土木学会論文報告集
第336号・1983年8月
【論　　文】

都市高速道路の最適規模と料金水準に関する2，3の理論的考察

SOME THEORETICAL ASPECTS ON OPTIMAL SCALE AND TOLL-RATE OF URBAN EXPRESSWAY

井　上　博　司*
By Hiroshi INOUYE

1．序　　論

都市高速道路と平面街路という2つの異なる性格を有する道路の併存を前提にするとき，それぞれが交通量をどの程度分担するのが望ましいかを考えることは重要である．なぜなら道路は道路網として機能するものであるから，都市高速道路は平面街路とともに一体として計画されねばならないからである．

都市高速道路と平面街路の間の交通の分担関係は社会的にみて公正であり，かつ社会全体の利益を増進させるものでなければならない．両者の交通の分担関係を規定する大きな要素は，都市高速道路の規模および料金水準であると考えられる．都市高速道路の料金は，短期的にみたときに交通の適正分担を達成するための操作手段と考えることができ，また都市高速道路の規模は長期的にみたときの適正分担達成のための操作手段と考えることができる．他方，都市高速道路の経営は公企業であるという立場から公共性と企業性を兼備することが必要である．したがって単なる利益追求は許されず，独立採算企業としての存立の可能性を保持しつつ，社会全体の利益の増進を目途とした経営が要求されるのである．このような都市高速道路の経営に関する制約のもとで，いかに社会的に公正であり，かつ社会全体の利益を増進させるような都市高速道路の規模および料金水準を決定するかが本稿の主題である．

その際考えられねばならないことは，都市高速道路がその都市の機能とどのように結びついており，その都市の将来構想の中でどのように位置づけられているかということ，また都市高速道路がその都市に住み，働く人々の生活環境を侵すものであってはならないということなど多々あるが，都市高速道路の建設が限られた財源をもとに行われるものである以上，都市高速道路による社会全体としての経済性がまず第一義的に考えられなくてはならない．この意味において本稿では，都市高速道路の独立採算が可能であるという条件のもとで，都市高速道路による総合余剰を最大化する都市高速道路の規模および料金水準を決定するという問題を取り扱う．総合余剰はこの場合道路建設による社会全体としての余剰を表わしている．

ところで都市高速道路に限らず，一般に道路の利用者に課せられる料金あるいは税に関しては2つの考え方がある．その1つはフルコストの原則といわれるものであり，これは料金は道路を建設および維持管理するに要する全費用を償うものでなければならないという考え方である．わが国の現行の都市高速道路の料金決定原則は償還主義と公正妥当が適用されることになっているので，フルコスト原則に近い考え方に立つものである．この原則に基づく料金水準は，道路に対する需要が大きいときには安い料金で多くの利用者にサービスを提供するものとなり，この結果都市高速道路上に交通の輻輳を招来する．このため道路の最適利用という点からは必ずしも好ましくない状態になり，これを防ぐためには道路の利用者にさらに追加的負担を求め需要を調節するいわゆる混雑料金を課すことが必要となる．このような考え方を可能にするのが限界費用価格形成原理である．これは経済的効率性という面からみた道路の最適利用を達成するために，道路の利用に対する料金をトリップの限界費用に等しく設定するという考え方である．ただし限界費用価格形成原理が適用され得るためには，道路の提供者の側の収入が費用を上回るものでなければならない．この際生じる余剰が交通安全対策や自動車騒音対策等道路の追加投資にあてられるならば，混雑料金は償還主義の考え方に反するものではないといえるだろう．

都市高速道路の最適な規模と料金水準を合理的に決定する理論として山田によって提案された非常に興味深いモデルがある[1]．山田のモデルでは都市内の自動車トリ

* 正会員　工博　岡山大学助教授　工学部土木工学科

ップのトリップ長分布が指数分布に従うことが基本的な前提になっており，これより高速道路の料金収入がちょうど建設費を償うという条件のもとで，消費者余剰を最大にする規模と料金水準が求められている．しかし山田自身が指摘しているように，山田のモデルでは交通混雑による走行時間費用の増加ということが考慮されていないし，また収支均等という厳しい制約のもとに分析が行われており，実用のためにはこれらの点についてのモデルの改良あるいは拡張が考慮されるべきである．山田の理論は都市高速道路の均一料金圏を決定する佐佐木のモデル[2]を発展させたものと考えられる．佐佐木のモデルでは交通渋滞を引き起こさせない料金額で建設費を償還することのできる最大の圏域を均一料金圏とすべきであると提案している．これは都市高速道路網として一体的に考えるべき規模を示したものと解釈することができよう．これらの理論的な研究に対し，実際の社会的・経済的条件下での都市高速道路の最適規模を求めたものとして飯田の研究[3]がある．飯田は料金収入によってサービス総費用の償還が可能な道路規模のうち利用車数が最大となるものを最適規模と定義し，実際の OD 交通量および都市高速道路網の形態を考慮して北九州市高速道路網の最適な規模を計算している．一方，限界費用価格形成原理に基づいて混雑税を明解に説明したものとしては岡野の研究[4],[5]がある．岡野は道路が社会的にみて最も効率的に利用されるように料金を決定することが望ましいとし，混雑時における道路の最適利用を達成するための混雑税を限界費用価格形成原理に基づいて明解に説明し，混雑税を含めた収入がその道路の建設費を賄う場合の条件を導いている．ただし岡野の理論は道路一般を対象にしたものであり，都市高速道路と平面街路のような競合的関係は考慮されていない．なお混雑費用の概念を用いて山田の理論の拡張を試みたものとして明神・浅井の研究[6]がある．しかしこの研究では消費者余剰を最大にする最適解は料金収入が建設費を償うことのできる最大規模の点にあると仮定されているがその理論的根拠は明らかにされていないし，またこの仮定は後に明らかにされるように正しくない．

本稿はこれらの研究成果に基づいて主として山田の理論の拡張・発展を試みたものであり，交通混雑によるトリップ費用の増加を考慮に入れ，都市高速道路の採算が可能であるという条件のもとで総合余剰を最大にする規模および料金水準はいかなるものであるかを考察している．またその最適料金，最適規模と限界費用価格形成原理およびフルコスト原則との関係を明らかにし，最適解がそれぞれの原理・原則に従う場合の条件を導いている．

なおモデルの拡張・発展は主として次の諸点について行われている．

① 山田のモデルでは旅行時間は交通量に依存しないものとされているが，これを交通量および規模の関数として取り扱う．

② 山田のモデルでは都市高速道路を建設および維持管理するに要する総費用が規模だけの関数であると仮定されているが，これをより現実的に規模および交通量の関数とする．

③ 山田のモデルでは料金収入が総費用に等しくなければならないという厳しい条件が設定されているが，これを料金収入は総費用を下回らないという実用的な条件に緩める．

④ 山田のモデルでは消費者余剰の最大化が考えられているが，これを道路建設によって得られる社会全体の余剰を意味する総合余剰の最大化に置き換える．

なお山田のモデルでは問題を単純化するためにいくつかの仮定が設けられているが，次の仮定は本稿においても用いられている．

① 都市内の交通を同質的な交通としてしたがって車種は一種類として扱う．

② 料金徴収の行われる全期間を一期間とする．つまり高速道路建設の時間的な遅れや交通需要の増大は考えず，問題を静学的に扱う．

③ 高速道路料金は利用距離によって変わらない均一料金とする．

本稿においては各路線の車線数と延長距離の積の総和を都市高速道路の規模と定義する．ただしこの定義では同じ規模のもとで車線数と延長距離の組合せがいろいろ考えられるが，通常都市高速道路の建設はまず交通の錯綜する都心部から行われ，しだいに路線が郊外に延伸されてくるものであるから，このような拡張過程を規模の定義の中に含めて考える．すなわち規模を一定の拡張過程に沿ったものとして考えている．現実に都市高速道路の最適な規模が議論されるのは主として郊外に延伸される放射状の路線をどの程度にまで延ばすかという問題であり，したがってここで扱っている規模はおおむね路線延長距離と同義である．なお通常都市高速道路においては交通量の多い都心部等の路線では車線数も多く，このため高速道路のサービスレベルはおおむねすべての路線にわたって一様であると考えることができよう．それゆえ上記の仮定に加えて次の仮定を設定する．

④ 高速道路のサービスレベルはすべての路線にわたって一様である．

なお本稿では車種構成を1車種とした場合のほか，平均トリップ長と時間価値の違う2車種を考慮した場合の分析も行っている．

2．都市高速道路の均衡需要

ここでは山田のモデルに倣い，都市高速道路に対する需要関数を誘導する．山田のモデルは都市高速道路に対する需要を非常にマクロな立場からとらえようとするものであり，都市内での自動車交通のトリップ長分布をもとにして明解に需要関数を誘導している．しかしこのモデルでは都市高速道路の空間的な配置や対象地域の OD パターン等について何らの仮定もなされていない．このため需要関数を導出するにあたってきわめて強い仮定が設けられている．これは特定の都市の交通政策に直接に寄与する知見を見出すことが目的ではなく現実の都市の自動車交通を大胆に抽象化し，マクロな立場から都市交通をとらえたときに，都市高速道路の最適な規模，料金水準はいかなるものであるべきかを記述解明することに主眼が置かれているためである．このためには需要関数を明解な形に誘導し，理論的な分析と解の解釈を容易にする必要があり，ある程度のモデルの簡単化，現象の近似はやむを得ないものと考えられる．山田のモデルでは都市高速道路の交通需要を誘導するために次のことが仮定されている．

① 都市内で任意の起点から終点まで旅行する場合に，高速道路を通った場合のトリップ長も街路を通った場合のトリップ長も等しい．

② 起終点から高速道路へのアクセス，イグレスの長さは一定であり，またアクセスの長さとイグレスの長さは等しい．

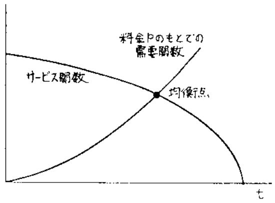
③ 各トリップメーカーは，高速道路を利用した場合の節約時間の価値が料金を上回るとき必ず高速道路を選択する．

④ 時間価値は各トリップメーカーに対して一定である．

⑤ 都市内のカートリップのトリップ長分布は指数分布に従う．

ここでこれらの仮定について若干説明しておこう．仮定 ① については，高速道路を利用する場合，高速道路へのアクセス，イグレスの距離が付加されるが，高速道路は平面街路よりも一般に曲折が少なく，このため合計距離は両経路でそう大差がないのが普通である．仮定 ② については，起終点から高速道路へのアクセス，イグレスの長さは何らかの確率分布に従うものと考えられるが，アクセス，イグレスの長さは一般的にはトリップ長に比べてそう大きくはないので，これを単位分布で近似しても需要量はさほど変わらないであろう．ただし，アクセス，イグレスの長さはともに高速道路の規模によって変化すると考えられる．仮定 ③ は料金時間を考慮した等時間原則と考えられ，一般に運転者は経路選択にあたっては走行時間がなるべく少ない経路を選択しようとする傾向が強いといわれている．仮定 ④ については時間価値は何らかの分布形に従うものと考えられるが，これも簡単のため単位分布で近似するものである．時間価値を一定値に仮定することは高速道路の交通需要推定では通常よく行われている．

いま都市内の全交通量を Q_a，そのうち高速道路を利用する全交通量を q とする．高速道路および街路を単位長さ走行するのに要する 1 台当たりの走行時間を t_e，t_s とし，これらは単純に高速道路の全利用交通量 q および規模 x の関数であると仮定する．ここで一般街路の走行時間 t_s は Q_a-q を介して q の関数として取り扱っている．この点で高速道路交通量の一般街路走行速度への影響を考慮している．もちろん $\partial t_e/\partial q>0$, $\partial t_s/\partial q<0$ であるがさらに $\partial^2 t_e/\partial q^2>0$, $\partial^2 t_s/\partial q^2>0$ であるとする．また一般に都市高速道路の全体としての容量は平面街路の容量に比べてそう大きくはないので $\partial^2 t_e/\partial q^2>\partial^2 t_s/\partial q^2$ と仮定する．高速道路を通った場合も街路を通った場合もトリップ長は等しいという仮定から，トリップ長 l の需要者が高速道路を選択することによる節約時間は，起終点と高速道路とのアクセス，イグレスの長さを l_1 とすると $(l-2l_1)(t_s-t_e)$ と表わされる．そこで $t=t_s-t_e$ とおくと，t は高速道路を単位距離利用することによる節約時間に等しく，これは高速道路のサービス水準を表わしているものと考えることができる．もちろん t は高速道路の交通量 q および規模 x の関数 $t=t(q,x)$ であり，これをサービス関数とよぶことにする．ここで前記の仮定から $\partial t/\partial q<0$, $\partial^2 t/\partial q^2<0$ である．



図—1 需要関数およびサービス関数

さて高速道路の利用交通量は，一定規模のもとではサービス水準 t と料金 p によって決まると考えられる．もちろん任意の料金 p のもとで，需要はサービス水準 t に関する単調増加関数である．このとき任意の料金のもとでのサービスと需要の均衡点は，サービス関数と需要関数の交点で与えられる．この均衡需要量を料金の関数として表わしたものを均衡需要関数とよぶことにする．

都市内でのカートリップのトリップ長 l の分布を平均値 $1/\mu$ の指数分布 $f(l)=\mu e^{-\mu l}$，単位時間当たりの時間価値を ω とすると，高速道路が利用されるのはトリップ長が $(l-2l_1)\omega t>p$ を満足するときであるから，高速道路の利用交通量 q は

$$q=Q_a\int_{2l_1+p/\omega t}^{\infty}f(l)dl=Q_a e^{-\mu(2l_1+p/\omega t)} \cdots\cdots (1)$$

によって表わされる．ここで $Q_a e^{-2\mu l_1}$ はトリップ長が $2l_1$ 以上の全交通量であり，これは高速道路を利用する可能性のある交通量を表わしている．この意味でこれを転換対象交通量とよび，Q で表わす．アクセスとイグレスの距離 $2l_1$ は高速道路の規模によって変化するから，転換対象交通量は高速道路の規模 x の関数 $Q=Q(x)$ である．このとき高速道路の交通量は

$$q=Q(x)e^{-\mu p/\omega t} \cdots\cdots (2)$$

となる．式 (2) は需要関数を表わしている．均衡需要関数は式 (2) とサービス関数 $t=t(q, x)$ との交点で与えられる．すなわち方程式

$$q=Q(x)e^{-\mu p/\omega t(q,x)} \cdots\cdots (3)$$

を交通量 q について解いた解が均衡需要関数である．しかしこれはサービス関数 $t=t(q, x)$ の関数形が定まらないと求められないので，ここでは均衡需要関数の逆関数を求めることにする．この逆関数は方程式 (3) を p について解くことによって

$$p=\frac{\omega}{\mu}t(q, x)\log\frac{Q(x)}{q} \cdots\cdots (4)$$

となる．式 (4) において

$$\frac{\partial p}{\partial q}=\frac{\omega}{\mu}\cdot\frac{\partial t}{\partial q}\log\frac{Q(x)}{q}-\frac{\omega}{\mu}\cdot\frac{t(q, x)}{q} \cdots\cdots (5)$$

であり，高速道路が利用される範囲では明らかに $\partial t/\partial q<0$, $q<Q(x)$ および $t(q, x)>0$ が成り立つから $\partial p/\partial q<0$ である．これは均衡需要関数上で $\partial q/\partial p<0$ すなわち料金が増加するとき交通量は必ず減少することを表わしている．したがって任意の規模のもとで交通量 q と料金 p とは1対1に対応しており，以下においては逆需要関数を用いて p の代わりに q を変数として扱う．ところで料金 p が0に漸近するときの利用交通量は次のようになると考えられる．仮定 ③ よりもし走行時間が交通量によって変わらないならば，料金が0のときトリップ長が $2l_1$ 以上のすべてのトリップが高速道路を利用することになる．しかし走行時間が交通量によって変わることを前提にすると，高速道路の交通量が増えてくると高速道路の走行時間が増加し，逆に平面街路の走行時間が減少するため節約時間が減少し，この結果高速道路を用いても平面街路を用いても走行時間が変わらないという状態，いわゆる等時間原則の平衡状態に至ると考えられる．このときの高速道路の交通量は両経路で走行時間が等しいということより

$$t(q, x)=t_s(Q_a-q, x)-t_e(q, x)=0$$

の解である．この料金が0のときの高速道路の交通量を Q_0，走行時間を t_0 としよう．もちろん Q_0 は規模 x の関数 $Q_0=Q_0(x)$ と考えられる．均衡需要関数が単調減少であることより $p>0$ のとき $q<Q_0(x)$ である．また $\partial t_e/\partial q>0$, $\partial t_s/\partial q<0$ と仮定されているのでこのとき $t_e<t_0$, $t_s>t_0$ となり，したがって $t=t_s-t_e>0$ となる．このことより一般に $p>0$ の範囲においては $0<q<Q_0(x)$ が成り立ち，またこのとき $t(q, x)>0$ と考えることができる．それゆえ以下では考察の範囲を $0<q<Q_0(x)$ に限定する．

なお高速道路の平均利用区間長は

$$\bar{l}=\frac{\int_{2l_1+p/\omega t}^{\infty}(l-2l_1)f(l)dl}{\int_{2l_1+p/\omega t}^{\infty}f(l)dl}=\frac{1}{\mu}+\frac{p}{\omega t}$$
$$=\frac{1}{\mu}\left(1+\log\frac{Q(x)}{q}\right) \cdots\cdots (6)$$

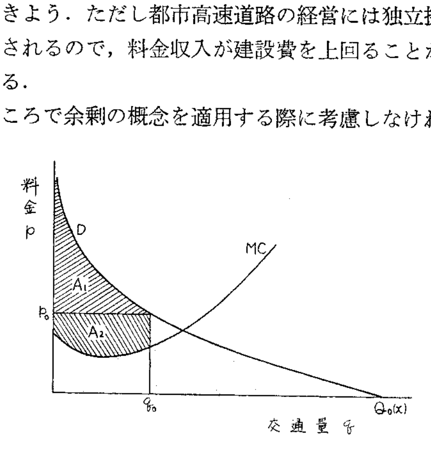
となる．

3. 総合余剰および採算性の条件

(1) 定式化

図—2 においてDは都市高速道路に対する需要交通量を，MC は都市高速道路を建設および維持管理するのに必要な限界費用を表わしている．高速道路が料金 p_0 で供用され，このときの需要量が q_0 であるとする．このとき面積 A_1 は利用者が支払い意志を有している料金と実際に支払われた料金との差の全利用者に対する和を表わしており，経済学では消費者余剰とよばれる．一方面積 A_2 は道路の供給者がサービスを提供することによって得た料金収入と高速道路を建設および維持管理するのに要する総費用との差に等しく，生産者余剰とよばれる．消費者余剰と生産者余剰との和は総合余剰とよばれ，これは社会全体としてみた道路投資による余剰と考えられる．この総合余剰が最大になるように路線延長距離および料金水準が決められるとき，道路の規模が最適でありかつその道路が最適に利用されているということができよう．ただし都市高速道路の経営には独立採算が要求されるので，料金収入が建設費を上回ることが条件となる．

ところで余剰の概念を適用する際に考慮しなければな



図—2 消費者余剰および生産者余剰

らないことは，料金水準によって交通量が変わるのでこのときサービス水準が変化しているということである．それゆえ高速道路利用者の余剰を求める際，節約時間の価値の変化が考慮されなければならない．

いま p なる料金水準で市場に参入してくる需要者を考えよう．この需要者は料金水準が p のとき節約時間の価値がちょうど料金に等しいということから，トリップ長が $l=2l_1+p/\omega t(q,x)$ の需要者である．この需要者が交通量 q_0 に対応する料金水準 $p_0(<p)$ で高速道路サービスを受けるときの余剰は，このときの交通量を q_0 とすると，

$$(p-p_0)+(l-2l_1)\omega\{t(q_0,x)-t(q,x)\}$$
$$=(l-2l_1)\omega t(q_0,x)-p_0=p\frac{t(q_0,x)}{t(q,x)}-p_0 \quad\cdots\cdots(7)$$

であると考えられる．ここで，均衡需要関数の逆関数 (4) を代入し，高速道路の全利用者に対する余剰を求めると

$$S=\int_0^{q_0}\left\{p\frac{t(q_0,x)}{t(q,x)}-p_0\right\}dq$$
$$=\frac{\omega}{\mu}q_0t(q_0,x) \quad\cdots\cdots(8)$$

となる．したがって一般に交通量 q に対応する料金 p のもとでの高速道路の利用者の余剰は $S=(\omega/\mu)qt(q,x)$ となる．これを高速道路の需要者余剰とよぶことにし，S_u で表わす．

一方高速道路を建設および維持・管理するのに要する総費用を高速道路の交通量 q および規模 x の関数として $C=C(q,x)$ で表わすと，都市高速道路の経営が成り立つためには $pq-C\geqq 0$ でなければならないから，

$$\frac{\omega}{\mu}qt(q,x)\log\frac{Q(x)}{q}-C(q,x)\geqq 0 \quad\cdots\cdots(9)$$

が成り立たなければならない．式 (9) の左辺は生産者余剰 S_p に等しいから総合余剰 S_t は

$$S_t=\frac{\omega}{\mu}qt(q,x)+\frac{\omega}{\mu}qt(q,x)\log\frac{Q(x)}{q}$$
$$-C(q,x) \quad\cdots\cdots(10)$$

と表わされる．高速道路の平均利用区間長は $(1/\mu)\{1+\log(Q(x)/q)\}$ に等しいから，総合余剰は高速道路利用者の節約時間の総和と道路を建設および維持・管理するのに要する総費用との差に等しい．本稿においては採算性の条件 (9) のもとで総合余剰 (10) を最大にする都市高速道路の規模および料金水準を最適規模および最適料金，またそのときの交通量を最適交通量ということにする．

（2） 総合余剰および生産者余剰の凸性について

定式化された問題は，都市高速道路の交通量 q および規模 x を変数とする不等式制約条件付きの非線形計画問題である．非線形計画法の理論では，凸な制約領域で凸な関数を最小にするいわゆる凸計画でなければ取扱いがきわめて困難であり，また実際上の観点からも高速道路の建設が計画されているような場合にはこのような凸性が満足されているものと思われるので，問題を凸計画の場合に限定しても差し支えないであろう．そこで生産者余剰および総合余剰について次のような制約想定を設ける．

① 生産者余剰が正の値をもつ $0<q<Q_0$ なる交通量 q および規模 $x>0$ が存在する．

② 生産者余剰および総合余剰は，生産者余剰が非負の値をとる変数の領域において狭義凹関数である．

これらの制約想定は，制約条件の満足される変数の領域が空でない凸集合であり，また目的関数が単峰であって唯一の最適解が存在することを保証するものである．制約想定 ① は

$$\frac{\omega}{\mu}qt(q,x)\log\frac{Q(x)}{q}-C(q,x)>0 \quad\cdots\cdots(11)$$

を満足する $0<q<Q(x)$ および $x>0$ が存在することを仮定するものであるが，式 (9) より等号が除かれているから制約条件が唯一の点でのみ満足される場合が除外されている．これはこのような場合，採算の成り立つ交通量および規模が一義的に決まってしまうので，最適性の議論をすることは無意味であると考えられるからである．もしサービス関数 $t(q,x)$ が交通量および規模に依存しないで一定であり，かつ総費用が規模だけの関数であると仮定されるならば，$q\log(Q(x)/q)$ を最大にするのは $q=Q(x)/e$ においてであるから，制約想定 ① は

$$\frac{\omega}{\mu}\cdot\frac{Q(x)}{e}t-C(x)>0 \quad\cdots\cdots(12)$$

を満足する $x>0$ が存在することを仮定するものとなる．

制約想定 ② に関しては，生産者余剰および総合余剰が生産者余剰が非負の領域において狭義凹関数であるためには，その領域においてそれらのヘッシアン行列が負定値であればよい．生産者余剰のヘッシアン行列 H_p および総合余剰のヘッシアン行列 H_t はそれぞれ次のように表わされる．

なお以下においては変数を特に明示する必要のある場合を除き，転換対象交通量 $Q(x)$，費用関数 $C(q,x)$，時間関数 $t(q,x)$ をそれぞれ Q,C,t で表わしている．

$$H_p=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 S_p}{\partial q^2} & \dfrac{\partial^2 S_p}{\partial q\partial x}\\ \dfrac{\partial^2 S_p}{\partial x\partial q} & \dfrac{\partial^2 S_p}{\partial x^2}\end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix}
\dfrac{\omega}{\mu}\left\{qt_{qq}''\log\dfrac{Q}{q}+2t_q'\log\dfrac{Q}{q}-2t_q'-\dfrac{t}{q}\right\}-C_{qq}'' & \dfrac{\omega}{\mu}\left\{qt_{qx}''\log\dfrac{Q}{q}+qt_q'\dfrac{Q'}{Q}+t_x'\log\dfrac{Q}{q}-t_x'+t\dfrac{Q'}{Q}\right\}-C_{qx}'' \\
\dfrac{\omega}{\mu}\left\{qt_{qx}''\log\dfrac{Q}{q}+qt_q'\dfrac{Q'}{Q}+t_x'\log\dfrac{Q}{q}-t_x'+t\dfrac{Q'}{Q}\right\}-C_{qx}'' & \dfrac{\omega}{\mu}\left\{qt_{xx}''\log\dfrac{Q}{q}+2qt_x'\dfrac{Q'}{Q}+qt\dfrac{Q''Q-Q'^2}{Q^2}\right\}-C_{xx}''
\end{bmatrix}\cdots\cdots(13)
$$

$$
H_t=\begin{bmatrix}
\dfrac{\partial^2 S_t}{\partial q^2} & \dfrac{\partial^2 S_t}{\partial q\partial x} \\
\dfrac{\partial^2 S_t}{\partial x\partial q} & \dfrac{\partial^2 S_t}{\partial x^2}
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
\dfrac{\omega}{\mu}\left\{qt_{qq}''\log\dfrac{Q}{q}+qt_{qq}''+2t_q'\log\dfrac{Q}{q}-\dfrac{t}{q}\right\}-C_{qq}'' & \dfrac{\omega}{\mu}\left\{qt_{qx}''\log\dfrac{Q}{q}+qt_{qx}''+qt_q'\dfrac{Q'}{Q}+t_x'\log\dfrac{Q}{q}+t\dfrac{Q'}{Q}\right\}-C_{qx}'' \\
\dfrac{\omega}{\mu}\left\{qt_{qx}''\log\dfrac{Q}{q}+qt_{qx}''+qt_q'\dfrac{Q'}{Q}+t_x'\log\dfrac{Q}{q}+t\dfrac{Q'}{Q}\right\}-C_{qx}'' & \dfrac{\omega}{\mu}\left\{qt_{xx}''\log\dfrac{Q}{q}+qt_{xx}''+2qt_x'\dfrac{Q'}{Q}+qt\dfrac{Q''Q-Q'^2}{Q^2}\right\}-C_{xx}''
\end{bmatrix}\cdots\cdots(14)
$$

ここに $t_{qq}''=\partial^2 t/\partial q^2$, $t_{qx}''=\partial^2 t/\partial q\partial x$, $t_{xx}''=\partial^2 t/\partial x^2$, $t_q'=\partial t/\partial q$, $t_x'=\partial t/\partial x$, $C_{qq}''=\partial^2 C/\partial q^2$, $C_{qx}''=\partial^2 C/\partial q\partial x$, $C_{xx}''=\partial^2 C/\partial x^2$, $Q'=dQ/dx$, $Q''=d^2Q/dx^2$ である．

行列 H_p および H_t が負定値であることは生産者余剰および総合余剰が凹関数であるための一般的な条件であるが，サービス関数あるいは総費用関数がある特殊な形の場合にはこれらは非常に簡単な条件になる．まずサービス関数について考えよう．サービス関数は交通量 q および規模 x の双方の関数であると仮定されているが，本研究では路線上の交通サービスの一様性が前提になっているので，サービスレベルは近似的には単位規模当たりの交通量すなわち q/x によって決まるとも考えることができる．そこで $t(q,x)=t(q/x)$ とすると，需要者余剰 $S_u=(\omega/\mu)qt(q/x)$ のヘッシアン行列は

$$
H_u=\begin{bmatrix}
\dfrac{\partial^2 S_u}{\partial q^2} & \dfrac{\partial^2 S_u}{\partial q\partial x} \\
\dfrac{\partial^2 S_u}{\partial x\partial q} & \dfrac{\partial^2 S_u}{\partial x^2}
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
t'\dfrac{2}{x}+t''\dfrac{q}{x^2} & -\dfrac{q}{x}\left(t'\dfrac{2}{x}+t''\dfrac{q}{x^2}\right) \\
-\dfrac{q}{x}\left(t'\dfrac{2}{x}+t''\dfrac{q}{x^2}\right) & \dfrac{q^2}{x^2}\left(t'\dfrac{2}{x}+t''\dfrac{q}{x^2}\right)
\end{bmatrix}\cdots\cdots(15)
$$

となる．ここに $t'=dt/d(q/x)$, $t''=d^2t/d(q/x)^2$ である $t'<0$, $t''<0$ であると仮定されているので

$$
t'\frac{2}{x}+t''\frac{q}{x^2}<0
$$

また $\det H_u=0$ であるから行列 H_u は半負定値であり，したがって需要者余剰 S_u は凹関数である．よってこのとき総合余剰が狭義凹関数であるためには，生産者余剰が狭義凹関数であればよいことになる．

次に総費用について考えると，規模が大きくなり路線が郊外に延びてくると，構造上の制約が緩和され用地価格も安くなることから，建設費用は規模に対して逓減的に増加するものと思わオる．維持管理費用については近似的に単位距離当たりの交通量に比例すると考えてもよいであろう．そこで単位距離当たりの総費用は，規模に依存する固定費用 $C_f(x)$ と単位距離当たりの交通量に比例する可変費用 $C_m q/x$ の和で表わされると仮定する．このとき路線総延長に対する総費用は，

$$
C=x\left\{C_f(x)+C_m\frac{q}{x}\right\}
=C_f(x)x+C_m q\cdots\cdots(16)
$$

と表わされる．このとき $\partial^2 C/\partial q^2=0$, $\partial^2 C/\partial q\partial x=0$ である．さらにサービスレベルが交通量および規模に依存しないで一定であるとしよう．これは交通量が比較的小さくて混雑が生じない状態であることを意味する．このとき $t_{qq}''=t_{qx}''=t_{xx}''=t_q'=t_x'=0$ であるから，行列 H_p および H_t は，

$$
H_p=H_t=\begin{bmatrix}
-\dfrac{\omega}{\mu}\cdot\dfrac{t}{q} & \dfrac{\omega}{\mu}\cdot\dfrac{tQ'}{Q} \\
\dfrac{\omega}{\mu}\cdot\dfrac{tQ'}{Q} & \dfrac{\omega}{\mu}tq\dfrac{Q''Q-Q'^2}{Q^2}-C_{xx}''
\end{bmatrix}\cdots\cdots(17)
$$

となる．ここで $-\omega t/\mu q<0$ であるから，H_p および H_t が負定値であるためには

$$
\det H_p=-\left(\frac{\omega}{\mu}\right)^2 t^2\frac{Q''}{Q}+\frac{\omega}{\mu}\cdot\frac{t}{q}C_{xx}''>0
$$

であればよい．すなわち生産者余剰が非負の値をとる変数の領域において

$$
\frac{Q''(x)}{Q(x)}<\frac{C_{xx}''}{\dfrac{\omega}{\mu}tq}\cdots\cdots(18)
$$

が成り立てばよい．式 (18) は，規模が大きくなるとき，転換対象交通量の増加の割合が総費用の増加の割合より相対的により逓減的でなければならないことを意味するものと解釈できよう．さもなければ規模が大きいほど生産者余剰は大きくなり，実用的な意味での最適な規模は存在しないことになる．

山田は総費用が規模のみに依存し，しかも規模に対して比例的に増加するものとしているが，この場合には $C_{xx}''=0$ であるから式 (18) は

$$Q''(x)<0 \cdots\cdots(19)$$

となる．この意味において山田が「転換対象交通量は延長距離の増加に対して最初は逓減的に，ついで逓増的に増加すると考えることができるが，現実に道路の規模が決定されるのは明らかに転換対象交通量が規模に対して逓減的な範囲である」として，この範囲で $Q''(x)<0$ を前提として理論を展開しているのは正当であるといえる．

以下においては，サービス関数および総費用関数は必ずしもここで述べたような特殊な形をしたものではなく，一般的な都市高速道路の総交通量 q および規模 x の関数として取り扱うが，制約想定 ① および ② は満足されるものであることを前提としておく．

4. 総合余剰の最大化

(1) 最適性の必要十分条件

高速道路の採算が可能であるという条件のもとで総合余剰を最大化する問題は，制約条件 (9) のもとで目的関数 (10) を最大化する数理計画問題に帰着した．制約想定 ① および ② よりこの数理計画問題は凸計画であり，しかも唯一の最適解が存在する．

いまラグランジェの未定乗数を λ とし，ラグランジェ関数を

$$\phi(q,x)=\frac{\omega}{\mu}qt(q,x)+\frac{\omega}{\mu}qt(q,x)\log\frac{Q(x)}{q}-C(q,x)+\lambda\left\{\frac{\omega}{\mu}qt(q,x)\log\frac{Q(x)}{q}-C(q,x)\right\} \cdots\cdots(20)$$

とおく．このとき制約条件 (9) のもとで目的関数 (10) を最大にする交通量 q および規模 x は，Kuhn-Tucker の定理より次の条件 (21)～(25) を満足するものである．

$$\frac{\partial\phi}{\partial q}=\frac{\omega}{\mu}qt_q'+\frac{\omega}{\mu}qt_q'\log\frac{Q}{q}+\frac{\omega}{\mu}t\log\frac{Q}{q}-C_q'+\lambda\left\{\frac{\omega}{\mu}qt_q'\log\frac{Q}{q}+\frac{\omega}{\mu}t\log\frac{Q}{q}-\frac{\omega}{\mu}t-C_q'\right\}=0 \cdots\cdots(21)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\omega}{\mu}qt_x'+\frac{\omega}{\mu}qt_x'\log\frac{Q}{q}+\frac{\omega}{\mu}qt\frac{Q'}{Q}-C_x'+\lambda\left\{\frac{\omega}{\mu}qt_x'\log\frac{Q}{q}+\frac{\omega}{\mu}qt\frac{Q'}{Q}-C_x'\right\}=0 \cdots\cdots(22)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}=\frac{\omega}{\mu}qt\log\frac{Q}{q}-C\geqq 0 \cdots\cdots(23)$$

$$\lambda\left\{\frac{\omega}{\mu}qt\log\frac{Q}{q}-C\right\}=0 \cdots\cdots(24)$$

$$\lambda\geqq 0 \cdots\cdots(25)$$

ところで生産者余剰が最大になるのは

$$\frac{\partial S_p}{\partial q}=\frac{\omega}{\mu}qt_q'\log\frac{Q}{q}+\frac{\omega}{\mu}t\log\frac{Q}{q}-\frac{\omega}{\mu}t-C_q'=0 \cdots\cdots(26)$$

$$\frac{\partial S_p}{\partial x}=\frac{\omega}{\mu}qt_x'\log\frac{Q}{q}+\frac{\omega}{\mu}qt\frac{Q'}{Q}-C_x'=0 \cdots\cdots(27)$$

を満足する q, x においてであるが，この点においては，

$$\frac{\partial S_t}{\partial q}=\frac{\omega}{\mu}qt_q'+\frac{\omega}{\mu}t$$

$$\frac{\partial S_t}{\partial x}=\frac{\omega}{\mu}qt_x'$$

となる．ところで $t>0$, $t_x'>0$, $C_q'>0$ であり，また式 (26) より，

$$\frac{\omega}{\mu}qt_q'+\frac{\omega}{\mu}t=\frac{\frac{\omega}{\mu}t+C_q'}{\log\frac{Q}{q}}>0$$

が成り立つから，生産者余剰が最大になる点においては $\partial S_t/\partial q>0$, $\partial S_t/\partial x>0$ である．これは生産者余剰最大の点では総合余剰が最大になることはなく，総合余剰が最大になるのは生産者余剰が最大になる交通量，規模よりも大きな交通量，規模においてであることを意味するものである．したがって総合余剰最大の点においては，

$$\frac{\partial S_p}{\partial q}=\frac{\omega}{\mu}qt_q'\log\frac{Q}{q}+\frac{\omega}{\mu}t\log\frac{Q}{q}-\frac{\omega}{\mu}t-C_q'<0 \cdots\cdots(28)$$

$$\frac{\partial S_p}{\partial x}=\frac{\omega}{\mu}qt_x'\log\frac{Q}{q}+\frac{\omega}{\mu}qt\frac{Q'}{Q}-C_x'<0 \cdots\cdots(29)$$

が成り立つ．

(2) 最適解の性質

kuhn-Tucker 条件 (21)～(25) を満足する最適解については，ラグランジェの未定乗数の値によって $\lambda=0$ および $\lambda>0$ の 2 つのケースに分けることができるが，これは総合余剰を最大にする点すなわち

$$\frac{\partial S_t}{\partial q}=\frac{\omega}{\mu}qt_q'+\frac{\omega}{\mu}qt_q'\log\frac{Q}{q}+\frac{\omega}{\mu}t\log\frac{Q}{q}-C_q'=0 \cdots\cdots(30)$$

$$\frac{\partial S_t}{\partial x}=\frac{\omega}{\mu}qt_x{}'+\frac{\omega}{\mu}qt_x{}'\log\frac{Q}{q}+\frac{\omega}{\mu}qt\frac{Q'}{Q}-C_x{}'=0 \quad\cdots\cdots(31)$$

を満足する q, x が制約領域

$$\frac{\omega}{\mu}qt\log\frac{Q}{q}-C\geqq 0 \quad\cdots\cdots(32)$$

の内または境界上にあるかあるいは外にあるかの違いである．

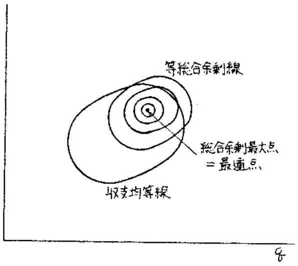
最適解の第1のケースは $\lambda=0$ に対応する状態，すなわち，

$$\frac{\omega}{\mu}qt_q{}'+\frac{\omega}{\mu}qt_q{}'\log\frac{Q}{q}+\frac{\omega}{\mu}t\log\frac{Q}{q}-C_q{}'=0 \quad\cdots\cdots(33)$$

$$\frac{\omega}{\mu}qt_x{}'+\frac{\omega}{\mu}qt_x{}'\log\frac{Q}{q}+\frac{\omega}{\mu}qt\frac{Q'}{Q}-C_x{}'=0 \quad\cdots\cdots(34)$$

$$\frac{\omega}{\mu}qt\log\frac{Q}{q}-C\geqq 0 \quad\cdots\cdots(35)$$

を満足する点が最適解となる場合である．これは総合余剰最大の点が制約領域の内または境界上にある場合であり，このときには制約条件は直接には効いていないので，総合余剰最大の点が最適点となる．したがって最適点は方程式 $\partial S_t/\partial q=0$ および $\partial S_t/\partial x=0$ の解により与えられるのである．式 (35) において等式が成り立つのは総合余剰最大の点が制約領域の境界上に位置する場合であり，この場合を除けば最適料金は平均総費用よりも大きく，したがって高速道路提供者の側には余剰が生じる．



図―3 総合余剰最大点が制約領域の内にある場合の最適点

なお，このとき式 (33) より最適料金は，

$$p=C_q{}'-\frac{\omega}{\mu}\left(1+\log\frac{Q}{q}\right)qt_q{}' \quad\cdots\cdots(36)$$

と表わされる．ここで $\{1+\log(Q/q)\}/\mu$ は高速道路利用者の平均利用区間長に等しい．したがって式 (36) は，最適料金は1台の利用交通量の増加による総費用の増分と，このとき他の利用者に与える節約時間価値の減少分の和に等しくなければならないことを意味している．交通混雑による時間損失を社会的費用と考えると，これは最適料金は交通混雑による社会的費用をも含めた限界総費用に等しくなければならないと解釈することができよう．

ところで高速道路提供者の収支が均等する料金は C/q であるから，両者の差すなわち

$$\Delta p=C_q{}'-\frac{\omega}{\mu}qt_q{}'-\frac{\omega}{\mu}qt_q{}'\log\frac{Q}{q}-\frac{C}{q} \quad\cdots\cdots(37)$$

は高速道路の最適利用を達成するために総費用を償うための金額に追加される負担であり，混雑料金といわれているものに相当する．

一方式 (34) に関しては，

$$C_x{}'=\frac{\omega}{\mu}\left(1+\log\frac{Q}{q}\right)qt_x{}'+\frac{\omega}{\mu}qt\frac{Q'}{Q} \quad\cdots\cdots(38)$$

となるが，右辺第1項は規模が1単位増加するときの走行速度の増大による利用交通量全体に対する節約時間の価値の増分を表わしている．また規模が1単位増加することによる高速道路利用区間の増分は $Q'/\mu Q$ に等しいから，右辺第2項は規模が1単位増加することによる利用区間の増加による節約時間の価値の増分を表わしている．したがって式 (38) は，規模が1単位増加することによる総費用の増分が，このときの利用交通量全体に対する節約時間の価値の増分に等しくなければならないことを意味している．

最適解の第2のケースは $\lambda>0$ に対応する状態，すなわち

$$\frac{\omega}{\mu}qt_q{}'+\frac{\omega}{\mu}qt_q{}'\log\frac{Q}{q}+\frac{\omega}{\mu}t\log\frac{Q}{q}-C_q{}'>0 \quad\cdots\cdots(39)$$

$$\frac{\omega}{\mu}qt_x{}'+\frac{\omega}{\mu}qt_x{}'\log\frac{Q}{q}+\frac{\omega}{\mu}qt\frac{Q'}{Q}-C_x{}'>0 \quad\cdots\cdots(40)$$

$$\frac{\omega}{\mu}qt\log\frac{Q}{q}-C=0 \quad\cdots\cdots(41)$$

$$\frac{\frac{\omega}{\mu}qt_q{}'+\frac{\omega}{\mu}qt_q{}'\log\frac{Q}{q}+\frac{\omega}{\mu}t\log\frac{Q}{q}-C_q{}'}{\frac{\omega}{\mu}qt_q{}'\log\frac{Q}{q}+\frac{\omega}{\mu}t\log\frac{Q}{q}-\frac{\omega}{\mu}t-C_q{}'}=\frac{\frac{\omega}{\mu}qt_x{}'+\frac{\omega}{\mu}qt_x{}'\log\frac{Q}{q}+\frac{\omega}{\mu}qt\frac{Q'}{Q}-C_x{}'}{\frac{\omega}{\mu}qt_x{}'\log\frac{Q}{q}+\frac{\omega}{\mu}qt\frac{Q'}{Q}-C_x{}'} \quad\cdots\cdots(42)$$

を満足する q, x が最適解となる場合である．

これは総合余剰最大の点が制約領域の外にある場合，すなわち式 (30) および (31) を満足する q, x に対して

$$\frac{\omega}{\mu}qt\log\frac{Q}{q}-C<0$$

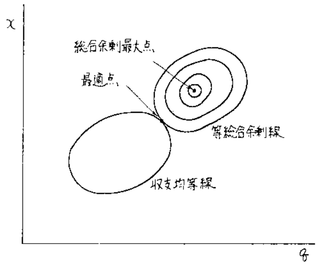
となる場合である．このときには収支均等線 $S_p=0$ と等総合余剰線 $S_t=\text{const.}$ との接点が最適点になるので，最適解は $S_p=0$ および

$$-\lambda=\frac{\partial S_t/\partial q}{\partial S_p/\partial q}=\frac{\partial S_t/\partial x}{\partial S_p/\partial x} \quad\cdots\cdots(43)$$

の解により与えられ，また最適点においては明らかに $\partial S_t/\partial q>0$, $\partial S_t/\partial x>0$ が成り立つのである．

式 (39) は，最適料金は交通量が1台増加したときの総費用の増分とこのとき他の利用者に与える節約時間の価値の減少分との和よりも大きいことを表わしている．

また式 (40) は，規模が1単位増加したときの総費用の増分がこのときのすべての利用者に与える節約時間の価値の増分よりも小さいことを表わしている．式 (41) より，このケースでは料金は平均総費用に等しく，したがって高速道路の提供者の側には余剰は生じない．



図—4　総合余剰最大点が制約領域の外にある場合の最適点

最適解が以上の2つのどのケースに該当するかはサービス関数 $t(q, x)$，総費用関数 $C(q, x)$ および転換対象交通量 $Q(x)$ の性質に依存している．しかしごく大ざっぱにいうならば，最適点において供給者側に余剰が生じ得るためには，潜在需要の大きさを表わす転換対象交通量 $Q(x)$ が大きく，一方総費用 $C(q, x)$ が相対的に小さいことが必要である．

(3)　サービスレベルが一定の場合

次に特殊なケースとしてサービスレベルが一定の場合を考えよう．これは交通量が少なくて混雑が生じない状態であるか，あるいは道路の提供者の側が一定のサービスレベルが確保されるように道路の幅員，線形等の規格を決定する場合である．このときには $t_q{}'=t_x{}'=0$ であるから最適性の条件は，

$$\frac{\partial\phi}{\partial q}=\frac{\omega}{\mu}t\log\frac{Q}{q}-C_q{}'+\lambda\left\{\frac{\omega}{\mu}t\log\frac{Q}{q}-\frac{\omega}{\mu}t-C_q{}'\right\}=0 \quad\cdots\cdots(44)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=(1+\lambda)\left\{\frac{\omega}{\mu}qt\frac{Q'}{Q}-C_x{}'\right\}=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(45)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}=\frac{\omega}{\mu}qt\log\frac{Q}{q}-C\geqq 0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(46)$$

$$\lambda\left\{\frac{\omega}{\mu}qt\log\frac{Q}{q}-C\right\}=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(47)$$

$$\lambda\geqq 0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(48)$$

となる．$\lambda\geqq 0$ であるから式 (43) は

$$\frac{\omega}{\mu}qt\frac{Q'}{Q}-C_x{}'=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(49)$$

と書き変えられる．式 (49) は山田によって，収支均等条件のもとで消費者余剰を最大にするための条件として導かれたものと同じである．これは規模を1単位大きくしたときの総費用の増分すなわち規模限界費用が，このときの利用区間の増大による節約時間価値の増分の全利用者に対する和に等しくなければならないことを表わしている．

最適解はラグランジェの未定乗数の値によって2つのケースに分けることができる．$\lambda=0$ の場合には最適解は

$$\frac{\omega}{\mu}t\log\frac{Q}{q}-C_q{}'=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(50)$$

$$\frac{\omega}{\mu}qt\frac{Q'}{Q}-C_x{}'=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(51)$$

$$\frac{\omega}{\mu}qt\log\frac{Q}{q}-C\geqq 0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(52)$$

の解である．この場合料金は限界費用に等しく，同時にまたそれは平均費用に等しいかあるいは平均費用よりも小さい．

一方 $\lambda>0$ の場合には最適解は

$$\frac{\omega}{\mu}qt\log\frac{Q}{q}-C=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(53)$$

$$\frac{\omega}{\mu}qt\frac{Q'}{Q}-C_x{}'=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(54)$$

$$\frac{\omega}{\mu}t\log\frac{Q}{q}-C_q{}'>0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(55)$$

の解である．この場合には料金は平均総費用に等しく，またそれは限界費用よりも大きい．したがって高速道路の提供者の側には余剰は生じない．

ここで総費用関数を $C=C_f(x)x+C_mq$ としよう．このとき平均総費用は $C_f(x)x/q+C_m$ に等しく，また限界総費用は C_m に等しい．したがって平均総費用は限界総費用よりも大きく，このときには料金が限界総費用に等しく同時に平均総費用よりも大きいことを要求する $\lambda=0$ のケースは起こらない．山田のモデルでは総費用関数は交通量に依存せず規模だけの関数であると仮定されているが，この場合も限界費用は0であるから明らかに $\lambda=0$ の場合は該当せず，$\lambda>0$ の場合だけが起こる．一般に道路を建設および維持管理するに要する総費用については，1トリップ当たりの平均総費用は限界総費用よりも大きいと考えられるので，サービスレベルを一定とみなせる場合には，フルコスト原則に基づく料金が最適料金であると考えることができる．

5．2 車種を考慮する場合

これまでの議論では車種は1種類であるとしてきたが，ここでは平均トリップ長および時間価値の違う2車種の混合交通について考えよう．いま車種1の平均トリップ長を μ_1，時間価値を ω_1，高速道路利用交通量を q_1，転換対象交通量を Q_1，この車種に対する均一料金を p_1，車種2の平均トリップ長を μ_2，時間価値を ω_2，高速道路利用交通量を q_2，転換対象交通量を Q_2，この車種に対する均一料金を p_2 とする．またサービスレベルは車種1および車種2の交通量および規模の関数として $t(q_1, q_2, x)$ と表わされるものとする．同様に総費用関数も車種1および車種2の関数として $C(q_1, q_2, x)$ と表わ

されるものとする．その他は **2**．で述べた前提がこの場合にも成り立つものとする．

この場合車種 1，車種 2 に対する逆均衡需要関数は，

$$p_1=\frac{\omega_1}{\mu_1}t(q_1,\ q_2,\ x)\log\frac{Q_1(x)}{q_1}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(56)$$

$$p_2=\frac{\omega_2}{\mu_2}t(q_1,\ q_2,\ x)\log\frac{Q_2(x)}{q_2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(57)$$

となり，また総合余剰は

$$\begin{aligned}S_t=&\frac{\omega_1}{\mu_1}q_1t(q_1,\ q_2,\ x)\left\{1+\log\frac{Q_1(x)}{q_1}\right\}\\&+\frac{\omega_2}{\mu_2}q_2t(q_1,\ q_2,\ x)\left\{1+\log\frac{Q_2(x)}{q_2}\right\}\\&-C(q_1,\ q_2,\ x)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(58)\end{aligned}$$

と表わされる．高速道路の採算が可能であるという条件は

$$\begin{aligned}&\frac{\omega_1}{\mu_1}q_1t(q_1,\ q_2,\ x)\log\frac{Q_1(x)}{q_1}+\frac{\omega_2}{\mu_2}q_2t(q_1,\ q_2,\ x)\\&\quad\cdot\log\frac{Q_2(x)}{q_2}-C(q_1,\ q_2,\ x)\geqq 0\cdots\cdots\cdots\cdots(59)\end{aligned}$$

と表わされる．

1 車種の場合と同様にこの場合にも生産者余剰が正の値をもつ $0<q_1<Q_1$, $0<q_2<Q_2$ なる交通量 q_1, q_2 および規模 $x>0$ が存在し，しかも生産者余剰および総合余剰は生産者余剰が非負の値をもつ変数の領域において狭義凹関数であるとしよう．このとき **4**．と同様の手順によって最適性の条件を誘導することができる．

最適性の条件はラグランジェの未定乗数が $\lambda=0$ のときには，

$$\begin{aligned}&\frac{\omega_1}{\mu_1}q_1t_{q_1}'\left(1+\log\frac{Q_1}{q_1}\right)+\frac{\omega_2}{\mu_2}q_2t_{q_1}'\left(1+\log\frac{Q_2}{q_2}\right)\\&\quad+\frac{\omega_1}{\mu_1}t\log\frac{Q_1}{q_1}-C_{q_1}'=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(60)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\omega_1}{\mu_1}q_1t_{q_2}'\left(1+\log\frac{Q_1}{q_1}\right)+\frac{\omega_2}{\mu_2}q_2t_{q_2}'\left(1+\log\frac{Q_2}{q_2}\right)\\&\quad+\frac{\omega_2}{\mu_2}t\log\frac{Q_2}{q_2}-C_{q_2}'=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(61)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\omega_1}{\mu_1}q_1t_x'\left(1+\log\frac{Q_1}{q_1}\right)+\frac{\omega_1}{\mu_1}q_1t\frac{Q_1'}{Q_1}\\&\quad+\frac{\omega_2}{\mu_2}q_2t_x'\left(1+\log\frac{Q_2}{q_2}\right)+\frac{\omega_2}{\mu_2}q_2t\frac{Q_2'}{Q_2}\\&\quad-C_x'=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(63)\end{aligned}$$

$$\frac{\omega_1}{\mu_1}q_1t\log\frac{Q_1}{q_1}+\frac{\omega_2}{\mu_2}q_2t\log\frac{Q_2}{q_2}-C\geqq 0\cdots(63)$$

である．これは車種 1 に対する料金は，車種 1 の交通量が 1 台増加することによる他の車種 1 および車種 2 のすべてのトリップに及ぼす節約時間価値の減少分とこのときの総費用の増分との和に等しくなければならないことを意味している．車種 2 の料金についても同様のことがいえる．また路線延長が 1 単位増加することによる総費用の増分が，このときの走行速度の増大による車種 1 および車種 2 のすべてのトリップの節約時間価値の増分と，利用区間の増加によるすべてのトリップに対する節約時間価値の増分の和に等しいことを意味している．

$\lambda>0$ のときには最適性の条件は，

$$\frac{\omega_1}{\mu_1}q_1t\log\frac{Q_1}{q_1}+\frac{\omega_2}{\mu_2}q_2t\log\frac{Q_2}{q_2}-C=0\cdots\cdots(64)$$

$$\begin{aligned}&\frac{\dfrac{\omega_1}{\mu_1}\left\{q_1t_{q_1}'\left(1+\log\dfrac{Q_1}{q_1}\right)+t\log\dfrac{Q_1}{q_1}\right\}+\dfrac{\omega_2}{\mu_2}q_2t_{q_1}'\left(1+\log\dfrac{Q_2}{q_2}\right)-C_{q_1}'}{\dfrac{\omega_1}{\mu_1}\left(q_1t_{q_1}'\log\dfrac{Q_1}{q_1}+t\log\dfrac{Q_1}{q_1}-t\right)+\dfrac{\omega_2}{\mu_2}q_2t_{q_1}'\log\dfrac{Q_2}{q_2}-C_{q_1}'}\\&=\frac{\dfrac{\omega_1}{\mu_1}q_1t_{q_2}'\left(1+\log\dfrac{Q_1}{q_1}\right)+\dfrac{\omega_2}{\mu_2}\left\{q_2t_{q_2}'\cdot\left(1+\log\dfrac{Q_2}{q_2}\right)+t\log\dfrac{Q_2}{q_2}\right\}-C_{q_2}'}{\dfrac{\omega_1}{\mu_1}q_1t_{q_2}'\log\dfrac{Q_1}{q_1}+\dfrac{\omega_2}{\mu_2}\left(q_2t_{q_2}'\log\dfrac{Q_2}{q_2}+t\log\dfrac{Q_2}{q_2}-t\right)-C_{q_2}'}\\&=\frac{\dfrac{\omega_1}{\mu_1}\left\{q_1t_x'\left(1+\log\dfrac{Q_1}{q_1}\right)+q_1t\dfrac{Q_1'}{Q_1}\right\}+\dfrac{\omega_2}{\mu_2}\left\{q_2t_x'\left(1+\log\dfrac{Q_2}{q_2}\right)+q_2t\dfrac{Q_2'}{Q_2}\right\}}{\dfrac{\omega_1}{\mu_1}\left(q_1t_x'\log\dfrac{Q_1}{q_1}+q_1t\dfrac{Q_1'}{Q_1}\right)+\dfrac{\omega_2}{\mu_2}\left(q_2t_x'\log\dfrac{Q_2}{q_2}+q_2t\dfrac{Q_2'}{Q_2}\right)}<0\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(65)\end{aligned}$$

となる．これらの条件は料金収入の総和が総費用に等しくなければならないこと，また車種 1 の交通量が 1 トリップ増加することによる総合余剰の増分と生産者余剰の増分の比が車種 2 のそれに等しく，また同時に規模が 1 単位増加することによる総合余剰の増分と生産者余剰の増分の比にも等しくなければならないことを意味している．

以上の 2 つのケースに対する最適料金および最適規模の性質はおおむね 1 車種に対して誘導されたものを 2 車種に拡張解釈したものに相当しよう．

6．結　　論

本研究では都市高速道路の旅行時間および総費用が交通量および規模と定義された車線数と路線延長距離の積の総和の関数であることを前提として山田の理論に従って需要交通量を導き，高速道路の採算が可能であるという条件のもとで総合余剰を最大にする規模および料金水準が求められた．本研究において得られた結果をまとめると次のようになる．

（1） 高速道路利用者の余剰と高速道路提供者の余剰の和からなる総合余剰は，高速道路利用者の節約時間の総和と高速道路の建設および維持管理に要する総費用との差に等しい．

（2） 高速道路の採算が可能であるという条件のもとで総合余剰が最大となるための一階および二階の条件が明らかにされた．最適解は生産者余剰を最大にする規模，交通量よりも大きな規模，交通量であり，また最適解の性質は総合余剰が最大となる点が制約領域の内にあるか外にあるかによって異なる．

（3） 総合余剰が最大となる点が制約領域の内にある場合すなわち高速道路に対する需要が十分あり，社会的にみて最適な規模，料金のもとで高速道路の独立採算が可能な場合には，最適料金は利用交通量の 1 単位の増加による総費用の増分と，このときの他のすべての利用者に与える節約時間の価値の減少分との和に等しい．また最適規模のもとでは規模が 1 単位増加したときの総費用の増分が，このときの利用交通量全体に対する走行速度の上昇および高速道路利用区間の増大による節約時間の価値の増分に等しい．この場合には高速道路の提供者の側に余剰が生じまた高速道路の利用者は道路の最適利用を達成するために総費用を償うための金額のほかに混雑料金が課せられる．

（4） 総合余剰が最大となる点が制約領域の外にある場合，すなわち社会的にみて最適な料金，規模のもとでは高速道路の独立採算が成り立たない場合には，最適解は収支均等線と等総合余剰線との接点すなわち収支が均等し，かつ利用交通量が 1 単位増加したときの総合余剰および生産者余剰の増分の比が，規模が 1 単位増大したときのそれらの増分の比に等しい点で与えられる．この場合には料金は平均総費用に等しく，道路の提供者の側には余剰は生じない．

（5） 交通量が小さくて混雑が生じない場合，あるいはサービスレベルが一定となるように道路の設計が行われる場合，単位距離当たりの節約時間は一定とみなすことができる．一般に平均総費用は限界総費用よりも大きいと考えることができるから，この場合最適料金は平均総費用に等しく，また最適規模のもとでは 1 単位の規模の増大による総費用の増分が，このときの利用区間の増大による節約時間の価値の増分に等しい．

（6） 平均トリップ長および時間価値の異なる 2 車種の混合交通を考慮したときの最適解の性質は，おおむね 1 車種の場合の最適解の性質を 2 車種に拡張解釈したものに相当する．

本研究は特定の都市の交通政策に直接に寄与することを目的とするものではない．このため需要関数を導出するにあたって現実の都市の自動車交通が大胆に抽象化されている．したがってこの論文で扱っている解は特殊な条件下での解であり，必ずしもただちに一般に適用できるものであるとはいい難い．

得られた結論は一般に都市高速道路の計画，運営を行ううえで最適な規模，料金水準はいかなるものであるべきかを定性的に説明する理念としての意義をもつものである．もちろん実際への適用においては，現実を十分に反映した需要関数，費用関数を特定化することが必要であり，これらの関数を用いて本研究の分析法を適用することにより，現実の交通政策に直接に寄与し得る知見を見出すことが可能となろう．

参考文献

1) 山田浩之：都市高速道路の最適規模と料金水準，高速道路と自動車，第 11 巻 9 号，pp. 17～26，1968．
2) 佐佐木 綱：阪神高速道路網における均一料金圏の決定，高速道路と自動車，第 11 巻 2 号，pp. 19～29，1968．
3) 飯田恭敬：都市高速道路の最適規模決定法，高速道路と自動車，第 12 巻 11 号，pp. 27～35，1969．
4) 岡野行秀：道路サービスの価格形成と道路財源の問題 (2)，東京大学経済学論集，Vol. 33，No. 2，pp. 39～54，1967．
5) 岡野行秀：道路サービスの価格形成と道路財源の問題 (3)，東京大学経済学論集，Vol. 33，No. 4，pp. 15～33，1967．
6) 浅井加寿彦・明神 証：混雑費用を考慮した都市高速道路の規模と料金，土木学会第 34 回年次学術講演会講演概要集第 4 部，pp. 51～52，1979．

（1981.4.23・受付）