

非線形弾性柱の動的安定問題における臨界条件式*

CRITICAL CONDITIONS FOR THE DYNAMIC STABILITY
OF NON-LINEAR ELASTIC SYSTEMS

吉 川 幸 雄**

By Yukio YOSHIKAWA

1. はじめに

構造物の座屈問題で、現在では静力学・動力学両分野に広く適用されている動的安定判別法は、そのうちの多くの問題を解決してきている。非保存力を含めた安定問題の解析に、この方法は種々の断面より成るはり要素にまで適用され、有限要素法の助けによる研究もなされている¹⁾。さらに最近になっては、非線形構造物として、有限変位をもつ系すなわち幾何学的非線形性をもつ系に対して非保存力の作用する場合の解析もある²⁾。

しかるに現在適用されている安定判別基準であるリアプノフの定理その他の定理は、ほとんどが線形系あるいは弱非線形系をもつ系に適用されるものであった³⁾。このため直接に定理の適用を図る安定解析では、線形系もしくは線形化された系を対象としたものだけに、このことが動的安定判別法としての適用範囲を狭めたものにしてきた。

しかしながら著者は、構造物の安定問題に、構造材料の有する非線形性—材料非線形性—のうち非線形弾性を有する場合を考慮して、従動力の作用する系の動的安定解析を試み、種々の新しい結果を得ていた⁴⁾。この研究は動的安定判別法に準拠したものであった。すなわち非線形系に微小外乱を与えた方程式に摂動法を適用することによって、系の固有振動数を導出し、これにリアプノフの定理を準用して平衡状態の安定判別を試みていた。その結果として、従来の保存力を受ける線形弾性柱の静的座屈値はもとより、非保存力(従動力)を受ける線形弾性柱の動的座屈値とも異なる非線形弾性系の解を求めることができた。

このように非線形性を考慮に入れて動的安定解析を行

うとき、系を線形化して固有値問題として解析したときには得れない情報を引き出し得る。したがって今後の研究も、根本的に非線形系を非線形問題としてとらえたものが重要であると思われる。

本研究は以上の観点から非線形系の解析を行うものであるが、上述のように従来の安定判別基準であるリアプノフの定理その他の安定定理の適用によらず、非線形問題として解析方法を論ずる。以下の解析においては、変位は小さいものとし、簡単のため減衰のない場合を取り扱い、外力としては接線方向従動力の作用している系を考える。また材料非線形性を表現する非線形弾性は、図-1 に与える関係により与えられるものとし、この関係を、 U を無次元の微小相対変位 δ に対する非線形弾性ポテンシャルとして、復元力特性

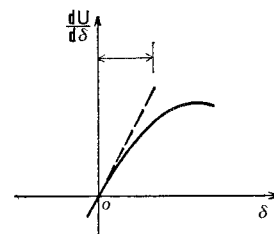


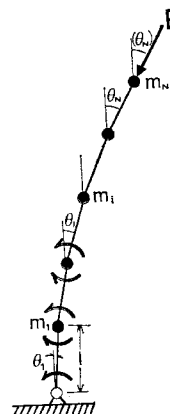
図-1 非線形復元力特性図

$$\frac{dU}{d\delta} = \sum_{k=0}^r b_k \delta^{k+1} \quad (b_0 > 0, b_{k(\neq 0)} < 0) \dots \dots (1)$$

で表わされるものとする。ここで b_0 は線形弾性定数(構造部材でいう初期線形剛性に対応する)であり、 b_k ($k \neq 0$) は非線形弾性定数として r 項までとるものである。

2. 基礎式

非保存系の非線形弾性柱の安定問題を論ずるために図-2 に与える N 自由度モデル柱を導入する。これは以前の著者の研究⁴⁾での 2 自由度モデルをさらに一般化した、多自由度にまで拡張したもの

図-2 N 自由度モデル柱

* 本論文は、第 28 回構造工学シンポジウムにおいて、一部発表している。

** 正会員 工修 労働省 兵庫労働基準局 淡路労働基準監督署

である。このモデルの導入により系のもつ固有振動数は、 N 次の固有振動数まで取り扱えることになる。

この図-2のモデルにおいて、柱は式(1)で与えていた非線形弾性ポテンシャル U より導かれる復元モーメントを有するヒンジで結合され、共通長さ l の剛部材およびヒンジ部に集中質量 m_1, m_2, \dots, m_N をもち、外力 P による変位は各剛部材の回転角 $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_N$ で表わされる。

このとき、運動方程式は相対変位 δ を $\delta = \vartheta_i - \vartheta_{i-1}$ ($i=1, 2, \dots, N; \vartheta_0=0$) として、

$$\sum_{j=1}^N \{m_{ij} \ddot{\vartheta}_j + p_{ij} \vartheta_j + \phi_i(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_N)\} = 0 \dots (2)$$

$(i=1, 2, \dots, N)$

なる N 個の式で表わされる。ここで図-1に与えたパラメーターに対して、無次元化した

$$\kappa^2 = \frac{Pl}{b_0}, \quad \beta_k = \frac{b_k}{b_0} \quad (k=1, 2, \dots, r),$$

$$m_i = g_i m \quad (i=1, 2, \dots, N) \dots \dots \dots (3)$$

を導入してあり、式(2)左辺の $m_{ij} \ddot{\vartheta}_j$ は質量比 g_i を係数にもつ慣性項を、 $p_{ij} \vartheta_j$ は荷重パラメーター κ^2 と線形復元力による項を、そして $\phi_i(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_N)$ は非線形弾性パラメーター β_k を係数にもつ非線形項で、

$$\phi_i(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_N) = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \vartheta_i}$$

$$\bar{U} = \beta_1 \sum_{i,j,k=1}^N c_{ijk} \vartheta_i \vartheta_j \vartheta_k + \beta_2 \sum_{i,j,k,l=1}^N c_{ijkl} \vartheta_i \vartheta_j \vartheta_k \vartheta_l + \dots$$

の形をもつ。ただし c_{ijk}, c_{ijkl}, \dots は非線形項係数で数値にて表わされる。また変数の上のドットは無次元化された時間変数 t による微分を示す。

式(2)において非線形項 ϕ_i がなく、対応する線形弾性系の運動方程式が得られ、その系の振動数方程式は、

$$D = |(p_{ij} - \omega^2 m_{ij})| = 0 \dots \dots \dots (5)$$

となる。ここに ω は線形系の固有振動数を表わし、 D は i 行 j 列の要素が $(p_{ij} - \omega^2 m_{ij})$ である行列式を示す。

非線形微分方程式系(2)の解析のために、行列式 D で $\omega = \omega_k$ とおいたときの行列式を D_k と書き、 i 行 j 列の要素の余因数 $(D_k)_{ij}$ で表現される係数 α_{ij}

$$\alpha_{ij} = \frac{(D_k)_{ij}}{\sqrt{\sum_{r,s=1}^N m_{rs} (D_k)_{rj} (D_k)_{sj}}} \dots \dots \dots (6)$$

を導き、この係数 α_{ij} でつくられる座標変換

$$\vartheta_i = \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} q_j \quad (i=1, 2, \dots, N) \dots \dots \dots (7)$$

によって、一般化座標 ϑ_i を基準座標 q_i に変換しておく⁵⁾。式(7)を式(2)へ代入して、基準座標による運動

方程式系

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i &= \psi_i(q_1, q_2, \dots, q_N) \\ &(i=1, 2, \dots, N) \\ \psi_i(q_1, q_2, \dots, q_N) &= -\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial q_i} \\ \mathcal{Q} &= \beta_1 \sum_{i,j,k=1}^N d_{ijk} q_i q_j q_k \\ &+ \beta_2 \sum_{i,j,k,l=1}^N d_{ijkl} q_i q_j q_k q_l + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots (8)$$

を得る。ここで \mathcal{Q} は復元ポテンシャルの非線形部を表わし、 d_{ijk}, d_{ijkl}, \dots は変換(7)により得られる各非線形項の係数を示す。

3. 非線形系の解析

(1) 解析方法

N 個の線形系の固有振動数 ω_i ($i=1, 2, \dots, N$) と基準座標 q_i および r 個の非線形弾性パラメーター β_k ($k=1, 2, \dots, r$) によって表現された非線形弾性柱の運動方程式(8)は、一般に非線形微分方程式系となるため、解を直接に知ることはできない。しかし安定解析のうえでは、たとえば動的安定判別法は力学系(8)の微小固有振動について、固有振動数の外力による変化を調べることで平衡位置近傍の振幅有界性が判定できることより、系の固有振動数さえ導出できれば解析は可能であった。これにより著者の以前の研究⁴⁾は、2自由度モデルの導入によって、摂動法を適用して非線形系の固有振動数を求め、リアプノフの安定定理に準拠して安定解析をすることができた。しかしながら本研究における N 自由度系の固有振動数までを求めることは困難である。そこで従来の安定定理によらずに、別個の解析方法として、解の形を必要とされる形まで求めておいて、解の挙動を知ることによって系の臨界状態を判別するという手段を考えた。

そのための仮定として、系(8)にその微分方程式が

$$\frac{d^2 q_i}{d\tau^2} + \omega_i^2 q_i = \varepsilon f(q_1, q_2, \dots, q_N) \dots \dots \dots (9)$$

の形に直せるという設定をする。ここで ε は正の小さいパラメーターとする。このように定式化できれば系(8)の振動系は次のような物理的考察が可能となる。なお以下の解析は、非線形振動論に適用されている Kryloff & Bogoliuboff の平均化法⁶⁾の考え方を応用している。

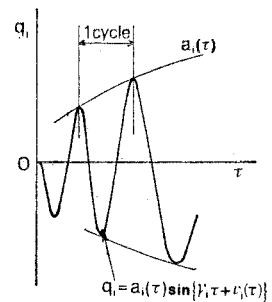


図-3 近似解 q_i の設定⁶⁾
(解 q_i の変化に比して振幅 a_i の変化は緩やかなものとしている。)

系(8)の微小固有振動は、非線形振動特有の、その振幅と振動数とが時間の経過とともに変化するという性質をもっているが、このときの非線形性の影響は非線形の強い系を除けば、振動の振幅、位相に急激な変化を及ぼし得るものでなく、変化が顕著に現われるまでに時間経過を要するものと考えられる。すなわち振動の1周期に要する時間よりも何倍も大きい時間の後に変化は現われると思われる。この様子を図-3に示すが、このことから系(9)の近似解は、初期外乱後の十分な時間に対して

$$q_i = a_i(\tau) \sin\{r_i\tau + \nu_i(\tau)\} = a_i(\tau) \sin \zeta_i(\tau) \quad \dots\dots\dots(10 \cdot a)$$

さらに

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{d\tau} &= r_i a_i(\tau) \cos\{r_i\tau + \nu_i(\tau)\} \\ &= r_i a_i(\tau) \cos \zeta_i(\tau) \quad \dots\dots\dots(10 \cdot b) \end{aligned}$$

の形をとるものとする。ここで振幅 $a_i(\tau)$ と初期位相 $\nu_i(\tau)$ は時間 τ に関して緩やかに変化する未知関数であり、また $\zeta_i(\tau) = r_i\tau + \nu_i(\tau)$ 。さらに r_i は線形系のある特定の振動数 ω_0 としたときの無次元固有振動数とし、また非線形系(8)の固有振動数 Ω は線形系の固有振動数と異なるため変調 λ を小さい量として次のように決めている。

$$\tau = \Omega t, \quad \Omega = \omega_0 - \lambda\omega_0 = (1-\lambda)\omega_0, \quad r_i = \frac{\omega_i}{\omega_0} \dots\dots(11)$$

この2式(10・a), (10・b)により系(9)の解 $q_i, dq_i/d\tau$ を求めるところを、2つの新しい未知関数 $a_i(\tau), \nu_i(\tau)$ を求めることに変換された。

さて解(10・a)を求めるにあたり、すなわち振幅 a_i 、位相 ν_i を求めるにあたり次の解析方法を探ると有利である。すなわち解を時間経過 τ に対しての積分量として得んとするとき、初期外乱後の積分量で $\bar{\tau}$ について平均された量のうち、

$$\frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} \cos \zeta_i d\tau = \frac{1}{r_i \bar{\tau}} \sin \zeta_i \Big|_0^{\bar{\tau}}$$

であることより、 $\cos \zeta_i$ (あるいは $\sin \zeta_i$) を含む項は分母に $\bar{\tau}$ を含むため、十分な時間 $\bar{\tau}$ に対して小さい項となる。したがって残る振幅 a_i にのみ依存することとなり、振幅 a_i の時間変化を決定する近似方程式

$$\frac{da_i(\tau)}{d\tau} = X_0(a_i) \quad \dots\dots\dots(12)$$

を十分長い時間に対しての平均操作

$$X_0(a_i) = \lim_{\bar{\tau} \rightarrow \infty} \frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} X(\tau, a_i) d\tau \equiv \bar{M}\{X(\tau, a_i)\} \quad \dots\dots\dots(13)$$

を行って導けばよいこととなる。こうして解を、直接積分して求める代わりに、いったん平均操作(13)を施して近似式(12)を導いておけば、(12)の積分により近似解が得られるため解析は容易となる。

(2) 臨界振動数条件式

前節(1)に述べた解析方法により系(8)の近似解を以下に求める。初めに変換(10)により基礎式(8)を式(9)の形に直すため、(8)を新しいパラメーター(11)により表わし、

$$(1-\lambda)^2 \frac{d^2 q_i}{d\tau^2} + r_i^2 q_i = -\frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial q_i}$$

となるが、上式で2次微小量の λ^2 の項を無視して

$$\frac{d^2 q_i}{d\tau^2} + r_i^2 q_i = 2\lambda \frac{d^2 q_i}{d\tau^2} - \frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial q_i} \equiv \varepsilon_0$$

と変形する。これから $d^2 q_i/d\tau^2 = \varepsilon_0 - r_i^2 q_i$ となり、上式の第2式へ代入して2次微小の $\varepsilon_0 \lambda$ 項を無視すると、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q_i}{d\tau^2} + r_i^2 q_i &= -2\lambda r_i^2 q_i - \frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial q_i} \quad \dots\dots\dots(14) \\ &(i=1, 2, \dots, N) \end{aligned}$$

を得る。このとき ε_0 は $\bar{\mathcal{Z}}$ が、

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{Z}} &= \beta_1 \sum_{i,j,k=1}^N A_{ijk} \sin \zeta_i \sin \zeta_j \sin \zeta_k \\ &+ \beta_2 \sum_{i,j,k,l=1}^N A_{ijkl} \sin \zeta_i \sin \zeta_j \sin \zeta_k \sin \zeta_l + \dots \\ &= \beta_1 \sum_{i,j,k=1}^N A_{ijk} \sin(n_i \zeta_i + n_j \zeta_j + n_k \zeta_k) \\ &+ \beta_2 \sum_{i,j,k,l=1}^N A_{ijkl} \sin(m_i \zeta_i + m_j \zeta_j \\ &+ m_k \zeta_k + m_l \zeta_l) + \dots \quad \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

と書かれ (n_i, m_i, \dots ; 整数)⁷⁾、各項のパラメーター β_1, β_2, \dots が小さい量であるとして、微小量としている。また A_{ijk}, A_{ijkl}, \dots はそれぞれ a_i でつくられる多項式である。こうして基礎式(8)を式(14)に直し、式(14)の右辺の各項はそれぞれ小さい量 $\lambda, \beta_1, \beta_2, \dots$ に比例しているため前節(1)で述べた仮定式(9)の表現が得られた。

次に近似式表現(12)を得るために次の計算を行う。初めに a_i と ζ_i に対する微分方程式をつくる。そのため(10・a)を τ で微分し、(10・b)を考慮すると、

$$\frac{da_i}{d\tau} \sin \zeta_i + a_i \frac{d\nu_i}{d\tau} \cos \zeta_i = 0 \quad \dots\dots\dots(16)$$

を得る。さらに(10・b)を微分した式と(10・a), (10・b)を(14)へ代入して、次式を得る。

$$\begin{aligned} r_i \frac{da_i}{d\tau} \cos \zeta_i - r_i a_i \frac{d\nu_i}{d\tau} \sin \zeta_i + 2r_i^2 \lambda a_i \sin \zeta_i \\ + \frac{1}{\omega_0^2 a_i \cos \zeta_i} \frac{\partial \bar{\mathcal{Z}}}{\partial \zeta_i} = 0 \quad \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

ここに(16)と(17)を連立させて、 $da_i/d\tau, d\nu_i/d\tau$ について解くと、次の近似方程式が得られる。

$$\frac{da_i}{d\tau} = -\lambda r_i a_i \sin 2\zeta_i - \frac{1}{\omega_0^2 r_i a_i} \frac{\partial \bar{\mathcal{Z}}}{\partial \zeta_i} \quad \dots\dots(18 \cdot a)$$

$$\frac{d\nu_i}{d\tau} = \lambda r_i (1 - \cos 2\zeta_i) + \frac{1}{\omega_0^2 r_i a_i} \frac{\partial \bar{\mathcal{Z}}}{\partial \nu_i} \quad \dots\dots(18 \cdot b)$$

これでは \$q_i\$ に関する 2 階の微分方程式 \$N\$ 個式 (14) の代わりに、\$a_i\$ と \$v_i\$ に関する 1 階の微分方程式 \$2N\$ 個が得られたが、ここで平均操作 (13) を行っておく。振幅 \$a_i\$ について (18・a) 右辺の第 1 項は、

$$M\left\{-\lambda r_i a_i \sin 2 \zeta_i\right\}=\lim _{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau}(-\lambda r_i a_i \sin 2 \zeta_i) d \tau$$

$$=\lim _{\tau \rightarrow \infty} \frac{\lambda a_i}{2 \bar{\tau}} \cos 2 \zeta_i \Big|_0^{\tau}=0 \cdots \cdots \cdots(19)$$

となる。ただし平均操作において \$a_i\$ は定数としている。さらに第 2 項は、式 (15) に \$\zeta_i=r_i \tau+v_i\$ であることを考えて、

$$M\left\{-\frac{1}{\omega_0^2 r_i a_i} \frac{\partial \bar{\mathcal{Z}}}{\partial \zeta_i}\right\}=\lim _{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau}\left\{-\frac{1}{\omega_0^2 r_i a_i} \frac{\partial \bar{\mathcal{Z}}}{\partial \zeta_i}\right\} d \tau$$

$$=\lim _{\tau \rightarrow \infty}\left(-\frac{1}{\omega_0^2 r_i a_i \bar{\tau}}\right) \cdot\left[\frac{\beta_1}{n_i r_i+n_j r_j+n_k r_k}\right.$$

$$\cdot \sum_{i, j, k=1}^N A_{i j k} \cdot n_i \sin \left(n_i \zeta_i+n_j \zeta_j+n_k \zeta_k\right)$$

$$+\frac{\beta_2}{m_i r_i+m_j r_j+m_k r_k+m_l r_l} \sum_{i, j, k, l=1}^N A_{i j k l} m_i$$

$$\cdot \cos \left(m_i \zeta_i+m_j \zeta_j+m_k \zeta_k+m_l \zeta_l\right)+\left.\cdots\right]_0^{\tau}$$

を得る。ここで \$A_{ijk}, A_{ijkl}, \dots\$ は \$a_i\$ などの多項式ゆえ定数としている。上式の \$\sin(n_i \zeta_i + \dots + n_k \zeta_k), \cos(m_i \zeta_i + \dots + m_l \zeta_l), \dots\$ なる項は三角関数の加法定理などによって、定数項と三角関数項に分離されるため、それぞれ(定数項)+(三角関数項)の形になる。したがって第 2 項の平均操作は、さらに次のように与えられる。

$$M\left\{-\frac{1}{\omega_0^2 r_i a_i} \frac{\partial \bar{\mathcal{Z}}}{\partial \zeta_i}\right\}=\left(-\frac{1}{\omega_0^2 r_i a_i}\right)$$

$$\cdot\left[\frac{\beta_1}{n_i r_i+n_j r_j+n_k r_k} \sum A_{i j k} k' \cdot n_i\right.$$

$$+\frac{\beta_2}{m_i r_i+m_j r_j+m_k r_k+m_l r_l} \sum A_{i j k l} l' \cdot m_i+\left.\cdots\right] \cdots \cdots \cdots(20)$$

ここで \$A_{ijk}', A_{ijkl}', \dots\$ は定数項をもつ \$a_i\$ の多項式を表わす。こうして (18・a) の右辺は式 (19) および式 (20) の和として表わされた。したがって振幅解 \$a_i(\tau)\$ は、

$$a_i(\tau)=\left(-\frac{1}{\omega_0^2 r_i a_i}\right)\left[\frac{\beta_1}{n_i r_i+n_j r_j+n_k r_k}\right.$$

$$\cdot \int n_i A_{i j k} d \tau+\frac{\beta_2}{m_i r_i+m_j r_j+m_k r_k+m_l r_l}$$

$$\cdot \left.\int m_i A_{i j k l} d \tau+\cdots\right] \cdots \cdots \cdots(21)$$

と求められた。

このように得られた振幅解 \$a_i\$ (21) は、その右辺により、小さいパラメーター \$\beta_1, \beta_2, \dots\$ に比例した項の和で表わされているため、振幅 \$a_i\$ は緩やかに変化する量とみられる。しかし、各項の分数式の分母があるため、\$r_i = \omega_i/\omega_0\$ ゆえ任意項数 \$s (\le N)\$ に対して、

$$0 \leq \sum_{r=1}^s n_r \omega_r < |\beta_k| \quad (n_r ; \text{整数}) \cdots \cdots \cdots(22 \cdot a)$$

あるいは \$\beta_k\$ を無視して、

$$\sum_{r=1}^s n_r \omega_r=0 \quad (n_r ; \text{整数}) \cdots \cdots \cdots(22 \cdot b)$$

の条件が成り立つとき、振幅 \$a_i\$ はもはや有界であることはできない。ここに条件 (22・a), (22・b) は系の振幅有界性を支配する臨界条件を与える式と考えられ、任意の整数 \$n_r\$ の組に対して固有振動数をもつ条件ゆえ、以下は臨界振動数条件式とよんでおく。

4. 安定解析

(1) 解析方法

前節 3.(2) での考察により、式 (22) が成立すれば系は不安定になる可能性があるが、必ずしも不安定となるか否かは不明であり、この点についての検証のために、以下の解析を試みる。簡単のため式 (22・b) のときについて調べることとするが、この (22・b) は振動論というところの共振条件に相当している。

解析のため、基礎式 (8) に帰って、非同次方程式

$$\ddot{q}_i+\omega_i^2 q_i=-\beta_1 \sum_{u, v=1}^N l_{u v} q_u q_v$$

$$-\beta_2 \sum_{u, v, w=1}^N l_{u v w} q_u q_v q_w-\cdots$$

(\$i=1, 2, \dots, N\$)

を得る。ここで非線形項の係数 \$l_{uv}, l_{uvw}, \dots\$ はポテンシャル \$\mathcal{Z}\$ を \$q_i\$ にて微分した後には得られる各項の係数を示す。系 (8) が条件 (22・b) を満たすとき、系は共振状態にあるため、励起された振動モードに対して励起振動数 \$\omega_k (i \neq k)\$ と初期位相を適当に選ぶと、その励起モード \$q_k = a_k \cos \omega_k t\$ が得られる。この励起モードの起こったとき、今までのモード \$q_i\$ が安定か不安定かを判別すればよいので、励起モード \$q_k\$ を上式に代入し、\$\omega_k t = 2T\$ とおき、簡単のため \$\beta_2\$ 項以降を無視して、

$$\frac{d^2 q_i}{d T^2}+(\omega_i^2+\beta_1 l_{k i} a_k \cos 2 T) q_i=-\beta_1 \sum_{u \neq k}^N l_{u v} q_u q_v$$

を導くと、上式右辺は \$q_i\$ より高次の項となることより、微小項であるとして無視すると、次の同次方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 q_i}{d T^2}+(\xi_i-2 \eta_i \cos 2 T) q_i=0 \\ ; \xi_i=\left(\frac{2 \omega_i}{\omega_k}\right)^2, \eta_i=-\frac{\beta_1 a_k l_{k i}}{2 \omega_i^2} \xi_i \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots(23)$$

これは周期解を解にもつ Mathieu の方程式である。

こうして得られた式 (23) については解の安定性が研究されており⁸⁾、そこでの解の安定不安定境界曲線によれば、式 (23) 中のパラメーター \$\xi_i, \eta_i\$ の 2 つで定まる

平面上の解の存在する領域により解の安定判別ができるのである。

(2) 解析例

条件 (22.b) で表現される臨界状態が安定か否かの判別を前節 (1) の解析法に基づいて、図-2 のモデルのうちの $N=2$ なる 2 自由度モデル柱について行う。

初めに系のパラメーター (3) をそれぞれ、

$$g_1=2, g_2=1; \beta_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0, \beta_3=\beta_4=\dots=0$$

とする。このときの運動方程式 (2) を (4) とともに導くと、

$$\left. \begin{aligned} 3\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2 + (2-\kappa^2)\vartheta_1 + (\kappa^2-1)\vartheta_2 \\ + \beta_1(2\vartheta_1\vartheta_2 - \vartheta_2^2) + \beta_2(2\vartheta_1^3 - 3\vartheta_1^2\vartheta_2 \\ + 3\vartheta_1\vartheta_2^2 - \vartheta_2^3) = 0 \\ \ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2 - \vartheta_1 \\ + \vartheta_2 + \beta_1(\vartheta_2 - \vartheta_1)^2 + \beta_2(\vartheta_2 - \vartheta_1)^3 = 0 \end{aligned} \right\} \dots(24)$$

となる。対応する線形系 ($\beta_1=\beta_2=0$ のとき) の線形固有振動数 ω_1^2, ω_2^2 ($\omega_1^2 < \omega_2^2$) は、(5) より

$$\begin{vmatrix} 3\omega^2 - (2-\kappa^2) & \omega^2 - (\kappa^2-1) \\ \omega^2 + 1 & \omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots(25)$$

なる振動数方程式の 2 根として得られる。

次に式 (24) を基準座標に変換するため、変換 (7) より

$$\vartheta_1 = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2, \vartheta_2 = \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 \dots\dots\dots(26)$$

を得る。ここで係数 $\alpha_{11} \sim \alpha_{12}$ は (6) により、荷重パラメーター κ^2 の値に応じて決定される。変換 (26) により式 (24) は、

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = -\beta_1(l_{1,11}q_1^2 + l_{1,12}q_1q_2 + l_{1,22}q_2^2) \\ -\beta_2(l_{1,111}q_1^3 + l_{1,112}q_1^2q_2 \\ + l_{1,122}q_1q_2^2 + l_{1,222}q_2^3) \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = -\beta_1(l_{2,11}q_1^2 + l_{2,12}q_1q_2 + l_{2,22}q_2^2) \\ -\beta_2(l_{2,111}q_1^3 + l_{2,112}q_1^2q_2 \\ + l_{2,122}q_1q_2^2 + l_{2,222}q_2^3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

なる基礎式として得られる。ここで係数 $l_{1,11} \sim l_{2,222}$ は変換 (26) の $\alpha_{11} \sim \alpha_{22}$ の値により決定される。

さて、系 (27) は外力 κ^2 の増加とともに臨界振動数条件 (22.b) として任意の整数の組 (n_1, n_2) に対して、

$$n_1\omega_1 + n_2\omega_2 = 0 \dots\dots\dots(28)$$

を満たすようになる。このとき系は臨界状態に陥る可能性が生じるため、その臨界状態について安定判別せねばならない。そこで条件 (28) のゆえに系に励起 $q_2 = a_2 \cos \omega_2 t$ が生じたとして、解 q_1 の安定解析を行うため、式 (27) の第 1 式を Mathieu の方程式 (23) の形

$$\frac{d^2 q_1}{dT^2} + (\xi_1 - 2\eta_1 \cos 2T)q_1 = 0; \omega_2 t = 2T \dots\dots\dots(29.a)$$

$$; \xi_1 = \left(\frac{2\omega_1}{\omega_2}\right)^2, \eta_1 = -\frac{\beta_1 a_2 l_{1,12}}{2\omega_2^2} \xi_1 \dots(29.b, c)$$

に近似して、安定線図 図-4⁸⁾ によりいくつ ξ_1 かの (n_1, n_2) の組に対する安定判別を行う。

1) $(n_1, n_2) = (1, 0)$ のとき

条件式 (28) は $\omega_1 = 0$ となり、周期解を対象とする系 (29) に含まれないため、安定判別を従来の研究結果³⁾ に求めれば、ダイバージェンス不安定 ($\omega_1^2 = 0$, i.e. $\kappa_{cr}^2 = 0.382$) に相当している。

2) $(n_1, n_2) = (1, -1)$ のとき

条件式 (28) で $\omega_1 = \omega_2$ のときで、安定線図 図-4 において直線 (29.b) と (29.c) との交点 (A) が常に不安定領域内にあることより不安定状態にあることとなる。なお従来の線形弾性系のフラッタ不安定 ($\omega_1^2 = \omega_2^2$, i.e. $\kappa_{cr}^2 = 2.086$) に相当している。

3) $(n_1, n_2) = (2, -1)$ のとき

条件式 (28) で $2\omega_1 = \omega_2$ のときで、図-4 の直線 (29.b) と (29.c) との交点 (B) が常に不安定領域内にあるため不安定状態である。なお、この結果は以前の著者の研究 4) における不安定条件式 $4\omega_1^2 = \omega_2^2$ (i.e. $\kappa_{cr}^2 = 1.732$) に相当している。

4) $(n_1, n_2) = (3, -1)$ のとき

条件式 (28) で $3\omega_1 = \omega_2$ のときで、2 直線 (29.b) と (29.c) との交点 (C) が不安定領域内に入るとき、すなわち直線 (29.c) の傾きが、

$$-\frac{2\omega_1^2}{\beta_1 a_2 l_{1,12}} \leq 0.85 \dots\dots\dots(30)$$

を満たすとき不安定状態をとる。これより非線形弾性度 β_1 あるいは励起振幅 a_2 の値に依存して系の安定性が決定されることとなる。なおこの場合の比較検討できる他の研究結果がないため、以下に数値解析を行って実証することとした。

初めに各パラメーターなどを決定しておくとして、荷重値 $\kappa^2 = 1.1429774$

において $3\omega_1 = \omega_2$ が与えられ、座標変換係数は (6) より、

$$\alpha_{11} = 0.33619297, \alpha_{12} = 0.43932090 \\ \alpha_{21} = 0.54355050, \alpha_{22} = -1.22289878$$

と得られ、式 (24) にこれら係数による変換 (26) を代入すると、

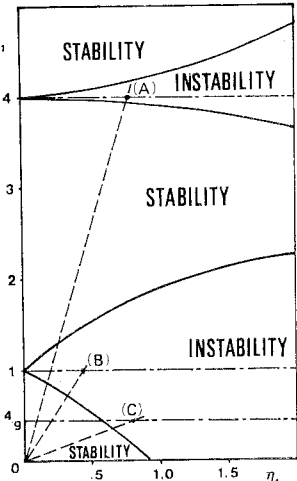


図-4 安定線図⁸⁾

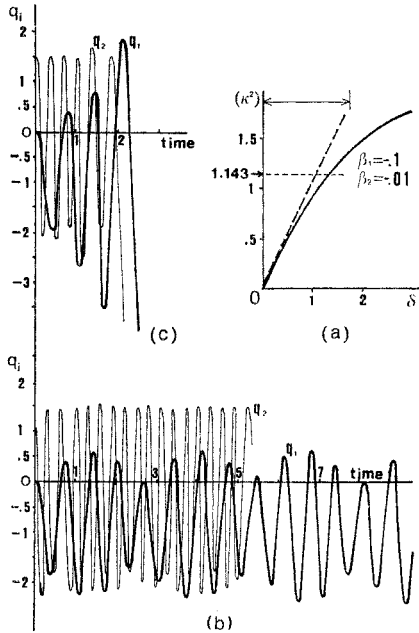


図-5 数値解 $q_1(\tau)$, $q_2(\tau)$ の挙動：
 $\beta_1 = -0.1$, $\beta_2 = -0.01$

$l_{1,111} = 0.045\ 359\ 458,$	$l_{2,111} = -0.003\ 946\ 584$
$l_{1,112} = 0.543\ 209\ 639,$	$l_{2,112} = 1.489\ 619\ 206$
$l_{1,222} = -1.347\ 169\ 855,$	$l_{2,222} = -5.038\ 603\ 417$
$l_{1,111} = -0.341\ 077\ 076,$	$l_{2,111} = -0.394\ 314\ 491$
$l_{1,112} = 1.350\ 460\ 650,$	$l_{2,112} = 1.789\ 829\ 799$
$l_{1,122} = -0.499\ 122\ 669,$	$l_{2,122} = -2.753\ 868\ 501$
$l_{1,222} = -0.107\ 482\ 593,$	$l_{2,222} = 5.981\ 827\ 056$

なる非線形項係数が得られる。

これにより非線形微分方程式系 (27) を、初期値問題として数値積分し、解 $q_1(\tau)$, $q_2(\tau)$ の時間経過に対する挙動を求めた結果が 図-5 である。図では非線形パラメーター

$$\beta_1 = -0.1, \beta_2 = -0.01, \beta_3 = \beta_4 = \dots = 0 \dots (31)$$

のときを調べており、初期値 $(q_2)_{\tau=0}$ は、図-1 で与えた力-変位関係図(すなわち復元力特性式 (1)) を無次元化して得た変位量を与えている。これは、外力値 $\kappa^2 = 1.142\ 977\ 4$ に対応してパラメーター (31) をもつときの復元力特性を作図すると 図-5(a) として得られるので、同図より対応する内力の変位値として $(q_2)_{\tau=0} = 1.10 \sim 1.50$ を読み取り、初期値として与えたものである。得られた数値解のうち、初期値 $(q_2)_{\tau=0} = 1.10$ のときを 図-5(b) に、また $(q_2)_{\tau=0} = 1.50$ のときを 図-5(c) に示しておいた。この両図 (b), (c) において時間の増分幅は $\Delta\tau = 0.05$ としてあり、横軸の時間は無負荷のときの 1 次振動周期 ($\tau = 16.27$) を単位としている。

このような計算結果から、不等式 (30) に基づいて、初期値として励起振幅 $[(q_2)_{\tau=0}]$ の値に依存して、系の

安定性が決定されていることがわかる。すなわち条件式 $3\omega_1 = \omega_2$ を満足する荷重のもとでも初期条件として非線形弾性度や初期振幅の値の大小によって系の不安定状態が導かれることがわかった。

以上の解析例から、任意の整数の組 (n_1, n_2) に対して、臨界条件 (28) を満たす系では、不安定状態になり得ることが判明した。

5. 結 論

非線形弾性を有し、非保存力を受ける系の安定問題を、非線形振動問題として解析した結果、系の臨界状態は、振動数条件式 (本文式 (22・b))

$$\sum_{r=1}^s n_r \omega_r = 0 \quad (n_r : \text{整数}, \omega_r : \text{線形系の固有振動数})$$

を満たす荷重値によって得られることがわかった。ただし非線形弾性度を考慮した正確な条件式としては、

$$0 \leq \sum_{r=1}^s n_r \omega_r < |\beta_k| \quad (\beta_k : \text{非線形弾性パラメーター})$$

(本文式 (22・a)) である。ここで s は任意項数をとる。

ここでこの条件式は、線形弾性系における座屈値を与える条件 (たとえば $\omega_1 = 0$: Euler 座屈, $\omega_1 - \omega_2 = 0$: Beck の座屈) をも含むものであること、そして非線形弾性系における任意の整数 n_r の組による条件式に対しては、系のもつ条件 (たとえば非線形度など) に依存して臨界条件を与えるものであることが判明した。

謝 辞：本研究は、現在著者の勤務する兵庫労働基準局淡路労働基準監督署において取りまとめたものである。

同署管内においては、目下大鳴門橋架設工事をはじめ、淡路縦貫道工事、明石海峡大橋調査工事等の本四連絡橋関連工事が急ピッチに行われている。これを迎えて労働災害の防止その他労務管理に対処する署員は一丸となっている。このような中であって、超大規模建設工事の計画・新工法に触れた著者は、自らも研鑽の必要性を感じ、本研究と取り組んでいた。

このような著者を、同署を指揮する片井勝署長にあっては、常に深いご理解とご支援で包んでくれ、また著者の所属する第一課・長尾治課長には研究上の討議・助言を、さらに伊藤常男係長には多忙なる署活動で著者にご配慮をいただくなどをした。また前川和香子氏には原稿作成を手伝っていただき、北井安明専門官をはじめとする署員の方々にも一方ならぬ援助をしていただいた。

ここに改めて、深く感謝の意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) Barsoum, R.S.: Finite Element Method Applied to the Problem of Stability of Nonconservative System,

- Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 3, pp. 63~87, 1971.
- 2) Argyris, J.H. and Sp. Symeonidis : Nonlinear Finite Elements Analysis of Elastic Systems under Nonconservative Loading, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 26, pp. 75~123, 1981.
 - 3) Ziegler, H. : Principles of Structural Stability, Blaisdell Publishing Company, pp. 34~43, pp. 70~74, 1968.
 - 4) 吉川幸雄 : 非保存力を受ける 非線形弾性柱の 曲げ座屈, 土木学会論文報告集, 第318号, pp. 1~6, 1982-2.
 - 5) 山本敏男 : 機械力学, 朝倉書店, pp. 142~145, 1970.
 - 6) 益子正教訳 : ポゴリューボフ, ミトロポリスキー・非線形振動論 (漸近的方法), 共立出版, pp. 330~352, 1961. 北郷 薫・露木洋二 : 振動学, 森北出版, pp. 175~177, 1974.
 - 7) 森口繁一ほか : 数学公式 II 一級数・フーリエ解析, 岩波書店, pp. 183~190, 1957.
 - 8) McLachlan, N.W. : Theory and Application of Mathieu Functions, Dover, New York, 1964.
 - 9) 吉川幸雄 : 非線形弾性柱の 動的安定問題における臨界振動数条件, 第28回構造工学シンポジウム, 1982-2. (1982.9.29・受付)
-