

# 数値計算による一様等方性乱流中の 沈降性粒子の拡散係数の検討

## NUMERICAL STUDY ON DIFFUSION COEFFICIENT OF SETTLING PARTICLES IN ISOTROPIC HOMOGENEOUS TURBULENCE

上田年比古\*・神野健二\*\*・靱井和朗\*\*\*・前浜光爾\*\*\*\*

By Toshihiko UEDA, Kenji JINNO, Kazurō MOMII and Kōji MAEHAMA

### 1. ま え が き

従来、土木工学の分野では、河川の浮遊砂あるいは沿岸海域の浮遊漂砂などの濃度分布の研究、沈殿池の濁質除去機構さらにまた近年環境問題の一環として貯水池の濁水の澄清化過程の解明などが重要な課題となつて多くの研究が行われている。これらは、主としてせん断乱流の場における沈降性粒子についての問題であり、おもに粒子濃度に関する拡散方程式によって解析が行われている。この場合、式中の粒子の拡散係数には、流体の拡散係数（したがって近似的に流体の渦動粘性係数）を代用したり、あるいはこれに補正の係数を乗じた値を用いている<sup>1)~4)</sup>。しかしこれによって求めた粒子の濃度分布は実測値とかなり相違することがあり<sup>5)</sup>、粒子の拡散係数の値は不明確であることが指摘されている。次にまた粒子の拡散係数を、実測の濃度分布に合うように、拡散方程式から逆算して求めて検討を行っているが<sup>6)</sup>、いまだ粒子の拡散係数についての明確な結論は得られていないようである。

一方、一様乱流中の微細粒子の挙動については、これまで工学上、特に化学工学の分野での重要な課題として数多くの研究が行われている。たとえば J.O. Hinze<sup>7), 8)</sup> は一様乱流中の粒子運動の解析を行い流体と粒子との拡散係数の相違などを究明し、また S. Yuu ら<sup>9)</sup> は空気噴流の乱れへの微細粒子の追従過程などを研究し、乱流運動と粒子運動との関係を検討している。しかしこれらは、非沈降性粒子を対象にしたものである。またこれまではたとえ粒子に沈降性があつてもそのために粒子の拡散係数は変わるものではないとされていた。次に近年

J.L. Lumley<sup>9)</sup> は、一様な水平速度をもつ乱流中に沈降性粒子がある場合、平均的に斜め下に沈降する粒子は、鉛直方向に長い楕円形の分散をすることなどについて若干の解析的説明を行つて、沈降性粒子の拡散係数に異方性があることを指摘している。

以上のことから、本報では、まず一様等方性乱流の場を発生させ、その中にランダムに配置した粒子の運動方程式の数値解を求める、いわゆる乱流中の沈降性粒子の挙動に関する数値実験を行い、粒子の拡散係数を算定し検討を行うことを試みた。これによって従来不明確であつた一様等方性乱流中の沈降性粒子の拡散係数についての検討を行つた。これはまた土木工学の分野で問題とされているせん断乱流中の浮遊砂などの拡散係数に関する一つの基礎的知見を得ようとするものである。なお乱流場は Fourier 級数表現に基づいた S.A. Orszag and G.S. Patterson のスペクトル法<sup>10)</sup>を用いて 3次元一様等方性乱流場を算定し、また粒子の拡散係数は数値実験による方法と新たに提示した近似的方法により求めて検討を加えている。

### 2. 一様等方性乱流の数値計算<sup>10), 11)</sup>

#### (1) 乱流場の基礎式

非圧縮性流体に対する Navier-Stokes 方程式は、渦度  $w = w(x, t)$ 、運動エネルギー  $E = (1/2)u \cdot u$  および  $s = s(x, t) = u \times w$  を用いて次のように表わされる<sup>10)</sup>。

$$\partial u / \partial t - \nu \nabla^2 u = s - \nabla(p / \rho_f + E) \dots \dots \dots (1)$$

また連続の式は、

$$\nabla \cdot u = 0 \dots \dots \dots (2)$$

ここに、 $t$ : 時間、 $\nabla$ : ナブラ、 $x$ : ベクトル座標、 $\nu$ : 動粘性係数、 $\rho_f$ : 流体密度、 $u = u(x, t)$ : 変動速度、 $p = p(x, t)$ : 圧力である。ここで式 (1), (2) の数値計算にスペクトル法を用いることにする。いま一様等方性乱

\* 正会員 工博 九州大学教授 工学部水工土木学科  
\*\* 正会員 工博 九州大学助教授 工学部水工土木学科  
\*\*\* 正会員 農修 九州大学助手 工学部水工土木学科  
\*\*\*\* 正会員 工修 清水建設株式会社

流場で変動速度  $u(x, t)$  が一辺  $l$  の立方体の境界上で周期的境界条件を満足すると仮定すれば、

$$u(x, t) = \sum_{\text{all } k} \hat{u}(k, t) \exp(ik \cdot x) \dots\dots\dots (3)$$

のような Fourier 級数展開が可能となる。ここに、 $I$ ：虚数単位、 $k=2\pi n/l$ ：3次元波数ベクトル、また  $n$  は、 $-\infty < n_i < \infty$  ( $i$  は3次元の軸方向を示し、1, 2, 3の値をとる) の整数ベクトルである。数値計算において整数ベクトル  $n$  は有限個で打ち切らねばならないので、 $n_i$  のとり得る値域を、

$$-N/2 \leq n_i \leq N/2 \dots\dots\dots (4)$$

とする。 $N^3$  は実空間格子点の個数に対応する。連続の式(2)を考慮し式(1)の2回の curl をとると波数空間において次式を得る。

$$d\hat{u}/dt + \nu k^2 \hat{u} = \hat{\tau} \dots\dots\dots (5)$$

$$\hat{\tau} = -k^{-2} \{k \times (k \times \hat{s})\} \dots\dots\dots (6)$$

また波数空間における連続の式は、

$$k \cdot \hat{u} = 0 \dots\dots\dots (7)$$

である。ここに、 $\hat{s} = \hat{s}(k, t)$  は  $s(x, t)$  の Fourier 変換であり、渦度  $w(x, t)$  は  $\hat{w} = Ik \times \hat{u}$  の Fourier 逆変換として求められる。

(2) 乱流場の数値計算

式(5)の左辺第2項の粘性項の  $\hat{u}$  に  $\hat{u}(k, t + \Delta t)$  を用いれば、波数空間における Fourier 成分  $\hat{u}(k, t + \Delta t)$  を求める有限差分形は、 $\Delta t$  を差分時間間隔とすれば、

$$\hat{u}(k, t + \Delta t) = \{\hat{u}(k, t) + \Delta t \hat{\tau}(k, t)\} / (1 + \nu k^2 \Delta t) \dots\dots\dots (8)$$

この差分計算にあたって、まず初期乱れの場合の Fourier 成分  $\hat{u}(k, 0)$  を次の4つの性質を満足するように正規乱数を用いて発生させる<sup>12)</sup>。

(i) 式(3)において  $u(x, 0)$  は実数であり、 $\hat{u}(k, 0)$  は複素数であることから得られる共役条件

$$\hat{u}(k, 0) = \hat{u}^*(-k, 0) \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 $*$  は共役複素数を示す。

(ii) 連続の式(7)

(iii) 異なる波数において

$$\overline{\hat{u}_i(k, 0) \hat{u}_j(k', 0)} = 0 \quad k \neq -k' \dots\dots\dots (10)$$

ここに、添字  $i$  および  $j$  は3次元の軸方向を示し1, 2, 3の値をとる。また上付きバーは ensemble 平均を示す(以後も同じ意味とする)。

(iv)  $\hat{u}_i(k, 0)$  と  $\hat{u}_j(-k, 0)$  の積の ensemble 平均は、初期エネルギースペクトル  $\hat{E}(k, 0)$  を用いて

$$\overline{\hat{u}_i(k, 0) \hat{u}_j(-k, 0)} = 2\pi^2 \{\hat{E}(k, 0)/k^2\} P_{ij}(k) \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 $k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$ 、 $P_{ij}(k) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ 、 $\delta_{ij}$ ：Kronecker のデルタ ( $i=j: 1, i \neq j: 0$ ) を示す。

なお式(11)の  $\hat{E}(k, 0)$  には次の値を与えた。すな

わち数値計算を行う波数領域内の低波数領域と高波数領域ではエネルギーが十分減衰していることが必要であることから、U. Schumannら<sup>10)</sup>に従って減衰終期における熱伝導型エネルギー スペクトル方程式の解と類似な  $\hat{E}(k, 0) = Ak^4 \exp(-Bk^2)$  の形を仮定し、この式の定数  $A, B$  を、時刻  $t=0$  における一様等方性乱流の乱れ強度の2乗  $\overline{u^2(0)}$  が  $\overline{u^2(0)} = (2/3) \int_0^\infty \hat{E}(k, 0) dk$  となることおよびエネルギーが最大となる波数を  $k_{\text{peak}}$  とおくことにより求めれば、

$$\hat{E}(k, 0) = 16 \sqrt{2/\pi} \overline{u^2(0)} k_{\text{peak}}^{-5} k^4 \cdot \exp\{-2(k/k_{\text{peak}})^2\} \dots\dots\dots (12)$$

となる。以上の4条件により決定される  $\hat{u}(k, 0)$  を初期条件として、式(8)の差分計算を行う。

本報で数値計算を行った乱流場は、一辺の長さ  $l=2.0$  cm の立方体の実空間を計算領域とし、全格子点数  $N^3 = 32 \times 32 \times 32 = 32768$ 、格子間隔約 0.6 mm とした。また  $\nu = 0.013 \text{ cm}^2/\text{s}$ 、 $k_{\text{peak}} = 4.775 \pi \text{ cm}^{-1}$ 、 $\Delta t = 0.005 \text{ s}$ 、 $\overline{u^2(0)} = 0.4225 \text{ cm}^2/\text{s}^2$  とし、波数空間から実空間への変換およびその逆の変換は、高速 Fourier 変換 (FFT) を用いて行った。

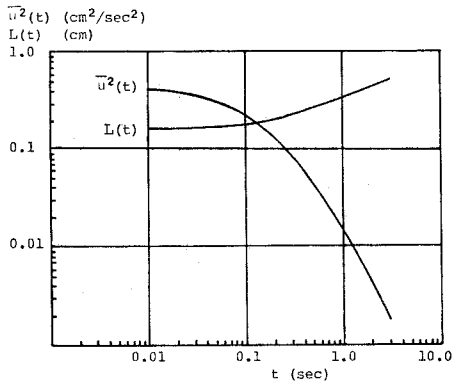
本報で用いたスペクトル法は、実空間における乱流運動を記述する方程式を Fourier 変換して数値解を得るシミュレーション法で、波数空間での有限差分計算に伴う誤差や高波数での打ち切り誤差を避けることはできないが、① 実空間における速度ベクトル  $u(x, t)$  の位置ベクトル  $x$  についての微分項が、波数空間においては波数ベクトル  $k$  についての代数計算になり微分項の離散化誤差が防げること、② Fourier 変換およびその逆変換を高速 Fourier 変換で行うため数値計算時間を大幅に短縮できることなどの利点をもちその有用性は高い<sup>12)</sup> と考えられる。

(3) 乱流場の数値計算結果と考察

以上により模擬発生させた乱流場の初期場の諸特性量は表-1のようになり、初期乱れ強度の2乗は各方向にほぼ等しい値となっていて、ミクロスケール  $\lambda$  に基づく初期場の Reynolds 数は、 $Re_\lambda = \sqrt{\overline{u^2(0)}} \lambda / \nu = 6.5$  である。また数値シミュレーションの結果を用いてエネルギー スペクトル、伝達スペクトルおよびミクロスケールなどの時間的変化および連続条件などの検討を行った結果、本報で採用した  $N$  および  $\Delta t$  でほぼ妥当な一様等

表-1 初期場の諸特性量

乱れ強度 $\sqrt{\overline{u^2(0)}}$ (cm/s)	各方向の乱れ強度 (cm/s)			ミク ロ スケ ル $\lambda(0)$ (cm)	滴の平均径 $L(0)$ (cm)
	x 方向	y 方向	z 方向		
0.643	0.636	0.654	0.638	0.132	0.165



図一 流体の乱れ強度および積分特性距離の時間的变化

方性乱流場が得られていることを確認した。この詳細は文献 11) に述べている。

数値計算の結果得られた流体場の乱れ強度の2乗  $\overline{u^2}(t)$  および渦の平均径  $L(t)$  の時間的变化を 図一1 に示している。渦の平均径はエネルギースペクトル  $\hat{E}(k, t)$  を用いて次式により計算した。

$$L(t) = \left\{ \pi/2 \overline{u^2}(t) \right\} \int_0^\infty \hat{E}(k, t) k^{-1} dk \dots\dots\dots (13)$$

図一1 によると、渦の平均径は乱れ強度が時間的に減衰する過程で、格子間隔 (約 0.6 mm) の3倍程度から10倍程度のスケールまで増加していることがわかる。

なお、ここで得られた乱流場は、貯水池、沈殿池などの水域の清澄化過程のある時期およびある場所において実際に存在する乱れと考えられ、ここで得られた乱流場で沈降性粒子の拡散係数の特性の把握は十分可能と考える。なお前述の計算の始めに与える  $\overline{u^2}(0)$  をさらに大きくとって、図一1 の値以上の乱れ強度をもつ乱流場の発生を試みたが、計算結果の精度の低下さらに解の発散をきたし乱流場の算定ができなかったことを付記する。

### 3. 乱流中の粒子の拡散係数の数値実験による算定

#### (1) 粒子運動の数値計算

3次元一様等方性乱流中における単一球形粒子の運動方程式として J.O. Hinze が提示している式<sup>6)</sup>を参考にして次式を用いることにする。

$$dv_{p,i}/dt = a(v_{f,i} - v_{p,i}) + b dv_{f,i}/dt + c \delta_{i3} \dots\dots\dots (14)$$

ここで、

$$a = \frac{18\nu}{(\rho_p/\rho_f + 1/2)d^2}, \quad b = \frac{3/2}{\rho_p/\rho_f + 1/2},$$

$$c = \frac{g_r(\rho_p/\rho_f - 1)}{\rho_p/\rho_f + 1/2} \dots\dots\dots (15)$$

上式で、座標方向を示す添字  $i$  は、 $i=1, 2$  を水平面内の直交軸  $x, y$  とし、 $i=3$  を鉛直下向きを+とする  $z$  軸とし、以後も同様とする。また  $v_{p,i}$ : 粒子速度、 $v_{f,i}$ : 流体速度、 $\rho_p$ : 粒子密度、 $\rho_f$ : 流体密度、 $d$ : 粒径、 $\nu$ : 動粘性係数、 $g_r$ : 重力加速度、 $\delta_{i3}$ :  $i=3$  のときのみ1となる Kronecker のデルタとする。式 (14) の右辺の各項は、単位質量の粒子に働く力を示し、その第1項は、粒子と流体の相対速度による抵抗力でここでは、粒子とその近傍の流体との速度差を用いて計算される Reynolds 数は小さいと仮定して Stokes 則を用いている。第2項は流体の圧力勾配と仮想質量力から得られる項、第3項は重力に基づく項 (重力から浮力を差し引いた値) である。なおこの式では、J.O. Hinze の提示した式中の Basset 項については、林ら<sup>14)</sup>の研究を参考にして無視し得ると仮定して除いている。

さて前章で得られた一辺  $l$  の立方体領域の一様等方性乱流中にランダムに配置された粒子の運動を式 (14) の数値積分により求めよう。初期条件として ensemble 個数 500 個の粒子  $A$  の初期位置  $X(A, 0)$  を、各方向ごとに一様乱数を用いて与え、この 500 個の異なる初期位置での各粒子の初速度  $v_{p,i}[X(A, 0), 0]$  をその位置での流体速度  $v_{f,i}[X(A, 0), 0]$  に等しいとき<sup>15)</sup>、 $v_{f,i}[X(A, 0), 0]$  は前章の数値計算により得られた一様等方性乱流場の速度  $u_i(x, t)$  の3次元線形補間により求めた。以上の初期条件から式 (14) を前進差分計算しおのおの粒子を追跡した。この場合、粒子の運動方程式の差分時間間隔  $\Delta t$  は、流体場の数値計算の場合と同一の 0.005 s とした。式 (14) の差分計算の際に必要な粒子の移動位置  $X(A, t)$  における流体速度  $v_{f,i}[X(A, t), t]$  は、上述と同様に前章で得られた流体速度  $u_i(x, t)$  の3次元線形補間値を用いた。またここで用いた粒子運動算定の乱流場は、前述の一辺  $l$  の立方体乱流領域が連続して無限に存在するものと考え、粒子がこの立方体領域の境界を横切って移動しても同様な乱流場が存在するとして、引き続き粒子の運動を追跡していった。なお数値計算には、表一2 に示す比重 2.65 の3種類の粒径の粒子を用いた。この粒径の範囲は細砂に属し、貯水池あるいは沿岸海域<sup>2)</sup>の懸濁物質として普通みうけられるものである。

次に本計算で用いた流体の初期乱れ強度は 図一1、表一1 に示すように小さい値のため、流体と粒子の速度差

表一2 数値実験に用いた粒子

比重	粒径 $d$ (cm)	終末沈降速度 $\omega_0$ (cm/s)	Reynolds 数 $\omega_0 d/\nu$	係数 $a$ の逆数* $1/a$ (s)
2.65	0.015	1.56	1.79	$3.0 \times 10^{-3}$
"	0.020	2.76	4.25	$5.4 \times 10^{-3}$
"	0.025	4.32	8.31	$8.4 \times 10^{-3}$

\* J.J. Riley らが与えたなじみ時間

による Reynolds 数もただか表-2 に示す  $\omega_0$  による Reynolds 数程度と考えられ, Stokes 則がほぼ成立する範囲と考えてよさそう。

(2) 粒子の拡散係数の数値実験による算定

上述の粒子運動の数値計算結果を用いて粒子の拡散係数を算定しよう。

いま  $Y_i(t)$  を, 時刻  $t$  におけるおのおのの粒子の移動位置  $X_i(A, t)$  と 500 個の粒子の平均移動位置  $\overline{X_i(A, t)}$  との差

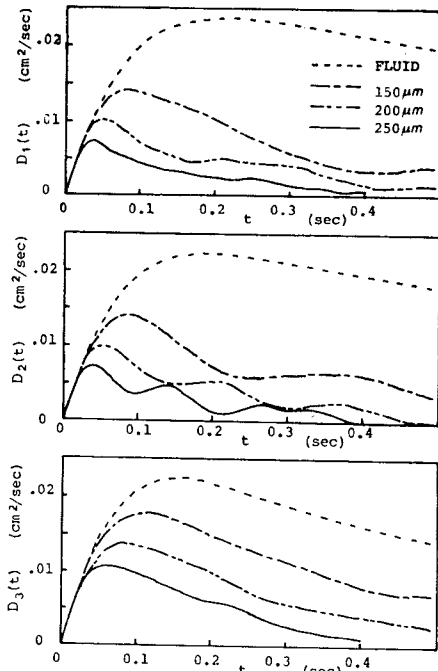
$$Y_i(t) = X_i(A, t) - \overline{X_i(A, t)}$$

とすれば粒子の拡散係数  $D_i(t)$  は次式により計算される。

$$D_i(t) = (1/2) d\overline{Y_i^2(t)} / dt \dots\dots\dots (16)$$

図-2 に 500 個の粒子の ensemble 個数を用い式 (16) から算定した方向別, 粒径別の粒子の拡散係数  $D_i(t)$  を示している。また比較のため一様等方性乱流場の 500 個の流体粒子を追跡し式 (16) から計算される流体の拡散係数を点線で示している。この図で粒子の拡散係数の時間変化が波うっているが, これは粒子の個数を増やすか, あるいは, 粒子の初期位置をあらためて, 乱数により発生させて同様な計算を行い, これらの数多くの結果の平均をとれば, 平滑化されるものと考えられる。

図-2 より粒子および流体とも拡散係数は始め時間とともに増加して, 最大値に達し, その後徐々に減少して



$D_1, D_2$ : 水平面内の直交軸方向,  $D_3$ : 鉛直軸方向  
 図-2 流体と粒子の拡散係数の時間変化

いくことがわかる。この減少は, 図-1 に示すように流体場の乱れ強度が時間とともに減衰しているためであり, このことは, 十分大きい拡散時間後には拡散係数は一定となる一般の定常乱流場における拡散係数の時間的な変化とは異なっている。なお, 流体についての拡散係数は各方向についてほぼ同じ値が得られていて, これは一様等方性乱流であることから肯定できる算定結果といえよう。次に粒子の拡散係数は, 方向によりその大きさが相違し,  $D_3$  が  $D_1, D_2$  に比べて大きな値を示していることがわかる。

4. 乱流中の粒子の拡散係数の速度相関による解

ここでは上述の数値実験から得られた沈降性粒子の拡散係数の異方性について, さらに検討するために, 粒子の拡散係数の算定をできるだけ理論的側面から行ってみよう。

いま粒子  $A$  が, 時刻  $t$  に  $X(A, t)$  の位置にいたとして, その位置での粒子  $A$  の  $i$  方向の変動速度  $v_{p,i}'[X(A, t), t]$  を  $v_{p,i}'(t)$  と記すことにし, またその位置での流体の  $i$  方向の変動速度  $v_{f,i}'[X(A, t), t]$  を  $v_{f,i}'(t)$  と記すことにする。次にこの粒子が  $\tau$  時間後に  $X(A, t+\tau)$  の位置に移動したとして, その位置での粒子  $A$  の  $i$  方向の変動速度  $v_{p,i}'[X(A, t+\tau), t+\tau]$  を  $v_{p,i}'(t+\tau)$  と記し, その位置での流体の  $i$  方向の変動速度を  $v_{f,i}'(t+\tau)$  と記すことにすれば, これら 4 つの変動速度に関する相関関数には次の 4 つが考えられる。

$$R_{ff,i}(t, \tau) = \overline{v_{f,i}'(t)v_{f,i}'(t+\tau)} \dots\dots\dots (17)$$

$$R_{fp,i}(t, \tau) = \overline{v_{f,i}'(t)v_{p,i}'(t+\tau)} \dots\dots\dots (18)$$

$$R_{pf,i}(t, \tau) = \overline{v_{p,i}'(t)v_{f,i}'(t+\tau)} \dots\dots\dots (19)$$

$$R_{pp,i}(t, \tau) = \overline{v_{p,i}'(t)v_{p,i}'(t+\tau)} \dots\dots\dots (20)$$

なお式 (20) は, 粒子の Lagrange 速度相関関数であり, これを用いれば粒子の拡散係数  $D_i(t)$  は次式で表わされる。

$$D_i(t) = \int_0^t R_{pp,i}(t, \tau) d\tau \dots\dots\dots (21)$$

ここでは, 流体の空間的相関関数から  $R_{ff,i}(t, \tau)$  を求める近似式を提示し, 次いで  $R_{ff,i}(t, \tau)$  から  $R_{pp,i}(t, \tau)$  を求める速度相関についての関係式を誘導し, 式 (21) より粒子の拡散係数  $D_i(t)$  を求めることを試みよう。

図-3 は, 粒子  $A$  が時刻  $t$  にいた位置  $X(A, t)$  (図の  $X_1$ ) における流体の変動速度の時間変化と, 粒子  $A$  がそれから  $\tau$  時間後に移動した位置  $X(A, t+\tau)$  (図の  $X_2$ ) における流体の変動速度の時間変化を示している。 $P_1$  点は粒子  $A$  の時刻  $t$  での時空間位置,  $Q_2$  点は粒子

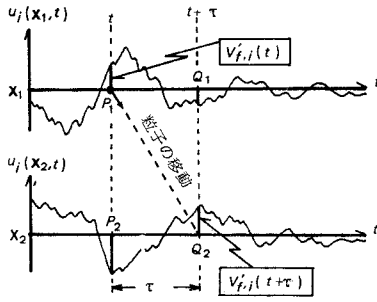


図-3 流体の速度相関の説明図

A の時刻  $t+\tau$  での時空間位置であり、したがって図示のように  $P_1$  点、 $Q_2$  点の流体の変動速度はそれぞれ前述の  $v_{f,i}'(t)$ ,  $v_{f,i}'(t+\tau)$  となる。いま粒子の平均移動速度は、ensemble 平均的にみて鉛直方向に終末沈降速度  $\omega_0$  と考えられる。したがって 図-3 において粒子の  $\tau$  時間後の平均移動距離  $\bar{X}(A, t+\tau) - \bar{X}(A, t)$  は、鉛直方向に  $\omega_0\tau$  となる。いま式 (17) の  $R_{ff,i}(t, \tau)$  について考えよう。図-3 で時刻  $t$  を固定し鉛直方向に距離  $r = \omega_0\tau$  だけ離れた 2 点,  $P_1, P_2$  の流体の変動速度の空間的相関関数  $R_i(t, r)$  は、横相関係数を  $g(t, r)$ , 縦相関係数を  $f(t, r)$ , 乱れ強度の 2 乗を  $\bar{u}^2(t)$  とすれば、次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} R_1(t, r) &= R_2(t, r) = \bar{u}^2(t) g(t, r) \\ R_3(t, r) &= \bar{u}^2(t) f(t, r) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

ここで、 $\bar{u}^2(t)$ ,  $g(t, r)$ ,  $f(t, r)$  はともに時間的に変化し、図-3 で時刻  $t+\tau$  における  $Q_1, Q_2$  点の流体の変動速度の空間的相関関数は、 $P_1, P_2$  点のそれとは異なり、式 (22) で  $t=t+\tau$  として与えられる。

また数値計算による乱流場について各時間  $t$  ごとに算定された  $R_{1,2}(t, r)$ ,  $R_3(t, r)$  を 図-4 に示している。周知のように  $r > 0$  で  $f(t, r) > g(t, r)$  であることから、各時間について相関  $R_3(t, r)$  が、相関  $R_1(t, r)$ ,  $R_2(t, r)$  より長い正の相関をもつこと (たとえば 図-4 の a と a' 線との比較)、および  $\bar{u}^2(t)$  は 図-1 のように時間的に減少するので、相関関数は時間的に減少している (たとえば a, b, c 線の比較)。

さて本報では、いま求めようとする  $P_1$  と  $Q_2$  点の流体の変動速度  $v_{f,i}'$  の相関  $R_{ff,i}(t, \tau)$  を、近似的に、時刻  $t$  と  $t+\tau$  におけるそれぞれの空間的相関関数  $R_i(t, r)$  と  $R_i(t+\tau, r)$  の平均値として与えることにして、式 (17) に示される  $R_{ff,i}(t, \tau)$  を次のように近似する。

$$\left. \begin{aligned} R_{ff,i}(t, \tau) &\approx (1/2) \{R_i(t, r) + R_i(t+\tau, r)\} \\ &= (1/2) \{ \bar{u}^2(t) g(t, \omega_0\tau) \\ &\quad + \bar{u}^2(t+\tau) g(t+\tau, \omega_0\tau) \} \\ &\hspace{15em} (i=1, 2) \\ R_{ff,3}(t, \tau) &\approx (1/2) \{R_3(t, r) + R_3(t+\tau, r)\} \\ &= (1/2) \{ \bar{u}^2(t) f(t, \omega_0\tau) \\ &\quad + \bar{u}^2(t+\tau) f(t+\tau, \omega_0\tau) \} \\ &\dots\dots\dots (23) \end{aligned} \right\}$$

式 (23) の右辺の各項は、流体の乱れがわかっているば求められる値で、たとえば 図-4 が与えられていればこれから  $R_i(t, r)$  は  $\tau$ , したがって  $r (= \omega_0\tau)$  と  $t$  から求められる。

図-5 に、このようにして得られた式 (23) による値と数値実験による変動速度から直接求めた 図-3 の  $P_1, Q_2$  点間の相関を示している。これによると両者はほぼよい一致を示している。以上によって本報の粒径粒子の範囲では、相関  $R_{ff,i}(t, \tau)$  は流体の乱れに関する空間的相関関数  $R_i(t, r)$ , したがって乱れ強度と横および縦の相関係数を用いて近似的に求めることができる。

次に  $R_{ff,i}(t, \tau)$  から  $R_{pp,i}(t, \tau)$  を求める関係式を誘導しよう。式 (14) の粒子の速度  $v_p$  を沈降速度と変動速度  $v_p'$  との和として表わし、式 (14) を整理すると粒子の変動速度に関する運動方程式は、

$$dv_{p,i}'(t)/dt = a [v_{f,i}'(t) - v_{p,i}'(t)] + b dv_{f,i}'(t)/dt \dots\dots\dots (24)$$

となる。

さて式 (24) は時刻  $t' = t - \tau$  のときにも成立するので

$$dv_{p,i}'(t')/dt' = a [v_{f,i}'(t') - v_{p,i}'(t')] + b dv_{f,i}'(t')/dt' \dots\dots\dots (25)$$

両辺に  $v_{f,i}'(t)$  をかけて ensemble 平均をとれば

$$\overline{v_{f,i}'(t) dv_{p,i}'(t')/dt'} = a \overline{v_{f,i}'(t) v_{f,i}'(t')}$$

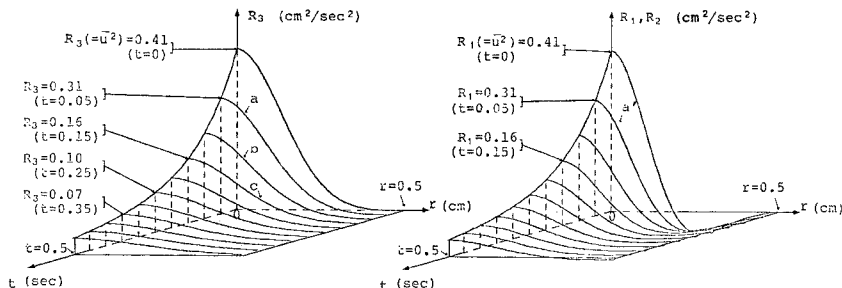


図-4 流体の空間的速度相関関数の時間的変化

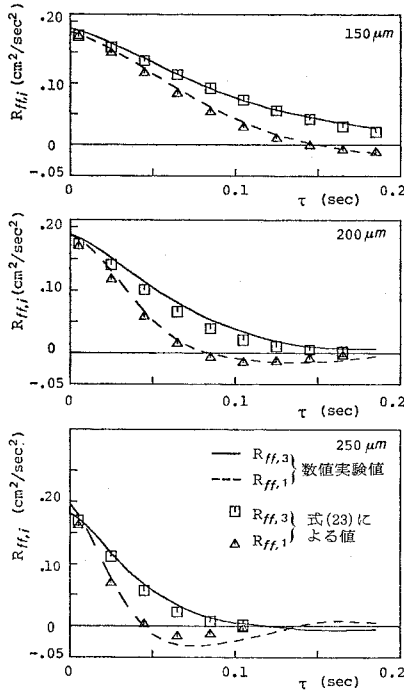


図-5 粒子の移動位置における流体速度の相関関数 ( $t=0.1s$ )

$$-v_{f,i}'(t)v_{p,i}'(t')] + bv_{f,i}'(t)d v_{f,i}'(t')/dt' \dots\dots\dots(26)$$

時刻  $t$  を固定し、微分演算  $d/dt'$  を  $-\partial/\partial\tau$  に置き換え、さらに式 (17) と式 (18) を用いれば、式 (26) は次式となる。

$$\begin{aligned} \partial R_{ff,i}(t, -\tau)/\partial\tau &= -a [R_{ff,i}(t, -\tau) \\ &- R_{ff,i}(t, -\tau)] + b\partial R_{ff,i}(t, -\tau)/\partial\tau \dots\dots\dots(27) \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} R_{ff,i}(t, -\tau) &= \overline{v_{f,i}'(t)v_{f,i}'(t-\tau)} \\ &= \overline{v_{f,i}'(t-\tau)v_{f,i}'(t)} \\ &= R_{ff,i}(t-\tau, \tau) \dots\dots\dots(28) \end{aligned}$$

ここに  $R_{ff,i}(t-\tau, \tau)$  は、式 (23) で  $t=t-\tau$  として、 $R_{ff,i}(t, \tau)$  と同様に、流体の乱れ強度と速度相関係数から求められる。

次に式 (24) は時刻  $t'=t+\tau$  のときにも成立するので前述と同様にして、両辺に  $v_{p,i}'(t)$  をかけて ensemble 平均をとり整理すると次式となる。

$$\begin{aligned} \partial R_{pp,i}(t, \tau)/\partial\tau &= a [R_{pp,i}(t, \tau) - R_{pp,i}(t, \tau)] \\ &+ b\partial R_{pp,i}(t, \tau)/\partial\tau \dots\dots\dots(29) \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} R_{pp,i}(t, \tau) &= \overline{v_{p,i}'(t)v_{p,i}'(t+\tau)} \\ &= \overline{v_{p,i}'(t+\tau)v_{p,i}'(t)} \\ &= R_{pp,i}(t+\tau, -\tau) \dots\dots\dots(30) \end{aligned}$$

ここに  $R_{pp,i}(t+\tau, -\tau)$  は式 (27)、式 (28) で  $t=t+\tau$  として前述と同様にして求められる。

以上によって、粒子の Lagrange 速度相関  $R_{pp,i}(t, \tau)$  を求めることができる。

なお式 (27) と式 (29) の差分分解の算定に必要な相関  $R_{fp,i}(t, 0)$  および  $R_{pp,i}(t, 0)$  には、粒子の運動方程式 (14) の数値積分によって得られる粒子の変動速度の積の ensemble 平均値  $\overline{v_{f,i}'(t)v_{p,i}'(t)}$  および  $\overline{v_{p,i}'(t)v_{p,i}'(t)}$  を与えた。図-6 に時刻  $t=0.1s$ 、各粒径について得られる  $R_{pp,i}(t, \tau)$  の本解法による値と数値実験による値とを示している。両者は比較的良好一致しているといえよう。

次にここで得られた  $R_{pp,i}(t, \tau)$  を用いて式 (21) の数値積分を行えば、粒子の拡散係数を算定することができる。いま粒径  $250 \mu m$  の粒子について算定した結果を図-7 の各点に示している。なお図-7 には比較のため

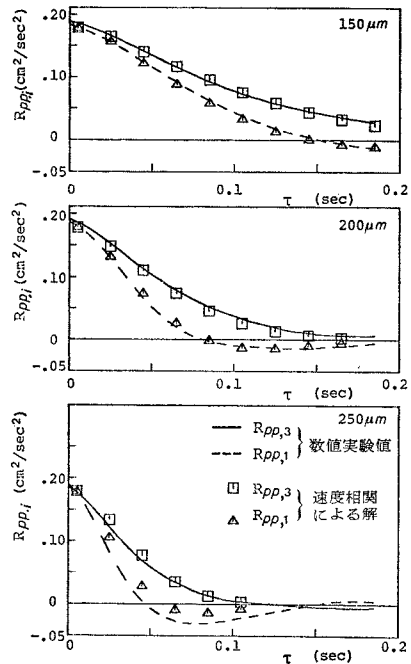


図-6 粒子の Lagrange 速度相関関数 ( $t=0.1s$ )

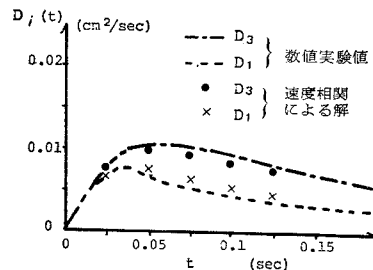


図-7 粒径  $250 \mu m$  の粒子の拡散係数

数値実験から直接求めた 図-2 の粒径 250 μm の拡散係数  $D_1(t)$  を曲線で示している。両者はほぼよい一致を示している。

さて本章で述べた粒子の拡散係数の解析法は、流体の乱れ強度と速度相関係数  $[f(t, r), g(t, r)]$  および流体と粒子に関する物理量 (式 (27), (29) の  $a, b$  に含まれる) さえ与えられれば、式 (23), (27), (29), (21) を経て拡散係数が得られるもので、ここで新たに誘導した式 (27) と式 (29) の速度相関関数に関する微分方程式は簡単な式形で、その数値解は容易に求められるので、前章の粒子の移動位置の追跡から算定する数値実験による法に比べ、その計算はかなり簡易化されると考えられる。また 3. による算定結果は、あくまである一つの数値実験結果であり、したがって前述したように 図-2 の粒子の拡散係数の曲線が波うって算定されることも起こり得ると考えられる。これに反し本解析法は乱れの場の統計的性質をもとに理論的に導いたもので、算定結果は普遍性をもつものと考えられる。また本解析法の誘導過程は流体の乱れの特性が沈降性粒子の乱流拡散に与える効果についての考察に役立つものと考えられ、たとえば 次章 5. (2) でもこれを利用している。

5. 沈降性粒子の拡散係数についての考察

数値実験から直接求めた拡散係数を示す 図-2 および 図-7 より次の2つの特徴的なことがわかる。すなわち、

(i) 本報で用いた粒径の範囲では、粒子の拡散係数は、粒径の減少とともに増大し、流体の拡散係数に近づくことが予想される。

(ii) 本報で用いた粒径の範囲では、沈降性粒子の拡散係数は異方性をもち、鉛直方向の拡散係数  $[D_3(t)]$  は、水平方向のそれ  $[D_1(t), D_2(t)]$  より大きな値となる。以下これらについて考察しよう。

(1) 粒径小で拡散係数大となることについての考察

これについては S. Yuu ら<sup>8)</sup>の空気噴流における実験結果と同一の傾向を示している。

粒径による拡散係数の相違の検討にあたっては、粒子が流体の運動に追従する度合すなわち粒子の流体へのなじみの度合が問題となろう。この点に関して J.O. Hinze<sup>7)</sup> は、粒子の流体へのなじみ時間を取り上げ考察を加えている。なじみ時間が小さくなるほど、粒子は流体になじみやすく、したがって粒子の拡散係数は流体のそれに近づくものと考えられる。このなじみ時間を J.J. Riley ら<sup>15)</sup>は、式 (14), (15) に示す係数  $a$  の逆数  $1/a(s)$  で与えている。

いまなじみ時間と粒径との関係についてきわめて単純な考察を加えてみよう。式 (14) で左辺と右辺第1項をとりあげ1次元を考えると

$$dv_p/dt = a(v_f - v_p) \dots \dots \dots (31)$$

いま  $t=0$  で  $v_p=0$  として  $v_p$  が  $\kappa v_f$  になる時間  $T_\kappa$  を求めると上式を積分して

$$T_\kappa = (1/a) \ln \{1/(1-\kappa)\} \dots \dots \dots (32)$$

すなわち、 $T_\kappa$  は  $1/a$  に比例する。 $T_\kappa$  はなじみ時間に関連する値と考えられ、したがって  $1/a(s)$  はなじみ時間に関連をもつ値といえよう。ちなみに J.J. Riley らが与えたようななじみ時間を  $1/a$  とした場合は、 $\ln \{1/(1-\kappa)\} = 1$  すなわち  $\kappa = 0.63$  の場合となる。さて  $1/a$  は式 (15) から  $d^2$  に比例している。したがって粒径が小さくなるにつれてなじみ時間は小さくなり、したがって粒子の拡散係数は大となると考えられる。なお本報で用いた粒子についての  $1/a(s)$  を 表-2 に示している。

(2) 鉛直方向の拡散係数が水平方向のそれより大となることの考察

これは J.L. Lumley が指摘した拡散係数の異方性と同一の結果となっている。いま、これについて考察してみよう。まず、前述 4. の拡散係数算定式の誘導過程からみて異方性算出の原因を考えると、式 (22) から一様等方性乱流場において  $f(t, r) > g(t, r)$  のため、 $R_3(t, r) > R_{1,2}(t, r)$  となり、式 (23) から  $R_{ff,3} > R_{ff,1,2}$  が得られる。次に式 (27), (29) の厳密解が得られないので  $R_{pp,3}$  と  $R_{pp,1,2}$  との大小関係を直接求められないが、 $R_{ff,3}, R_{ff,1,2}$  を入れた数値解の結果  $R_{pp,3} > R_{pp,1,2}$  となり、式 (21) から  $D_3(t) > D_{1,2}(t)$  となったものといえる。すなわちこの拡散係数の異方性は  $f(t, r) > g(t, r)$  に起因するといえよう。

次にこの異方性の原因を現象的に考えてみよう。

ここでは粒子の沈降速度は、流体の乱れ強度  $\sqrt{u^2}$  より十分大きく流体の渦を次々と脱出して沈降してゆくものと考えよう。前述のように本報で取り扱った粒子の終末沈降速度  $\omega_0$  は 表-2, 表-1, 図-1 を比較してわかるように  $\sqrt{u^2}$  より大きく上記の条件を満足していると考ええる。

いま粒子に働く外力として流体の乱れによる力を考えてみよう。図-8 について、初め a 点にいた粒子が沈降

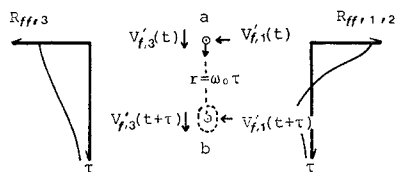


図-8 粒子の沈降過程説明図

して  $\tau$  時間後に平均的に  $b$  点にきたとする。また図の  $R_{ff,3}$  と  $R_{ff,1,2}$  はそれぞれ粒子の始めの位置  $a$  点と各沈降位置における粒子の沈降方向とそれに直角方向すなわち鉛直方向と水平方向の流体の速度相関である。ここで、式 (22)、式 (23) から  $R_{ff,3}$  と  $R_{ff,1,2}$  はそれぞれ近似的に流体の縦速度相関係数  $f(t, r)$  および横速度相関係数  $g(t, r)$  に比例し、 $f(t, r) > g(t, r)$  であることから、図—4 および 図—5 に示すように  $r > 0$  では  $R_{ff,3} > R_{ff,1,2}$  となる。

さて、この  $R_{ff,3}$ 、 $R_{ff,1,2}$  は粒子が  $a$  点から沈降する間の各位置において、粒子の受ける流体の乱れ速度による外力の相関に近似するものと考えることができよう。したがって、沈降する粒子が各沈降位置において、流体から受ける力については、 $R_{ff,3}$  が  $R_{ff,1,2}$  より長い正の相関をもつことから、 $a$  点で受けた鉛直方向の力の向きが、たとえば  $+$  であれば  $+$  方向の力を、また  $a$  点で  $-$  のときは  $-$  の方向の力を比較的持続して受けながら沈降して  $b$  点の上下に分散する。また  $a$  点で受ける水平方向の力の大きさと向きは、比較的持続されず、したがって方向が  $+$ 、 $-$  と変化する力を受けながら沈降して、 $b$  点の左右に分散する。この結果粒子は  $\tau$  時間後、 $b$  点を中心として図の点線のように鉛直方向に長いほぼ楕円形の範囲に分散するものと考えられる。このため一様等方性乱流場における沈降性粒子の拡散係数は異方性をもち、鉛直方向が水平方向より大きい値になると考えられる。

## 6. 結 び

本報では、まず Fourier 級数表現によるスペクトル法を用いて初期乱れ強度  $0.65 \text{ cm/s}$  の 3 次元一様等方性乱流場を算定している。ここで用いたスペクトル法には次のような利点が考えられる。

(1) 実空間の速度の微分項が、波数空間では代数計算になり、微分項の離散化誤差が防げる。

(2) Fourier 変換およびその逆変換を高速 Fourier 変換で行うため演算時間を大幅に短縮できる。

次にこの乱流中の沈降性粒子の拡散係数を ① Stokes 則の成立する範囲のもとの粒径  $150 \mu\text{m}$ 、 $200 \mu\text{m}$ 、 $250 \mu\text{m}$  の粒子の運動の数値実験結果からと、② 流体の速度相関関数の近似式と新たに誘導した流体と粒子の速度相関の関係式を用いた解法から算定し、② の有意性を述べている。

次に以上求めた一様等方性乱流中を重力沈降する粒子の拡散係数について、次の知見を得ている。

(1) 本報の粒径の範囲では、粒子の拡散係数は粒径の減少とともに増大する。

(2) 沈降性粒子の拡散係数は異方性をもち、鉛直方向が水平方向より大きい。

これは、粒子の沈降方向の流体の変動速度成分の相関が、沈降方向に直角な方向の流体の変動速度成分の相関より大きいことから [ $r > 0$  で流体の縦速度相関係数  $f(t, r) >$  流体の横速度相関係数  $g(t, r)$  のため]、沈降方向に、粒子が流体から受ける力は、その大きさと向きが比較的持続性をもち、また水平方向には、流体から受ける力の大きさと向きは比較的持続性をもたないため、粒子の位置は鉛直方向が水平方向より分散が大きくなるためと述べている。

## 参 考 文 献

- 1) 椿東一郎：水理学Ⅱ，森北出版，pp. 234~236，1974年。
- 2) 堀川清司：海岸工学，東京大学出版会，pp. 218~224，1981年。
- 3) 鮎川 登，ほか：浮流砂の堆積現象の数値解析，第26回水理講演会論文集，pp. 147~152，1982年2月。
- 4) 栗谷陽一・藤崎一裕：開水路流れにおける沈降性粒子の平均移流速度と縦分散係数，土木学会論文報告集，第311号，pp. 71~79，1981。
- 5) 芦田和男・岡部健士：非平衡な浮遊砂濃度の算定法に関する研究，第26回水理講演会論文集，pp. 153~158，1982年2月。
- 6) Hinze, J.O. : Turbulence, McGraw-Hill, pp. 352~364, 1959.
- 7) Hinze, J.O. : Turbulent fluid and particles interaction, Progress in Heat and Mass Transfer, Vol. 6, pp. 433~452, 1972.
- 8) Yuu, S., et al. : Particle turbulent diffusion in a dust laden round jet, AIChE Jour., Vol. 24, No. 3, pp. 509~518, 1978.
- 9) Lumley, J.L. : Two-phase and non-Newtonian flows, Topics in Applied Physics, Vol. 12, Turbulence, Bradshaw, P. 編, Springer-Verlag, pp. 289~324, 1978.
- 10) Schumann, U. and G.S. Patterson : Numerical study of pressure and velocity fluctuations in neary isotropic turbulence, J. Fluid Mech., Vol. 88, Pt. 4, pp. 685~709, 1978.
- 11) 上田年比古，ほか：一様等方性乱流の数値計算，九州大学工学集報，第55巻，第1号，pp. 17~24，1982年1月。
- 12) Orszag, S.A. : Numerical method for the simulation of turbulence, The Physics of Fluid Supplement II, pp. 250~257, 1969.
- 13) 谷 一郎：流体力学の進歩・乱流，丸善，pp. 166~167，1980年。
- 14) 林 泰造・大橋正和：流体中を沈降する粒子の乱流特性について，第24回水理講演会論文集，pp. 7~12，1980年2月。
- 15) Riley, J.J. and G.S. Patterson : Diffusion experiments with numerically integrated isotropic turbulence, The Physics of Fluids, Vol. 17, No. 2, pp. 292~297, 1974.