

トンネル掘削時における変位計測結果の逆解析法*

BACK ANALYSIS OF DISPLACEMENT MEASUREMENTS IN TUNNELLING

桜井 春 輔**・武内 邦 文***

By Shunsuke SAKURAI and Kunifumi TAKEUCHI

1. ま え が き

トンネルなどの地下空洞の設計においては、地山の初期応力および材料特性を求める必要がある。それらの調査法としては、初期応力を求めるためのオーバコアリソ法、AE 法など、材料の変形特性を調査するための平板載荷試験、孔内載荷試験など、さらに、せん断強度を得るための直接せん断試験などがある。これらの調査法によると、地盤の局所的な初期応力あるいは材料特性を求めることができる。しかし、地盤は非均質性であるため、このような局所的な値をそのまま設計に用いることには問題が多い。さらに、材料特性は構造物の大きさおよび形状によっても影響を受けるものであり、それを唯一的に求めることは非常に困難である。このような状況を考えると、綿密な計画のもとに実施された調査によって得た値を用いて設計を行っても、実際に施工した構造物の挙動が、設計において予想したものと異なることは珍しいことではないであろう。これは地山の調査法に問題があるのではなく、地盤工学固有の問題であると考えべきである。したがって、桜井がすでに指摘しているように¹⁾、地盤工学、特にトンネル工学における設計の理念は、荷重および材料特性の両者が明らかな橋梁などの構造物とは本質的に異なるものでなければならないことがわかる。

最近の地盤工学においては、施工中の構造物の挙動を観察（現場計測）し、そこから得られる情報を設計・施工にフィードバックし、当初の設計の妥当性をチェックする方法が取られる場合がある。これは、地山の非均質性を前提とした設計・施工法であり、NATM はその代表的なものであるといえよう。このようなフィードバック

の方法として、桜井は、すでに、現場計測結果を取り入れた地下空洞の設計法²⁾、さらに、施工中に生ずる地山変位の測定結果を利用した直接ひずみ評価法³⁾を提案した。これらの方法は、地山を均質体と考え、巨視的に平均的な初期応力および材料特性を、掘削時の変位計測の結果から、逆解析によって評価し、それを設計・施工にフィードバックさせるものである。その場合重要なことは、計測の結果から、地山の初期応力および材料特性をいかにして、すみやかに、的確に評価するかということである。

本論文においては、現場計測結果の設計・施工への迅速なフィードバックを目的として、トンネル掘削時に行う周辺地山の変位計測の結果から、巨視的に平均的な初期応力および材料特性を求め得る逆解析の一方法を提案する。この方法は、有限要素法と最小二乗法を組み合わせることによって、ばらつきのある変位計測の結果から、直接に、初期応力と弾性定数を求め得る利点がある。

2. 逆解析およびそれに関する従来の研究

一般の構造解析は、荷重および材料の力学定数をインプットデータとして与え、定められた境界条件のもとで応力、ひずみおよび変位をアウトプットとして求めるものであり、一方、逆解析は、応力、ひずみあるいは変位をインプットとして、与えられた境界条件のもとで荷重および材料定数をアウトプットとして求めるものである。

いま、トンネルの掘削において、周辺地山に生ずる変位が測定されるならば、それをインプットデータとし、逆解析によって、地山内の初期応力（構造解析における荷重に相当するもの）および材料定数がアウトプットとして求められる。

このような、一般の構造解析の逆の解析を行う“逆解析問題”（Back analysis problem）は、“同定問題”

* 本報告の一部内容は土木学会第 37 回年次学術講演会において発表した。

** 正会員 Ph.D. 工博 神戸大学教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工修 大林組（元神戸大学大学院工学研究科修士課程学生）

(Identification problem) あるいは“特性化問題”(Characterization problem) ともよばれている注1)。その解析方法は、すでに種々提案されているが、大きく分けて、逆定式化法 (Inverse formulation method) と直接定式化法 (Direct formulation method) に分類できる。

逆定式化法は、初期応力 (荷重) および材料定数を未知数として、通常の構造解析の逆の定式化によって解を得るものである。

Kavanagh らは有限要素法を用いて、この逆定式化法による一解析法を提案し、実験値から得られるひずみ、あるいは変位から、材料定数の決定を試みた⁹⁾。桜井は解析解を用いて、粘弾性地山のトンネル周辺に生ずるクリープ変位の測定結果から、地山の初期応力および粘弾性定数を求める方法を提案した⁷⁾。Kirsten は有限要素法によって得られる影響係数を理論解に取り入れることによって、計測変位から地盤の弾性係数を一意的に求める方法を提案し、例題として、斜面掘削時の逆解析結果を示した⁸⁾。また、Gioda らは測定変位から、土圧およびアースアンカー等に作用する圧力の逆解析に対する有限要素法の定式化を示した⁹⁾。さらに、Jurina ら¹⁰⁾および Cividini ら¹¹⁾は、地盤工学を対象にして Kavanagh の方法を非均質地盤にも適用できるように修正を加えた。しかし、これらの逆定式化法に基づく方法は、いずれも、応力-ひずみ関係が線形の材料に限られる欠点を有している注2)。

一方、直接定式化法は、次に示す誤差関数を最小にするように初期応力や材料定数を求めるものである。

$$\epsilon = \left\{ \sum_{i=1}^n (u_i - u_i^*)^2 \right\}^{1/2} \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 u_i および u_i^* は変位を表わし、それぞれ、計算値および測定値である。 n は測定値の数である。なお、測定値は、ひずみあるいは応力でもよいわけであるが、地盤工学においては、一般に、変位の測定が最も容易である。

この直接定式化法は、逆解析のための特別な定式化を必要とせず、数理計画法における通常の直接探索法 (たとえば、Simplex 法、Rosenbrock 法、Powell 法など) が利用でき、さらに、非線形問題にも適用できる利点を

注 1) Gioda は“逆解析問題”と“同定問題”の違いについて次のような定義を与えている⁹⁾。すなわち、逆解析問題は、通常の構造解析における支配方程式に対して、逆の定式化を行い解を得るものであり、一般に、未知数の数とインプットデータの数とは等しい。一方、同定問題は、その他にさらにある条件を設定し、適当に定めた誤差関数を最小にするよう解を求めるものである。しかし、本論文において、逆解析はこれらすべてを含めたものとして、広い意味で定義する。

注 2) ただし、非線形材料に対して、材料の非線形性が非線形関数の線形結合として表わされる場合には、逆定式化法の適用が可能である⁹⁾。

有している。しかし、繰り返し計算を必要とするため、計算時間に問題がある。

Iding らは、直接定式化法によって、非線形弾性体の材料定数の解析を行っている¹²⁾。また、Cividini らは、この方法を適用し、地盤内に軟弱な層のある場合、その材料定数のみならず、その位置をも求め得ることを示した¹⁴⁾。さらに、Gioda らは水室法によって測定される地山変位から、Mohr-Coulomb 型の弾塑性地山の粘着力、内部摩擦角および初期応力を求める方法を提案した¹⁵⁾。

3. 逆解析の目的と仮定

(1) 目的

トンネル掘削中に行う現場計測の結果は、ただちに設計・施工にフィードバックさせなければならない。すなわち、現場計測によって得られた種々の測定値から当初設計の妥当性を検討し、その結果、測定値が予測値と大きく異なる場合は、当初設計に用いたインプットデータの再評価を行い、解析をやり直すことによって、次の掘削段階に対する設計・施工法をより合理的なものに変更することが可能となる。

フィードバックの具体的な方法として、著者は次の方法を提案する。すなわち、まず、地山変位の測定値から、桜井の提案する直接ひずみ評価法⁹⁾によってトンネル周辺のひずみ分布を求める。そして、もしひずみの最大値が許容ひずみより小さく、設計において予測した値とほぼ等しい場合は、地山の安定は保たれており、施工は安全にかつ、当初の設計どおりに進んでいることがわかる。しかし、測定されたひずみが許容値に近づき、さらにそれを超えるおそれのある場合は、その変位の測定値から、巨視的にとらえた地山の平均的な初期応力および材料定数を逆解析によって求め、それを新たなインプットデータとして解析をやり直し、掘削工法および支保形式をより合理的なものに変更する。この方法は、“直接ひずみ制御法 (DSCT)” と名付けられている⁹⁾。その手順はフローチャートによって図-1 に示す。なお、直接ひずみ評価法において、変位の測定点が少なく、ひずみ分布が十分に求められない場合にも、ここで逆解析された初期応力および材料定数を用いることによって、解析的に、ひずみ分布を求めることができる。

このような目的のために行う逆解析は、現場において測定値が得られるとただちに実施することが望ましく、したがって解析の手法は、マイクロコンピューターなどによって可能な、できるだけ単純なものがよい。本研究は、現場において利用できる地山の初期応力および材料

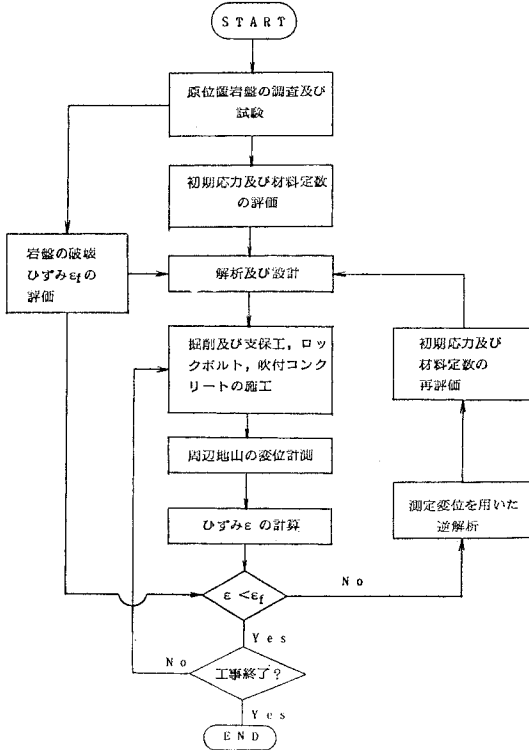


図-1 現場計測結果の設計・施工へのフィードバック（直接ひずみ制御法（DSCCT））

定数を推定する簡易な逆解析法の開発を目的として行ったものである。

(2) 仮定

本論文で提案する逆解析法は逆定式化法に属するものであり，そこで用いる基本的な仮定は次のようなものである。

① 地山は一般に非均質であり，その材料特性が非線形（弾塑性体など）であることはいうまでもない。しかし，ここでの目的が施工管理におけるフィードバックにあるため，地山のモデルとしては簡単なものが望ましい。ここでは，最も簡単なものとして，等質等方の線形な応力-ひずみ関係を仮定する。したがって，逆解析すべき地山の材料定数は2個（弾性係数とポアソン比）となる。しかし，ここで注意しなければならないことは，この仮定は複雑な非線形の応力-ひずみ関係の第一近似として導入するものであり，線形弾性地山のみを対象にしようとするものではない。すなわち，ここで定義する弾性定数は非線形な非弾性挙動をも含めた等価な値として評価されるものである²⁾。

② ここでの逆解析において対象とする地山の初期応力は図-2に示すような巨視的にとらえた値であり，オーバコアリング法などによって得られる局所的な初期応

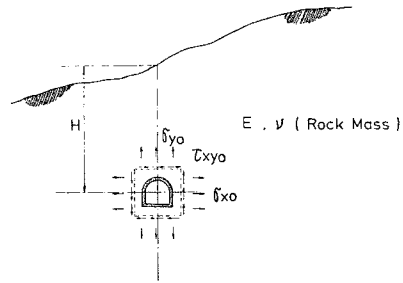


図-2 トンネルに作用する地山の初期応力

力ではない。しかし，土被りが大きくなれば，このような巨視的な値は，実際に作用している初期応力と等しくなると考えられる。いずれにしても，トンネルの解析においては，このような巨視的に平均的な初期応力が重要である。

4. 基礎式の誘導

ここで提案する逆解析法は，有限要素法を用いた逆定式化法に属するものである。

トンネルの掘削問題を有限要素法で解析する場合は，まず，掘削面に作用させる掘削相当外力を求めなければならない。これは，トンネル掘削前の地山に作用している初期応力を用いて次のように与えられる。

$$\{\bar{P}\} = \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV \dots \dots \dots (2)$$

ここで， $\{\bar{P}\}$ ：掘削面上の節点に作用させる掘削相当外力（節点力）

$[B]$ ：節点変位-ひずみ関係マトリックス

$\{\sigma_0\}$ ：地山の初期応力

なお，積分は掘削要素に対する体積積分を表わす。

いま，トンネル掘削前の地山の初期応力は，図-2に示すような巨視的に平均的なものとする。すなわち，

$$\{\sigma_0\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x0} \\ \sigma_{y0} \\ \tau_{xy0} \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (3)$$

ただし，ここでは説明を簡単にするため二次元平面問題とするが，三次元への拡張は容易である。

式(3)を式(2)へ代入すると次式を得る。

$$\{\bar{P}\} = \sigma_{x0} \{\bar{P}_1\} + \sigma_{y0} \{\bar{P}_2\} + \tau_{xy0} \{\bar{P}_3\} \dots \dots \dots (4)$$

ここで， $\{\bar{P}_i\} (i=1\sim 3)$ は初期応力成分 σ_{x0} , σ_{y0} , τ_{xy0} を単位としたときの外力ベクトルの成分を表わす。全解析領域の節点におけるつり合い式は，一般に，次の剛性方程式によって表わされる。

$$\{P\} = [K] \{u\} \dots \dots \dots (5)$$

ここで， $\{P\}$, $\{u\}$ は，それぞれ節点に作用する外力および節点変位である。 $[K]$ は解析領域全体にわたる剛性マトリックスであり，個々の要素に対する剛性マトリ

ックスの和として求められる。

いま、地山を等質等方の弾性体と仮定し、その弾性係数、ポアソン比を、それぞれ E_R, ν_R とする。また、トンネルは覆工されるものとし、その覆工材料の弾性係数およびポアソン比を、それぞれ、 E_l, ν_l とする。この場合、式(4)および式(5)から、次式を得る。

$$\sigma_{x_0}\{P_1\} + \sigma_{y_0}\{P_2\} + \tau_{x_{y_0}}\{P_3\} = (E_R[K_R] + E_l[K_l])\{u\} \dots\dots\dots (6)$$

ここで $\{P_i\} (i=1\sim 3)$ は $\{\bar{P}_i\}$ を解析領域全体に拡張した外力ベクトルの成分であり、掘削面上の節点以外ではすべて0である。また、 $[K_R]$ は $E_R=1$ に対する地山モデルの剛性マトリックス、 $[K_l]$ は $E_l=1$ に対する覆工モデルの剛性マトリックスであり、それぞれポアソン比によって変化する。

いま、次に定義するパラメーター R を導入する。

$$R = E_l/E_R \dots\dots\dots (7)$$

このパラメーターを用いると、式(6)は次のように書ける。

$$\sigma_{x_0}\{P_1\} + \sigma_{y_0}\{P_2\} + \tau_{x_{y_0}}\{P_3\} = E_R[K^*]\{u\} \dots\dots\dots (8)$$

ここで、

$$[K^*] = [K_R] + R[K_l]$$

式(8)の節点変位 $\{u\}$ は、測定変位(既知)と測定されない節点変位(未知)に分けられる。未知の節点変位は、さらに、有限要素モデルの境界(トンネルから十分に離れた位置に設定する)上の節点の変位とモデル内部の節点の変位に分けられる(図-3参照)。したがって、式(8)は次のように表わされる。

$$\sigma_{x_0} \begin{Bmatrix} P_{11} \\ P_{12} \\ P_{13} \end{Bmatrix} + \sigma_{y_0} \begin{Bmatrix} P_{21} \\ P_{22} \\ P_{23} \end{Bmatrix} + \tau_{x_{y_0}} \begin{Bmatrix} P_{31} \\ P_{32} \\ P_{33} \end{Bmatrix} = E_R \begin{bmatrix} K_{11}^* & K_{12}^* & K_{13}^* \\ K_{21}^* & K_{22}^* & K_{23}^* \\ K_{31}^* & K_{32}^* & K_{33}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 $\{u_1\}$ は測定される節点の変位、 $\{u_2\}$ は有限要素モデル内部の測定点以外の節点の変位、 $\{u_3\}$ はモデルの境界上の節点変位である。なお、通常は、

$$\{u_3\} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

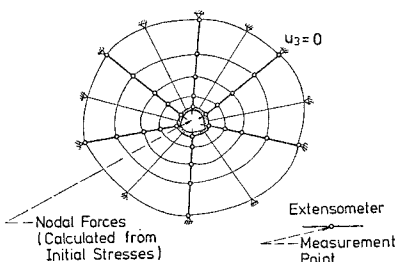


図-3 測定点と有限要素モデルの節点の関係

として差し支えない。

式(9)において、式(10)の条件を考慮し、さらに未知変位 $\{u_3\}$ を消去して整理すると次式を得る。

$$\sigma_{x_0}\{P_a\} + \sigma_{y_0}\{P_b\} + \tau_{x_{y_0}}\{P_c\} = E_R[K_N^*]\{u_1\} \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 $\{P_a\} = \{P_{11}\} - [K_{12}^*][K_{22}^*]^{-1}\{P_{12}\}$

$$\{P_b\} = \{P_{21}\} - [K_{12}^*][K_{22}^*]^{-1}\{P_{22}\}$$

$$\{P_c\} = \{P_{31}\} - [K_{12}^*][K_{22}^*]^{-1}\{P_{32}\}$$

$$[K_N^*] = [K_{11}^*] - [K_{12}^*][K_{22}^*]^{-1}[K_{21}^*]$$

式(11)から次式を得る。

$$\{u_1\} = [A]\{c\} \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 $[A] = [A_1] \{A_2\} \{A_3\}$

$$A_1 = [K_N^*]^{-1}\{P_a\}$$

$$A_2 = [K_N^*]^{-1}\{P_b\}$$

$$A_3 = [K_N^*]^{-1}\{P_c\}$$

$$\{c\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x_0}/E_R \\ \sigma_{y_0}/E_R \\ \tau_{x_{y_0}}/E_R \end{Bmatrix}$$

式(12)において、 $[A]$ は地山および覆工材料のポアソン比およびパラメーター R を与えることによって一意的に定められる。その場合、式(12)は未知量3個($\sigma_{x_0}/E_R, \sigma_{y_0}/E_R, \tau_{x_{y_0}}/E_R$)を含む方程式となり、その数は測定変位の数と等しくなる。

一般には、測定変位の数は、未知量の数より多く取り得るので、未知量 $\{c\}$ は適当な最適化手法によって求めることができる。いま、最小二乗法を用いるなら、式(12)から次式を得る。

$$\{c\} = [[A]^T[A]]^{-1}[A]^T\{u_1\} \dots\dots\dots (13)$$

式(13)によって、測定変位 $\{u_1\}$ から一意的に未知量 $\{c\}$ が求められる。

なお、ここでの測定変位 $\{u_1\}$ は絶対変位である。しかし、一般に、変位の測定値は2点間の相対変位である。したがって、式(13)を相対変位に対する式として表わしておく都合がよい。

ここで、相対変位を用いる場合について述べておく。

まず、2点間の相対変位 $\{du\}$ は、図-4を参照して、次のように、絶対変位と関係づけられる。

$$\{du\} \equiv \begin{Bmatrix} u_2' - u_1' \\ v_2' - v_1' \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\cos \theta & -\sin \theta & \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (14)$$

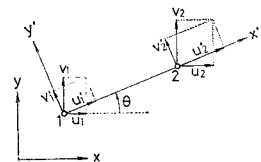


図-4 測定点における変位成分

したがって、内空変位測定、あるいは、地中変位測定に

よって得られる相対変位の測定値 $\{du_i\}$ は、測定点の絶対変位 $\{u_i\}$ と次の関係にある。

$$\{du_i\} = [T]\{u_i\} \dots \dots \dots (15)$$

ここで、 $[T]$ は式 (14) によって求められる変換マトリックスである。

式 (15) に式 (12) を代入すると次式を得る。

$$\{du_i\} = [A^*]\{c\} \dots \dots \dots (16)$$

ここで、

$$[A^*] = [T][A] \dots \dots \dots (17)$$

式(16)に、最小二乗法を適用することにより、式(13)と同様の式によって未知量 $\{c\}$ を求めることができる。

なお、ここで提案した逆解析においては、未知量(初期応力と弾性係数の比)は3個であるため、測定変位は最低3個あればよい。したがって、トンネルの施工管理において一般に行われている三角形の測線を用いる内空変位測定(相対変位測定)の結果から、ただちに未知量を求めることができる¹⁴⁾。その場合、天端の沈下(絶対変位)が同時に測定されるならば、相対変位と絶対変位を組み合わせることにより、さらに信頼度の高い逆解析が可能である。また、地中変位も同時に測定される場合には、それらをも合わせて用いると、さらに信頼度の高い結果が得られることはいうまでもない。

5. 直接逆解析法

本章においては、本論文で提案する“直接逆解析法”の計算手順について説明する。

なお、本解析法においては、地山のポアソン比は仮定する。これは、本来、逆解析によって求めるべき材料定数であるが、ここでは計算を容易にするために既知量とする。しかし、6.(1)で述べるようにその解析結果への影響は小さく、また、工学的な問題を対象にする場合、その概略値の推定は比較的容易である。

(1) 解析手順

a) 素掘りの場合

地山のポアソン比を仮定すると、掘削りトンネルの場合は $R=0$ であるから、式 (12) の $[A]$ は一意的に定まる。したがって、地山の初期応力および弾性係数は、測定変位から、式(13)によってただちに求められる。しかし、式(13)から明らかのように、この場合、初期応力および弾性係数の値は一意的に定まらず、両者の比として求められる。したがって、それぞれの値を求めるためには、これらのうち、いずれか一つを、何らかの方法で推定しなければならない。たとえば、鉛直応力 σ_{y0} が土被り圧、

$$\sigma_{y0} = \gamma H \dots \dots \dots (18)$$

γ : 平均的な単位体積重量

H : 土被り高さ

に等しいと仮定すれば、その他の初期応力成分および弾性係数の値はすべて求められる。

しかし、ここで強調しておきたいことは、逆解析によって得られる初期応力および弾性係数を、次の掘削における地山の変形挙動を予測するための解析のインプットデータとして利用する場合は、あえて、それらの値を求める必要はなく、比のみで十分である。すなわち、素掘りトンネルの変形挙動は、初期応力と弾性係数の比によって、一意的にその解が定まる。

b) 覆工のある場合

トンネルが覆工されている場合は、まず、地山および覆工材料のポアソン比を与えると同時に、地山と覆工の弾性係数の比 R を仮定する。この最初に仮定する R の値は適当でよい。これを R_i とする。

ポアソン比およびパラメーター R が与えられると、式(12)の $[A]$ が計算でき、したがって、式(13)から、初期応力と弾性係数の比 $\{c\}$ が求められる。

いま、初期応力の鉛直成分 σ_{y0} は、式 (18) に示すような土被り圧に等しいと仮定すれば、初期応力のその他

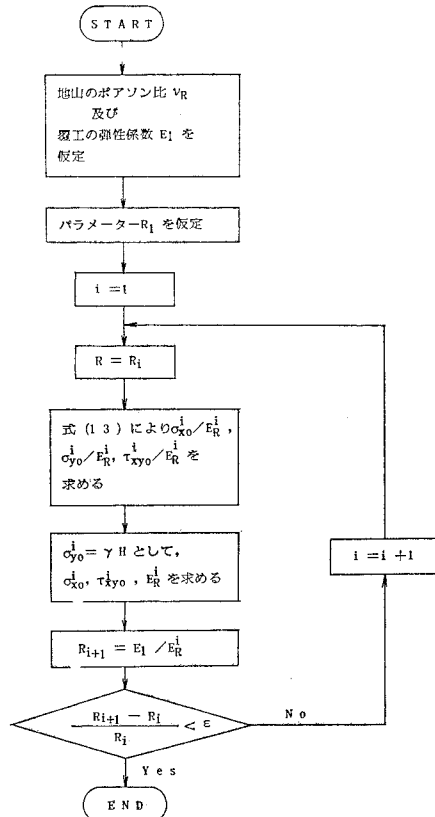


図-5 ここで提案する逆解析法のフローチャート (覆工のある場合)

の成分および地山の弾性係数の値がすべて求められる。ここで、覆工材料の弾性係数 E_i は既知であるから、逆解析された地山の弾性係数 E_R に対して、パラメーター R を計算することができる。これを R_2 とする。いま、この R_2 が最初に仮定した R_1 と比較して差がある場合は、上に述べた計算を、次の関係式が満足するまで繰り返す。

$$\left| \frac{R_{i+1} - R_i}{R_i} \right| < \varepsilon, (i \geq 1) \dots \dots \dots (19)$$

ここで、 ε は許容誤差を表わす。

この計算手順をフローチャートで示すと 図-5 のようになる。

(2) 本解析法の特徴

有限要素法に基づく逆定式化法は Kavanagh により提案されたのが最初である。その後、それを発展させた方法がいくつか発表されている。それらの方法は、いずれも荷重が与えられている場合に、計測されたひずみあるいは変位から材料定数を求めるものである。その定式化は、剛性方程式に基づき、節点におけるつり合い方程式が、最小二乗法によって近似的に満足するようになされている。この方法は繰り返し計算を必要とするが、等質等方の弾性体の弾性定数（弾性係数とポアソン比）のみならず、異方性体の弾性定数をも逆解析できる利点がある。しかし、著者の経験によると、Kavanagh の方法⁹⁾は、計算の安定性および結果の精度に問題があるように思える。すなわち、ばらつきのある測定値から、一意的に解を求めることは非常に困難である。このことから、測定結果にばらつきの多い地盤工学の問題に、この方法を適用することはあまり有利でないことがわかる。

一方、トンネルの解析においては、すでに述べたように、地山の材料定数のみならず、初期応力（構造解析における荷重に相当する）を知る必要がある。したがって、逆解析においても、これら両者を同時に求めることが要求される。さらに、トンネルの解析が、現場計測の結果をすみやかに設計・施工にフィードバックさせるために行われる場合には、逆解析における地山の力学モデルおよびその計算手順はできるだけ単純なものが望ましい。

前節で提案した直接逆解析法は、このようなトンネルの設計・施工に役立てるために開発したものであり、初期応力および弾性係数を同時に逆解析できるのみならず、その計算の安定性ならびに結果の精度は Kavanagh の方法に比較して非常に優れている。なお、本解析法では、地山の力学モデルを最も単純な等質等方性の弾性体と仮定し、さらにポアソン比を与えることとしたため、繰り返し計算を必要とせず（素掘りトンネルの場合）、

一度の計算によって解を得ることができる。

6. 解析結果の精度および収束性の検討

本章においては、直接逆解析法によって得られる結果の精度、および計算の安定性ならびに収束性を計算機による数値シミュレーションによって検討する。シミュレーションに用いる解析モデル（平面ひずみ状態）は 図-6 に示す。ここで、トンネルは馬蹄形で、アーチ部の半径 2 m、覆工はトンネル内壁全周にわたり一様に 20 cm とする。解析モデルの外側境界では、変位をすべて 0 とする。測定点は 図中に白丸で示す 20 か所である。なお、使用する要素は 2 次元 8 節点アイソパラメトリック要素である。

地山の初期応力および弾性定数、および覆工の弾性定数は次のように定める。

初期応力：

$$\sigma_{x_0} = 0.49 \text{ MPa}, \sigma_{y_0} = 1.029 \text{ MPa}, \tau_{xy_0} = 0.196 \text{ MPa}$$

(ただし圧縮を正とする)

地山の弾性定数：

$$E_R = 980 \text{ MPa}, \nu_R = 0.3$$

覆工材料の弾性定数：

$$E_i = 9800 \text{ MPa}, \nu_i = 0.3$$

シミュレーションにおいては、まず、これらの値を用い、掘削によって解放される初期応力と等価な解放節点力を掘削面上の節点に作用させる通常の有限要素解析によって、節点変位を計算する。そして、それにある変動係数を考慮したものを逆解析における“測定変位”とする。

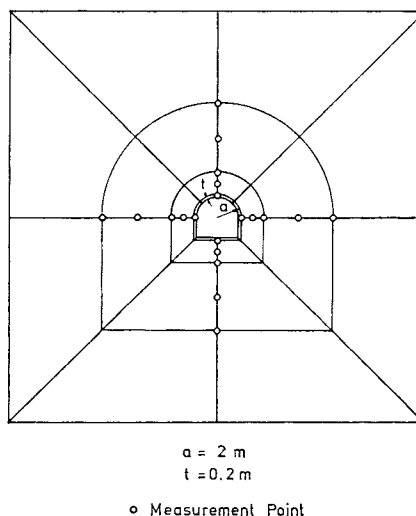


図-6 シミュレーションに用いる解析モデル

(1) 素掘りの場合

いま、図-6の有限要素モデルにおいて、測定節点の変位が、 x, y 軸方向2成分ともに測定されたとする。その他の節点の変位は未知である。実際の測定値は種々の要因によってばらつくため、シミュレーションにおいても、そのばらつきを考慮しなければならない。したがって、ここで、“測定変位”は有限要素解析で得られた節点変位を平均値とし、与えられた変動係数に対してばらついているものとする。このようなばらつきのある“測定変位”から、式(13)によって、初期応力と弾性係数の比を逆解析する場合、得られる結果も、また、ばらつくことになる。いま、“測定変位”のばらつきが互いに独立であると仮定すれば、このばらつきの程度は、式(13)から誤差伝播の法則によって容易に求められる。図-7に、その結果を示す。ただし、ポアソン比は $\nu_R=0.3$ とする。これらの図は、逆解析で得られる結果(モデルの正解値との比で表わす)のばらつきを、“測定変位”の変動係数に対して、確率密度関数によって表わしてある。

これらの結果から、ここで提案した逆解析法は工学的に十分な精度であり、“測定変位”の変動係数が0.5の場合でも、その誤差は高々 $\pm 30\%$ 程度であることがわかる。

なお、参考までに、逆解析によって得られた初期応力および弾性係数をインプットデータとして、通常の有限

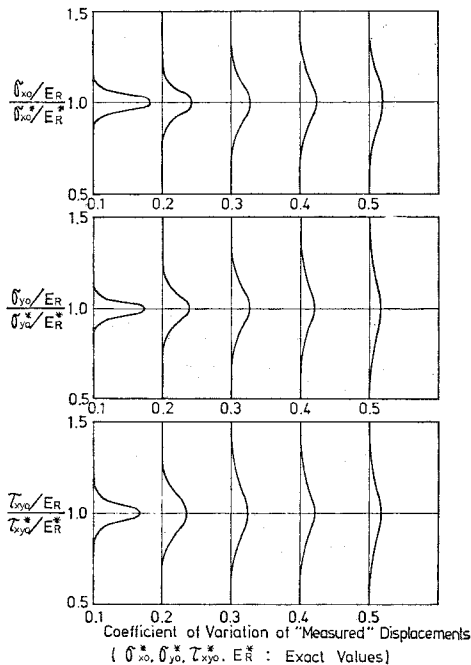


図-7 逆解析の精度と“測定変位”のばらつきの関係

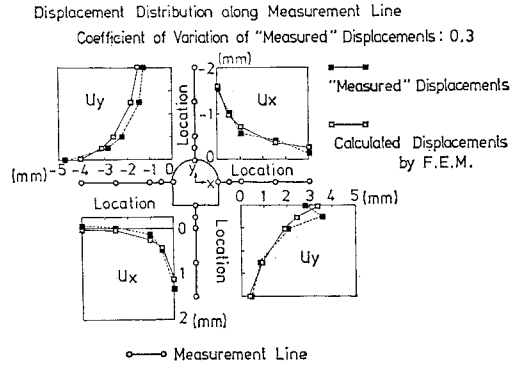


図-8 変位の計算値と“測定変位”の比較(“測定変位”の変動係数0.3の場合)

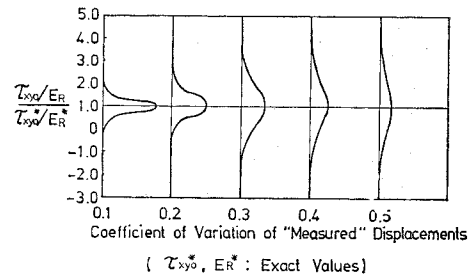
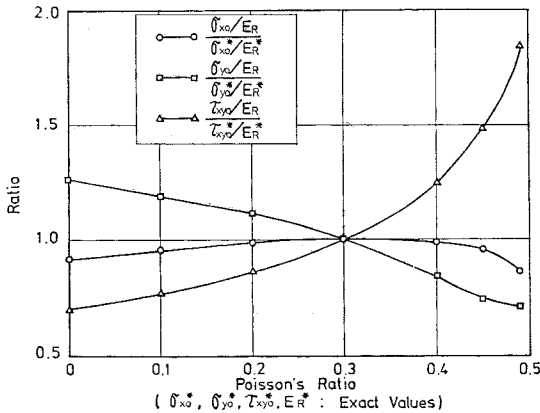


図-9 τ_{xy0}/E_R の精度と“測定変位”のばらつきの関係(トンネル半径方向の変位のみ用いた場合)

要素解析を行い、得られた変位を“測定変位”と比較すると図-8のようになる。ただし、これは変動係数0.3の“測定変位”を用いた場合の一例である。

上に述べたシミュレーションにおいては、測定節点において変位が x, y 軸方向2成分ともに測定されたものとした。しかし、トンネル半径方向1成分のみの変位を用いて逆解析を行うと、 σ_{x0}/E および σ_{y0}/E の精度は図-7と同程度であるにもかかわらず、 τ_{xy0}/E の精度は図-9に示すように非常に悪くなる。この原因は次のように考えられる。すなわち、この場合の測定点の配列は鉛直および水平方向に十字形になっているため、測定変位がトンネル半径方向のみの場合には、地山の巨視的なせん断変形をとらえることが困難となり、そのために、逆解析されるせん断応力成分の精度が低下するものと考えられる。したがって、通常のエクステンソメータによって、トンネル内壁から地中変位を測定する場合は、半径方向の変位のみを測定することになるため、そのときの逆解析には十分注意しなければならないことがわかる。このことは、現場計測における測定点の位置と、測定変位の方向に関しては、最適な組合せが存在することを示している¹⁵⁾。

次に、ポアソン比の影響について検討する。ここで提案した逆解析の方法においては、地山のポアソン比を仮



図一10 逆解析の結果に与えるポアソン比の影響

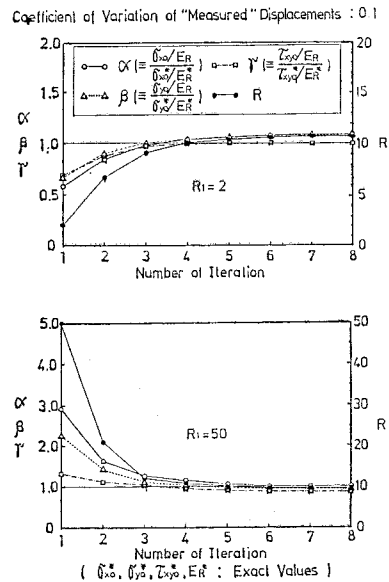
定するため、解析結果に与えるその影響を調べておく必要がある。

シミュレーションモデルの地山のポアソン比は $\nu_R = 0.3$ であるが、これと異なった値を仮定して逆解析を行った結果を図一10に示す。なお、ここでは、“測定変位”は有限要素解析で得られた節点変位をばらつかせることなく、そのままインプットデータとして与えている。この図から、ポアソン比を仮定することによって生ずる誤差は、高々 $\pm 30\%$ 程度である。また、ポアソン比は、一般に、岩質によって定まると考えられるので、その概略値は比較的容易に推定できる。したがって、実際には誤差はもっと小さくなるであろう。

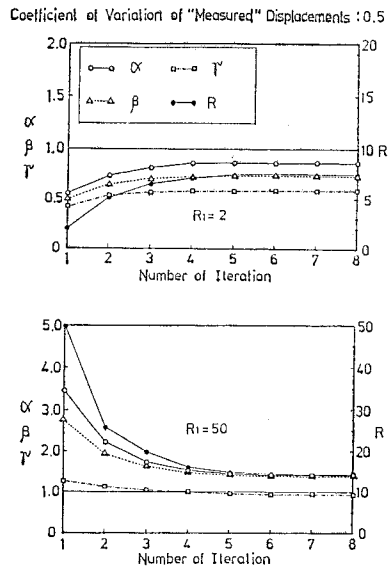
(2) 覆工のある場合

この場合も、図一6のシミュレーションモデルに示す20か所の測定節点において変位が x, y 軸方向2成分ともに測定されたとする。逆解析におけるインプットデータとしての“測定変位”は有限要素解析で得られた節点変位を平均値とし、与えられた変動係数に対する正規乱数によってばらつかせたものを用いる。

この場合の逆解析においては、図一5のフローチャートに示すように、まず、パラメーター $R(=E_I/E_R)$ を仮定し、さらに、初期応力の鉛直応力成分を与えることによって、その他の応力成分および弾性係数の値を求め、繰り返し計算によって解を得なければならない。図一11, 12に結果の一例を示す。これらは、それぞれ、“測定変位”の変動係数0.1および0.5の場合に対する結果である、ただし、パラメーター R の初期値は、 $R_1 = 2$ および $R_1 = 50$ (正解値は $R = 10$) である。これらの図から、逆解析の結果は繰り返し計算によって急速に正解値に近づき、 R の初期値が正解値とかなり異なるにもかかわらず、4回程度の繰り返し計算によって解を得ることがわかる。なお、最終的に残留する誤差は、イン



図一11 繰り返し計算による解の収束の状況 (“測定変位”の変動係数0.1の場合)



図一12 繰り返し計算による解の収束の状況 (“測定変位”の変動係数0.5の場合)

ットデータのばらつきに起因するものであり、素掘りの場合に生ずる誤差と同じ意味を有している。

これらの結果から、本逆解析法の計算の安定性および収束性は非常に優れていることがわかる。

7. むすび

本論文においては、トンネル掘削時に測定される周辺

地山の変位から、地山の初期応力および弾性係数を一意的に求める逆解析の一方法（直接逆解析法と名付ける）を提案した。

トンネルの解析においては、地山の材料定数のみならず、初期応力を知る必要がある。したがって、逆解析においても、この両者を同時に求めなければならない。また、トンネル解析の目的が、現場計測の結果をすみやかに設計・施工にフィードバックさせることにある場合、逆解析における地山の力学モデルおよびその計算手順はできるだけ単純なものがよい。

本論文においては、最も単純な力学モデルである等質等方性の弾性体を仮定し、有限要素法に基づく逆定式化法によって、初期応力および弾性係数を同時に求め得る逆解析の一方法を開発した。なお、ポアソン比は逆解析によって求めるべき地山の材料定数であるが、結果に及ぼす影響が小さいことを考慮して、ここでは、計算手順を簡単にするため、あらかじめ仮定することとした。

本逆解析法によると、素掘りトンネルの場合は繰り返し計算を必要とせず、一度の計算によってただちに解を得る利点がある。そして、計算機による数値シミュレーションの結果から、この方法による解の精度、計算の安定性ならびに収束性は非常に優れていることが確かめられた。また、シミュレーションの結果、測定点の数およびその位置、さらに測定する変位の方向は、結果に大きな影響を与えることが明らかとなった。このことは、これらの間に最適な組合せのあることを示しており、したがって、現場計測において、測定点の数、位置、測定変位の方向等の決定には十分に注意しなければならないことがわかる。

なお、ここで提案した逆解析法のプログラムは、直接逆解析プログラム-Direct Back Analysis Program (DB-AP)-と名付け、すでに実務に供してよい結果を得ている¹⁶⁾

参 考 文 献

- 1) 桜井春輔：計測の意義と実際，'81 トンネル技術講演会テキスト，日本トンネル技術協会，pp. 45~53, 1981.
- 2) Sakurai, S. and S. Abe : A Design Approach to Dimensioning Underground Openings, Proc. 3rd Int. Conf. Numerical Methods in Geomechanics, Aachen, Vol. 2, pp. 649~661, 1979.
- 3) 桜井春輔：トンネル工事における変位計測結果の評価法，

土木学会論文報告集，第 317 号，pp. 93~100, 1982.

- 4) Gioda, G. and L. Jurina : Numerical Identification of Soil-Structure Interaction Pressures, Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech., Vol. 5, pp. 33~56, 1981.
- 5) Kavanagh, K. and R.W. Clough : Finite Element Applications in the Characterization of Elastic Solids, Int. J. Solids Structures, Vol. 7, pp. 11~23, 1971.
- 6) Kavanagh, K. : Experiment versus Analysis : Computational Techniques for the Description of Static Material Response, Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 5, pp. 503~515, 1973.
- 7) Sakurai, S. : Determination of Initial Stresses and Mechanical Properties of Viscoelastic Underground Medium, Proc. 3rd ISRM Cong. Denver, II-B, pp. 1169~1174, 1974.
- 8) Kirsten, H.A.D. : Determination of Rock Mass Elastic Moduli by Back Analysis of Deformation Measurements, Exploration for Rock Engineering, ed. by Z.T. Bieniawski, Balkema, Vol. 1, pp. 165~172, 1976.
- 9) Gioda, G. and L. Jurina : Numerical Identification of Soil-Structure Interaction Pressures, Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech., Vol. 5, No. 1, pp. 33~56, 1981.
- 10) Jurina, L., G. Maier and K. Podolak : On Model Identification Problems in Rock Mechanics, Proc. Int. Symp. on the Geotechnics of Structurally Complex Formations, Capri, Vol. 1, pp. 287~295, 1977.
- 11) Cividini, A., L. Jurina and G. Gioda : Some Aspects of 'Characterization' Problems in Geomechanics, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., Vol. 18, pp. 487~503, 1981.
- 12) Iding, R.H., K.S. Pister and R.L. Taylor : Identification of Nonlinear Elastic Solids by a Finite Element Method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 4, pp. 121~142, 1974.
- 13) Gioda, G. and G. Maier : Direct Search Solution of an Inverse Problem in Elastoplasticity : Identification of Cohesion, Friction Angle and In-Situ Stress by Pressure Tunnel Tests, Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 15, pp. 1823~1848, 1980.
- 14) 谷本篤則・武内邦文・桜井春輔：トンネルの相対変位計測結果の評価法，土木学会関西支部年次学術講演会，III-36, 1983.
- 15) 清水則一・桜井春輔：地下空洞における変位計測の最適位置について，第 15 回岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集，pp. 175~179, 1983.
- 16) Sakurai, S. : Field Measurements for the Design of Washuzan Tunnel in Japan, Proc. of 5th ISRM Cong. Melbourne, 1983.

(1982.10.29・受付)