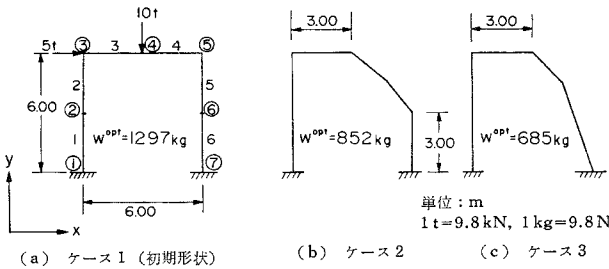


図-4 門型ラーメンの最適骨組形状

設計変数：断面積 A ，細長比 λ ，上弦材の y 方向節点座標

[ケース 2]

制約条件：式 (31)~(34)

設計変数：ケース 1 に無次元パラメーター C_F と部材幅 b (全部材で 1 つの変数) を追加

[ケース 3]

剛結構造として，曲げモーメントを考慮した解析で，設計変数，制約条件はケース 2 と同じ。ただし，圧縮部材の許容応力度は $\sigma_{ac} = -1400 \text{ kg/cm}^2$ (-137 MPa) とする。

図-3 は，モデルの荷重条件と各ケースについて行った解析結果を示したが，ケース 2 とケース 3 の骨組形状の最適値はほぼ一致した。骨組形状の初期値は，図中点線で示す主構高 9m のワーレントラスとした。ケース 1 の最適解では，斜材はすべて引張であり，いわば吊材として機能しているためトラス構造とはいえないものである。ケース 2, 3 は，ともに曲弦トラスであり，最終的な骨組形状が，ほぼ一致したのは，このような骨組形状自体が軸力の卓越する構造であるので，曲げモーメントの効果が僅少となるうえ，大半の部材が板厚制限のため，座標値の動きがおさえられているためと思われる。

以上のことから，骨組形状も含めた最適設計を行う場合には，設計変数あるいは制約条件が変化すると解析結果はかなり大きな違いが出てくることがわかる。また，断面の特性値としては，断面積 A のみを設計変数にするときと， A 以外に細長比，部材幅，無次元パラメーター

C_F 等を用いるときには結果がかなり相違するから，設計変数の選択には注意を払う必要がある。さらに，制約条件として板厚の制限等も加えるべきである。

(2) 門型ラーメン

剛結構造の骨組形状の最適設計の例として，図-4 に門型ラーメンの解析例を示す。制約条件は式 (31)~(33) で，許容応力度は $\sigma_a = \pm 1400 \text{ kg/cm}^2$ ($\pm 137 \text{ MPa}$) とした。荷重は，節点 3 の x 方向に 5t (49 kN)，節点 4 の y 方向に -10t (-98 kN) をかける。ケース 1 は，骨組形状を固定した場合で，設計変数は 19 個である。ケース 2 は，節点 5 の (x, y) 座標を設計変数として追加した場合であり，ケース 3 は，節点 5 と 6 の (x, y) 座標を設計変数として追加した場合で，設計変数は 23 個である。初期の骨組形状はケース 1 に等しい。

表-1 は，3 ケースについて，初期値と最適値を示したものである。なお，ムープリミットは断

表-1 門型ラーメンの初期値と最適値

	初期値	最適値			
		ケース 1	ケース 2	ケース 3	
重量 $W(\text{kg})$	7065	1297	852	685	
部材幅 $b(\text{cm})$	30.0	29.1	20.2	16.8	
断面積 $A(\text{cm}^2)$	1	500.0	94.1	54.1	41.2
	2	500.0	76.7	50.0	47.5
	3	500.0	94.1	56.4	48.9
	4	500.0	94.1	58.2	76.8
	5	500.0	102.8	66.4	59.7
	6	500.0	87.6	112.6	67.0
ウェブ板厚 $t_w(\text{cm})$	1	4.23	0.80	0.80	0.80
	2	4.23	0.80	0.80	0.80
	3	4.23	0.80	0.80	0.80
	4	4.23	0.80	0.80	1.22
	5	4.23	1.08	0.88	1.03
	6	4.23	0.80	1.88	0.80
フランジの板厚 $t_f(\text{cm})$	1	13.45	0.80	0.80	0.80
	2	13.45	0.80	0.80	0.80
	3	13.45	0.80	0.80	0.80
	4	13.34	0.80	0.83	1.42
	5	13.45	0.80	0.80	0.81
	6	13.45	0.80	1.80	1.10
$x(\text{m})$	5	6.00	6.00*	4.60	4.45
	6	6.00	6.00*	6.00*	4.45
$y(\text{m})$	5	6.00	6.00*	4.73	5.35
	6	3.00	3.00*	3.00*	2.01
実応力度 $\sigma(\text{kg/cm}^2)$	1	-499.5	-955.7	-143.2	-92.3
	2	-174.9	-534.5	-422.3	-79.2
	3	-645.9	-1156.1	-1399.2	-974.4
	4	-834.9	-1398.7	-1399.4	-1216.3
	5	-830.7	-1397.3	-1400.3	-1260.3
	6	-753.4	-1399.6	-1398.3	-1320.0

注：* は定数とする

1 kg = 9.8 N, 1 kg/cm² = 0.098 MPa

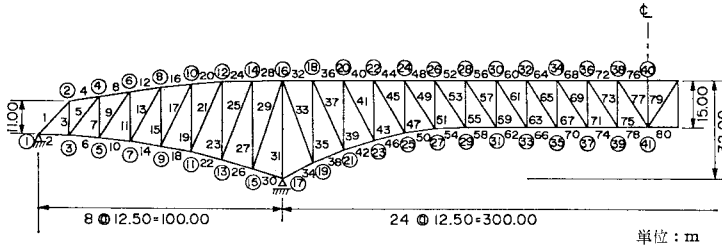


図-5 天門橋の骨組形状

表-2 天門橋の初期値と最適値

部材番号	初期値			最適値			実応力度 (kg/cm ²)	許容応力度 (kg/cm ²)	鋼種
	A (cm ²)	λ	h (cm)	A (cm ²)	λ	h (cm)			
1	2000.0	80.0	50.8	238.9	83.0	44.7	1900	1900	SM 50
2	2000.0	80.0	40.0	334.7	29.3	104.6	-1018	-1322	SS 41
3	2000.0	80.0	34.2	222.2	71.6	84.3	-1159	-1168	SM 50
4	2000.0	80.0	40.0	308.9	34.2	88.4	1114	1400	SS 41
62	2000.0	80.0	40.0	657.1	33.7	104.6	1401	1400	SS 41
63	2000.0	80.0	45.8	260.7	59.0	58.2	-1327	-1327	SM 50
64	2000.0	80.0	40.0	889.2	32.0	88.4	-1662	-1676	SM 50
$b = 200.0$ cm $h_1 = 40.0$ cm $h_2 = 40.0$ cm			$b = 104.6$ cm $h_1 = 104.6$ cm $h_2 = 88.4$ cm			b は全部材について共通 h_1 は上弦材 h_2 は下弦材			

注：1 kg/cm² = 0.098 MPa

面特性値については、はじめ0.3とし、制約条件に近くごとに、小さくするものとし、座標については10 cmを範囲とした。

接続マトリックスを用いると、本例題のような剛結合構造において節点座標と断面形状に関して、それぞれ複数の種類の設計変数のある最適設計問題においても感度係数の誘導が解析的に簡潔に行える。

(3) 天門橋²³⁾

図-5に示す天門橋(天草一号橋)と同じ骨組形状のモデルで、移動荷重を考慮した部材最大断面力について制約条件式をたてて最適設計を行う。設計変数は、断面積 A 、細長比 λ を各部材ごとの変数とし、部材幅 b は全部材共通、部材高 h は上下弦材でそれぞれ共通(これを h_1, h_2 とする)斜材、垂直材は各部材独立の変数とする。断面形状は、部材番号69と73の斜材のみI型とし、その他は箱型とした。鋼種は、部材によってSS41, SM50, SM58のいずれかを使用する。たとえば、下弦材の部材番号54, 58, 62はSS41, 上弦材の部材番号12, 16, 20, 24等はSM58とした。制約条件は式(31)~(34)である。

骨組形状の対称性を考慮して、部材数は79, 設計変数は201である。また、式(18)における設計荷重は、 $p_d = 45.98$ kg/cm (45.1 kN/m), $P_l = 1568$ kg (15.4 kN), $p_l = 9.41$ kg/cm (9.2 kN/m)とした。表-2は、初期値と最適値の一部を、図-6は最適解における影響線図の一部を示したものであり、これは自動的に作図すること

ができる。図中の数値は、各部材の l_{max} の値である。

軸力が最大となるのは第34部材であったが、最適解は $b = h = 104.6$ cm, $t_f = t_w = 1.8$ cmで、いわゆる正方形等厚の箱型部材となっている。1部材のみの最適設計を行えば、この形状が解であることがわかる。

また、全部材の80%にあたる63部材が許容応力度いっぱいの断面になっているが、その他は、板厚制限や部材幅、部材高によって断面が決定される。つまり、設計変数の一部をグループごとに共通な変数にするという実橋の設計に即した条件を考慮していくと全応力設計にはならない。本例題のように実橋の骨組形状を与えた場合において

も影響線解析はマトリックス演算のみで処理され、部材最大断面力、最大変位およびそれらの感度係数の算出はきわめて容易に行うことができる。

5. 結論

(1) 接続マトリックスが座標変換マトリックス T と平衡マトリックス H によって組み立てられることに着目して、これら T と H のマトリックスを用いると最適設計における感度係数の誘導がより簡潔かつ組織的に行えること、したがって、剛結骨組構造の座標を設計変数とするような複雑な最適形状設計の定式化が比較的容

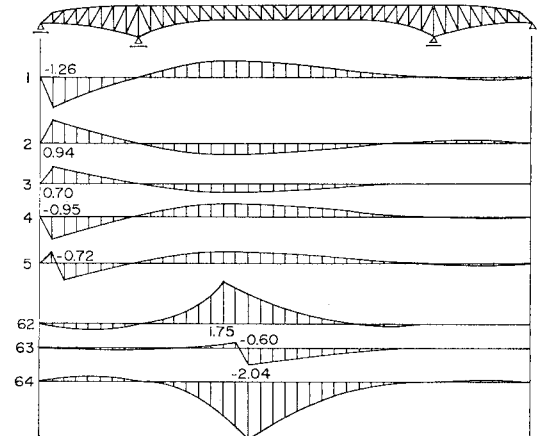


図-6 天門橋の最適断面における影響線図

易になることを指摘した。また、その例題として、6パネルトラスおよび門型ラーメンの計算例を示した。

(2) 骨組鋼構造において、もっぱら用いられる箱型とかI型の断面形状を示す設計変数として、ウェブおよびフランジの板厚の代わりに断面積と細長比を用い、これに部材の高さと部材幅を加えた4個の独立パラメーターを設計変数とすると最適設計の定式化が容易になることを指摘した。これは、座屈条件式、目的関数等が上記のパラメーターの関数となっているためである。部材高 h の代わりに最小回転半径を r として $C_F = h/2r$ という無次元パラメーターを用いることも可能である。例題として、6パネルトラスの最適設計を試みたが、単に断面積のみを設計変数とするよりは、上記4個のパラメーターを用いる方が、より現実的な最適形状が誘導されることを述べた。

(3) 接続マトリックスを用いると、骨組構造に活荷重が作用するときの最大断面力や変位を与える影響線マトリックスの誘導が、静定、不静定にかかわらず容易となる。例題として、3径連続トラスの天草天門橋の影響線を自動的に描いた。

(4) 活荷重の作用する場合、不静定構造で、断面力や変位の影響線そのものが設計変数の関数となる場合や、静定であっても構造が複雑で影響線の作図が困難であったり、また、座標を設計変数とする場合には、前項の影響線マトリックスを用いると最適設計における感度係数の誘導が直接剛性法を用いるよりも容易なることを述べ、天草天門橋の最適設計を行った。

謝 辞：本研究の一部は、著者らの指導による杉野朗君（現在熊本大学工学部大学院工学研究科）の熊本大学工学部卒業研究の主題となっている。図面の作製にあたっては、熊本大学工学部技官 松本英敏氏のご協力を得た。使用した計算機は、九州大学大型計算機センターのFACOM M-200である。関係各位に謝意を表す。

補 遺

(1) K_m および D_m について

式(8)に示された K_i は、部材 i の1端を固定したときの2端の断面力 p_{i2} とそれに基づく変形ベクトル e_{i2} の関係を規定する剛性マトリックスで、 $p_{i2} = K_i e_{i2}$ であり、式(9)に示された D_i は、 p_{i2} を2端の応力 σ_{i2} に変換する係数マトリックスで $\sigma_{i2} = D_{i2} p_{i2}$ となる。これより K_m , D_m と K_i , D_i の関係は、

$$K_m = \begin{bmatrix} K_1 & & & 0 \\ & K_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & K_k \end{bmatrix},$$

$$\sigma_m = \begin{bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \vdots \\ \sigma_{k2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 & & & 0 \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & D_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{k2} \end{bmatrix} = D_m p_m \quad \dots\dots\dots (A.1)$$

となる。

(2) T_i , H_i について

各部材の平衡マトリックス H_i と座標変換マトリックス T_i は

$$H_i = \begin{bmatrix} r & -\mu & 0 \\ \mu & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i, \quad T_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & L & 1 \end{bmatrix}_i \quad \dots\dots\dots (A.2)$$

である。

(3) $\partial L_i / \partial x_j$, $\partial r_i / \partial x_j$, $\partial \mu_i / \partial x_j$ について

部材 i の1端および2端の座標を (x_{i1}, y_{i1}) , (x_{i2}, y_{i2}) とすると

$$L_i = \sqrt{(x_{i2} - x_{i1})^2 + (y_{i2} - y_{i1})^2} \quad \dots\dots\dots (A.3)$$

$$r_i = (x_{i2} - x_{i1}) / L_i \quad \dots\dots\dots (A.4)$$

$$\mu_i = (y_{i2} - y_{i1}) / L_i \quad \dots\dots\dots (A.5)$$

となる。したがって、 $\partial L_i / \partial x_j$ は

$$\frac{\partial L_i}{\partial x_{i1}} = -r_i, \quad \frac{\partial L_i}{\partial x_{i2}} = r_i, \quad \frac{\partial L_i}{\partial y_{i1}} = -\mu_i, \quad \frac{\partial L_i}{\partial y_{i2}} = \mu_i \quad \dots\dots\dots (A.6)$$

となる。また、 $\partial r_i / \partial x_j$, $\partial \mu_i / \partial x_j$ は

$$\frac{\partial r_i}{\partial x_{i1}} = -\frac{\mu_i^2}{L_i}, \quad \frac{\partial r_i}{\partial x_{i2}} = \frac{\mu_i^2}{L_i}, \quad \frac{\partial r_i}{\partial y_{i1}} = \frac{r_i \mu_i}{L_i},$$

$$\frac{\partial r_i}{\partial y_{i2}} = -\frac{r_i \mu_i}{L_i} \quad \dots\dots\dots (A.7)$$

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial x_{i1}} = \frac{r_i \mu_i}{L_i}, \quad \frac{\partial \mu_i}{\partial x_{i2}} = -\frac{r_i \mu_i}{L_i}, \quad \frac{\partial \mu_i}{\partial y_{i1}} = -\frac{r_i^2}{L_i},$$

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial y_{i2}} = \frac{r_i^2}{L_i} \quad \dots\dots\dots (A.8)$$

(4) e_1 ベクトルについて

図-2のトラスを例にとりて e_1 ベクトルの意味を明らかにする。縦距がすべて同符号の場合には、

$$e_1 = \left[\frac{d_1 + d_2}{2} \quad \frac{d_2 + d_3}{2} \right]^T \quad \dots\dots\dots (A.9)$$

となる。しかし、縦距の符号が異なる場合には、式(24)で定義した補正量 q をかけて

$$e_1' = \left[\frac{d_1 + d_2 \cdot q(1, 2)}{2} \quad \frac{d_2 \cdot q(2, 1) + d_3}{2} \right]^T \quad \dots\dots\dots (A.10)$$

が厳密な値である。ところが、式(19)で示した S_+ - S_- を求めるためには $l_i^T e_1$ でも $l_i^T e_1'$ でも同じことになる。以下に、この等式 $l_i^T e_1 = l_i^T e_1'$ を導く。まず、図-2より

$$S_- = \frac{|l_1| d_1}{2} + \frac{|l_1| d_2 \cdot q(1, 2)}{2},$$

$$S_+ = \frac{|l_2|d_2 \cdot q(2, 1)}{2} + \frac{|l_2|d_3}{2} \dots\dots\dots (A \cdot 11)$$

よって、 $l_i^T e_i = [l_1 \ l_2]$ とすると

$$S_+ - S_- = \frac{l_1 d_1}{2} + \frac{l_1 d_2 \cdot q(1, 2)}{2} + \frac{l_2 d_2 \cdot q(2, 1)}{2} + \frac{l_2 d_3}{2} = [l_1 \ l_2] \begin{bmatrix} \frac{d_1 + d_2 \cdot q(1, 2)}{2} \\ \frac{d_2 \cdot q(2, 1) + d_3}{2} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (A \cdot 12)$$

となる。次に $l_i^T e_i$ を求めると

$$l_i^T e_i = [l_1 \ l_2] \begin{bmatrix} \frac{d_1 + d_2}{2} \\ \frac{d_2 + d_3}{2} \end{bmatrix} = \frac{l_1 d_1}{2} + \frac{l_1 d_2}{2} + \frac{l_2 d_2}{2} + \frac{l_2 d_3}{2} = \frac{l_1 d_1}{2} + \frac{l_1 d_2}{2} \left(\frac{|l_1|}{|l_1| + |l_2|} \right) + \frac{l_1 d_2}{2} \left(\frac{|l_2|}{|l_1| + |l_2|} \right) + \frac{l_2 d_2}{2} \left(\frac{|l_2|}{|l_1| + |l_2|} \right) + \frac{l_2 d_2}{2} \left(\frac{|l_1|}{|l_1| + |l_2|} \right) + \frac{l_2 d_3}{2} = \frac{l_1 d_1}{2} + \frac{l_1 d_2 \cdot q(1, 2)}{2} + \frac{l_2 d_2 \cdot q(2, 1)}{2} + \frac{l_2 d_3}{2} + \left\{ \frac{d_2}{2} \left(\frac{|l_1| |l_2| + |l_2| |l_1|}{|l_1| + |l_2|} \right) \right\} = l_i^T e_i' = S_+ - S_- \dots\dots\dots (A \cdot 13)$$

となる。上式において $\{ \}$ の中は l_1 と l_2 が常に異符号であるので恒等的にゼロである。つまり、式 (19) において $S_+ - S_-$ を求めるには、常に $l_i^T e_i$ でよいことになる。したがって、 e_2, e_3 を求める際には、 $l_i^T e_i$ の符号さえわかれば、あとは、機械的に求められる。

参 考 文 献

- 1) Schmit, L.A. and T.P. Kircher : Synthesis of Material and Configuration Selection, Proc. of ASCE, Vol. 88, ST. 3, pp. 79~102, June, 1962.
- 2) Spillers, W.R. and G.E. Kourtouris : Geometric Optimization Using Simple Code Representation, Proc. of ASCE, Vol. 106, ST. 5, pp. 959~971, May, 1980.
- 3) Lipson, S.L. and M.I. Haque : Optimal Design of Arches Using the Complex Method, Proc. of ASCE, Vol. 106, ST. 12, pp. 2509~2525, December, 1980.
- 4) 大久保禎二 : トラス構造物の最適設計法に関する研究, 土木学会論文報告集, 第 177 号, pp. 9~19, 1970 年 5 月.
- 5) 杉本博之 : トラス構造物の実用的最適設計に関する研究, 土木学会論文報告集, 第 208 号, pp. 23~31, 1972 年 12 月.

- 6) 小山 健・長 尚 : 最適設計における計算の効率に関する研究, 土木学会論文報告集, 第 297 号, pp. 1~9, 1980 年 5 月.
- 7) Vanderplaats, G.N. and F. Moses : Automated Design of Trusses for Optimum Geometry, Proc. of ASCE, Vol. 98, ST. 3, pp. 671~690, March, 1972.
- 8) Kirsch, U. and F. Moses : Decomposition in Optimum Structural Design, Proc. of ASCE, Vol. 105, ST. 1, pp. 85~99, January, 1979.
- 9) 奥村敏恵・大久保禎二 : Suboptimization による鋼連続桁の最適設計, 土木学会論文報告集, 第 215 号, pp. 1~14, 1973 年 7 月.
- 10) 前掲 1) pp. 82~99.
- 11) Dobbs, M.W. and L.P. Felton : Optimization of Truss Geometry, Proc. of ASCE, Vol. 95, ST. 10, pp. 2105~2118, October, 1969.
- 12) Pederson, P : Optimal Joint Positions for Space Trusses, Proc. of ASCE, Vol. 99, ST. 12, pp. 2459~2477, December, 1973.
- 13) Saka, M.P. : Shape Optimization of Trusses, Proc. of ASCE, Vol. 106, ST. 5, pp. 1155~1174, May, 1980.
- 14) Imai, K. and L.A. Schmit : Configuration Optimization of Trusses, Proc. of ASCE, Vol. 107, ST. 5, pp. 745~756, May, 1981.
- 15) 中村雄治 : 最適設計・コンピューター使用によるマトリックス構造解析, 日本鋼構造協会講習会テキスト, pp. 132~158, 1968 年 11 月.
- 16) Furuta, H. : Fundamental Study on Geometrical Configuration and Reliability of Framed Structures used for Bridges, Dept. of Civil Eng. Kyoto Univ., pp. 1~90, 1980.
- 17) Romstad, K.M. and C. Wang : Optimum Design of Framed Structures, Proc. of ASCE, Vol. 94, ST. 12, pp. 2817~2845, December, 1968.
- 18) Livesley, R.K. : Matrix Methods of Structural Analysis, Pergamon Press, pp. 117~134, 1969.
- 19) 吉本俊裕・三池亮次 : 接続マトリックスによる剛結を考慮した骨組構造物の最適設計, 熊本大学工学部研究報告, 第 25 巻, 第 2 号, pp. 1~10, 1976 年 7 月.
- 20) 小林一郎・三池亮次 : 接続マトリックスの最適設計への応用—影響線を考慮したトラスの最適設計, 熊本大学工学部研究報告, 第 31 巻, 第 1 号, pp. 1~10, 1982 年 3 月.
- 21) 三池亮次・小林一郎 : 無次元数を用いた最適設計, 土木学会第 33 回年次学術講演会講演概要集, 第 1 部門, pp. 252~253, 1978 年 9 月.
- 22) 道路橋示方書・同解説, I 共通編, II 鋼橋編, 日本道路協会, 1980 年 2 月.
- 23) 工事報告・天草五橋, 日本道路公団, pp. 63~89, 1967 年 5 月.