

## 土石流における逆グレイディング機構

## REVERSE GRADING IN DEBRIS FLOW

橋本晴行\*・椿 東一郎\*\*

By Haruyuki HASHIMOTO and Tōichirō TSUBAKI

## 1. 結 言

広範な粒径の砂礫粒子を高濃度に含有し、段波状を呈しながら粒子・水一体となって流動する土石流では、先端に巨礫が集中し、破壊力が一段と大きくなることが知られている。このような先端集中の生じる理由として、後続の流動層では表層に大きい粒子が、底層に小さな粒子が集まり、いわゆる逆グレイディング現象が生じて、先端より速い表面流速によって巨礫が先送されるためであると考えられている<sup>1),2)</sup>。したがって、巨礫の先端集中に関連して、逆グレイディングとその原因となる粒子の挙動が問題となるが、大同<sup>3)</sup>は、Bagnold<sup>3)</sup>の分散圧力は粒子が大きいほど大きいことから、大粒子は上方に、小粒子は下方に移動することを定性的に示した。また、高橋<sup>4)</sup>は最近、同様な観点から流動層における粒子の運動方程式を導き、周辺粒子より大きい粒子の上昇速度や、逆に小さい粒子の下降速度を解析的に求めている。しかし、粒子間の衝突力については、Bagnold の半実験式をもとにしているため、それに付随する不確かさを伴っている。さらに、逆グレイディングや巨礫の先端集中に関する従来の実験は断片的で、両現象の関連性やそれらと水理量、底質との関係なども明らかにされていない。

本研究においては、大小 2 種の砂礫を適度に混ぜた混合砂を底質として用いた土石流実験を行い、流動層において大粒子が上昇し、あるいは小粒子が下降する軌跡や速度を測定して逆グレイディングの生成機構を把握することに努めた。次いで、逆グレイディングおよび巨礫の先端集中に及ぼす粒径比や水路勾配などの効果を量的に明らかにした。また、著者らは前報<sup>4)</sup>において、均一粒子の土石流における粒子間応力を理論的に求め、その流動特性について検討した。ここでは、その前報の理論を

適用して、流動層の均一な粒子群がその中の異径粒子に作用する粒子間力を評価し、粒子の運動方程式からその軌跡を解析するなど、逆グレイディング機構を理論的に究明している。

## 2. 実験の方法

土石流は一般に広範な粒度分布をもつが、定量化を容易にするため、表-1 に示す均一な砂礫から 2 種類を選んで混合させ、表-2 の粒径比  $d_L/d_S$  と混合体積比  $V_L/V_S$  をもつ 3 種の底質材料を作った。ここに、 $d$  は粒径、 $\sigma$  と  $\rho$  は粒子と水の密度、 $C_*$  は粒子の最密充てん濃度、添字  $L, S$  はそれぞれ大粒子と小粒子を意味する。なお、座標は流れ方向に  $x$  軸、それに垂直上向きに流動層底面から  $z$  軸をとることにする。

表-1 実験材料の特性

材料	$d$ (mm)	$\sigma/\rho$	$C_*$
砂	4.6	2.59	0.58
砂	8.1	2.63	0.59
砂	14.7	2.61	0.57

このような混合材料を水路幅 20 cm、長さ 7 m の可変勾配水路に敷厚 10 cm で均一

表-2 底質材料の構成粒径と混合比

実験	$d_L$ (mm)	$d_S$ (mm)	$V_L/V_S$
Run 1	14.7	4.6	1/4
Run 2	8.1	4.6	1/4
Run 3	14.7	4.6	1/1

に敷き詰め、あらかじめ浸透流により堆積層を水で飽和させた後、上流端から急激に単位幅流量  $q_{w0}=200 \text{ cm}^3/\text{s}$  の水を供給して段波状土石流を発生させた。

逆グレイディング現象に関する実験では、水路傾斜角  $\theta_0$  を  $14^\circ \sim 22^\circ$  のいわゆる土石流勾配に設定し、アクリライト製の側壁から 16 mm 高速度カメラを用いて、100 コマ/s のコマ送り速度で土石流を撮影した。撮影は、上流端から  $x=5 \text{ m}$  を中心とする 35 cm 区間と、 $x=4.2 \text{ m}$  を中心とする 1 m 区間で行われ、フィルムモーションアナライザーによって粒子の速度分布や大粒子の個数分布、および上昇あるいは下降する粒子の軌跡や速度を

\* 正会員 工修 九州大学助手 工学部水工土木学科

\*\* 正会員 工博 九州大学教授 工学部水工土木学科

求めた。

一方、巨礫の先端集中に関する実験では、上記の実験に加えて  $\theta_0=6^\circ\sim 12^\circ$  の勾配の実験を追加し、水路下流端で土石流を採取することにより、大粒子と小粒子が輸送される割合を求めた。

### 3. 逆グレイディング現象

Run 1, 2 において、 $x=5\text{ m}$  で撮影した 16 mm フィルムより、土石流の流動層を水深方向に 2 cm ごとに等分割して、面積  $A=2\text{ cm}\times 35\text{ cm}$  の側壁に接触する大粒子の個数  $N_L$  を読み取る。これから個数密度  $D_N=N_L/A$  を求め、原河床の大粒子の個数密度  $D_{N0}$  で無次元化した  $D_N/D_{N0}$  の垂直分布を示した例が図-1 である。図中の  $t_0$  は撮影地点における土石流の先端通過後の時間で、 $\eta$  は流動層の厚さを  $h$  として  $z/h$  である。表面ほど大粒子が集中しており、土石流の全域にわたって水深方向に逆グレイディングが生じている。また、流れ方向には、先端ほど大粒子が原河床を大幅に上回る割合で集中し、後続にかけて急減している。

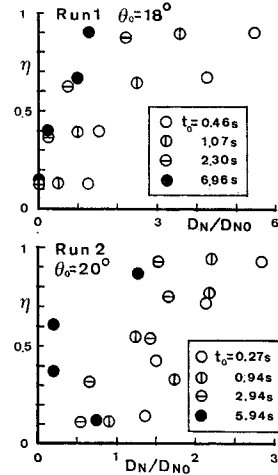


図-1 大粒子の個数密度分布

逆グレイディングが生じる過程を調べるため、堆積層に小粒子が多い場合の Run 1 において、1 m 区間を撮影した 16 mm フィルムより大粒子を追跡し、大粒子の河床からの高さ  $z_L$  の時間的変化を無次元形で示した例を図-2 に示す。ここに、 $\eta_L=z_L/h$ 、 $T$  は、給水開始からの時間を  $t$ 、流動層の表面傾斜角を  $\theta_H$ 、 $u_*=\sqrt{gh \sin \theta_H}$  として、 $T=u_*t/d_S$  である。なお、土石流の後続部においては、河床が侵食さ

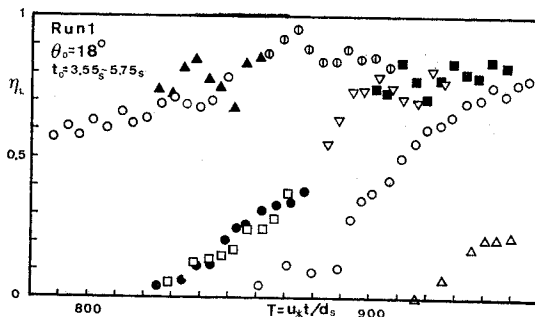


図-2 大粒子の軌跡

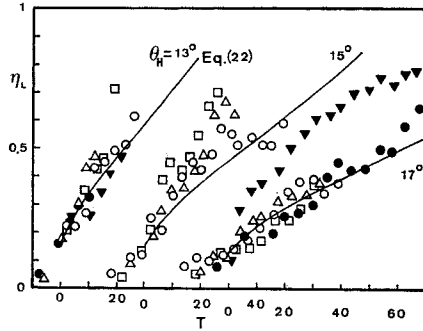


図-3 大粒子の上昇軌跡

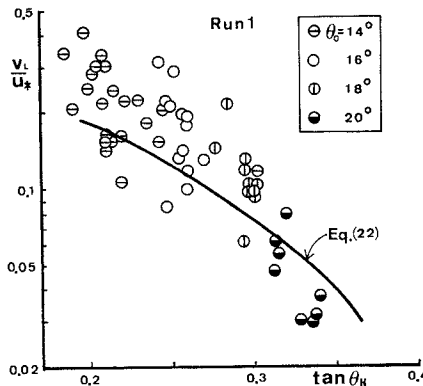


図-4 大粒子の無次元上昇速度と勾配の関係 ( $\eta_L=0.3$ )

れるため、 $\theta_H$  や  $h$  は時間とともに減少する。そのため、 $\eta_L$  や  $T$  等の実測値を求める際には、測定時・点における実測の  $\theta_H$  と  $h$  を用いている。

図-2 から、表層付近の大粒子はほぼ表面に沿って移動しているのに対して、中・下層部の大粒子は上昇傾向をもち、堆積層上に静止していた大粒子も移動開始後、上昇することは明らかである。図-3 は、ほぼ同じ表面勾配の実測軌跡を選び、高さ  $z_L=d_L/2$  を通過する時刻を改めて  $T=0$  と置き換えて、大粒子の軌跡をプロットしたものである。また、各軌跡において  $\eta_L=0.3$  付近で求めた上昇速度  $v_L$  を  $u_*$  で無次元化した  $v_L/u_*$  の実測値を、表面勾配  $\tan \theta_H$  に対して示したのが図-

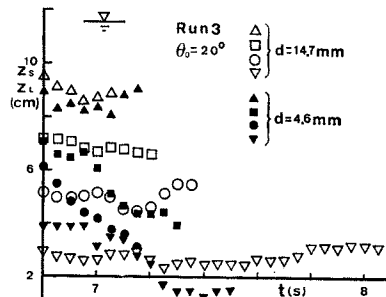


図-5 大・小粒子の軌跡

4 である。無次元上昇速度は勾配が低いほど大きいことがわかる。図は省略するが、上昇速度も勾配の低いほど大きい。

一方、堆積層に大粒子が多い場合の Run 3 については、先端付近の流動層では全粒子の体積の 70% 以上が大粒子が占める。このような流動層では、大粒子は高さをあまり変化せずに移動するのに対して、小粒子は下降していることが観察された。図-5 はそれらの軌跡を例示したものである。

#### 4. 巨礫の先端集中現象

Run 1, 2 において、水路下流端で採取した土石流から大粒子の全粒子に対する輸送割合  $R_L$  を求め、土石流先端部から後続部にかけて示したものが図-6, 7 である。横軸は、 $t_0$  を下流端における土石流先端到達後の時間、 $H_f$  を段波高、 $u_{*f} = \sqrt{gH_f \sin \theta_0}$  として  $T_0 = u_{*f} t_0 / d_s$  である。図-6 は土石流勾配における実験であるが、大粒子の輸送割合は先端部で最大で、後続にかけて急減し、 $T_0 \approx 400$  を越えると原河床の混合比よりも小さくなる。このことは、実際の土石流では先端

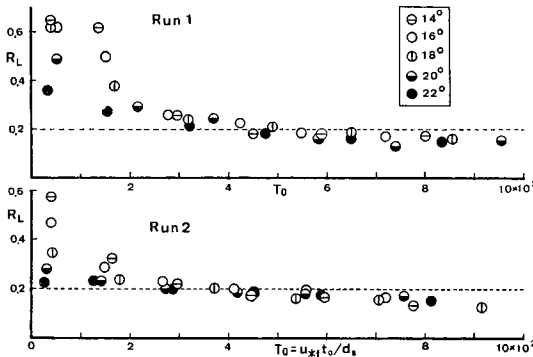


図-6 大粒子の輸送割合の時間的变化 (土石流勾配)

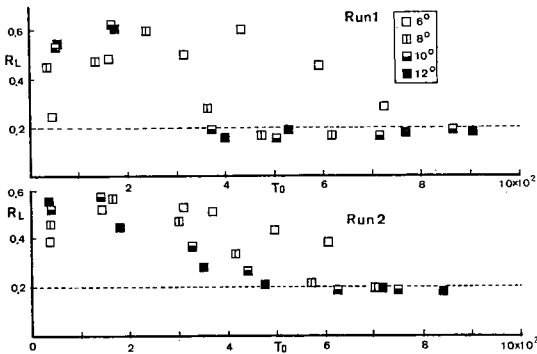


図-7 大粒子の輸送割合の時間的变化 (緩勾配)

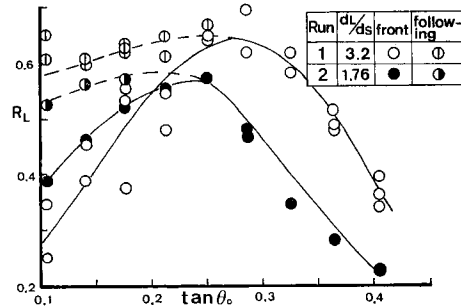


図-8 先端部における大粒子の輸送割合と水路勾配の関係

に巨礫が集中し、後続は比較的細かい粒子から成ることよく一致している。しかし、土石流勾配以下の勾配においては、図-7 に示すように大粒子の集中は先端部から後続部へ移行し、先端から最大集中断面までの遅れ距離は低勾配ほど長くなる。

これらの図から、先端部における大粒子の輸送割合  $R_L$  と水路勾配との関係を粒径比  $d_L/d_s$  をパラメータとしてまとめたものが図-8 である。同図には緩勾配で後続流において現われる輸送割合の最大値も示されている。まず、先端部における大粒子の輸送割合は  $\theta_{0M} \approx 14^\circ$  で最大で、その両側の勾配において急減することが注目される。また、 $\theta_0 \geq \theta_{0M}$  では粒径比が大きいほど、大粒子の輸送割合は大きいが、 $\theta_0 \leq \theta_{0M}$  では逆に減少する傾向がみられる。一方、 $\theta_0 \leq \theta_{0M}$  において後続流に現われる輸送割合の最大値は低勾配になるほど若干減少するが、 $\theta_{0M}$  における最大値とあまり変わらない値を示す。

以上のことから、 $\theta_{0M} \approx 14^\circ$  を境にして大粒子の先端集中現象と機構は大きく異なるものと考えられる。

$\theta_0 \geq \theta_{0M}$  の土石流勾配においては、大粒子の先端集中はおもに後続からの大粒子の供給に、その供給は後続の流動層内での逆グレイディングに規定される。さらに、逆グレイディングは大・小粒子の上昇、下降速度に規定される。したがって、 $x$  方向の粒子速度と逆グレイディングおよび大粒子の先端集中は直接的に関連しており、いずれも粒径比が大きいほど、また勾配が小さいほど著しいことが知られる。

$\theta_0 \leq \theta_{0M}$  においては、粒子濃度の濃い流動層の上に、粒子濃度の薄い水流層が出現する<sup>5), 6)</sup>。そのため、大小 2 種の混合砂礫を底質とする本実験では、先端には粒子より水が先行して移動しやすい細粒径粒子が集まりやすい。また、後続流においては、粒子流動層内での逆グレイディングによって大粒子は流動層表面に集まりやすいが、その上に存在する水流層のため先端には輸送されにくい。したがって、大粒子の集中は先端より遅れて後続

に現われる。低勾配になるほど、水流層の厚さは相対的に増加するので、上述の傾向は強まり、先端での大粒子の輸送割合は急減するとともに、大粒子の最大集中断面の先端からの遅れ距離は長くなる。

5. 逆グレイディング機構の解析

逆グレイディングには、流動層を構成する粒子より大きい粒子の上昇によるものと、逆に小さい粒子の下降によるものがある。以下、前報<sup>1)</sup>の理論を粒径  $d$  の粒子の流動層における単一の大・小粒子に適用して、その粒子に作用する粒子間力を評価し、さらに  $z$  方向の運動方程式から粒子の軌跡を理論的に求める。

(1) 均一小粒子の流動層における大粒子の上昇機構

Run 1 で求めた流れ方向の粒子速度  $u$  の分布を図9に示す。図中の一点鎖線、実線は前報<sup>1)</sup>で求めた均一粒子の土石流における粒子の濃度・速度分布の理論曲線である。また、破線は一樣な濃度分布をもったダイラタント流体の速度分布<sup>1),5)</sup>である。大粒子も小粒子もほぼ同一の速度分布を示し、著者らの理論曲線とよく一致する。したがって、

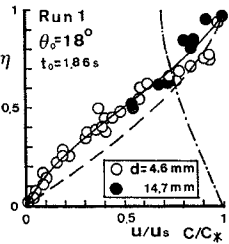


図9 粒子の濃度・速度分布 (C:濃度,  $u_s$ :表面速度)

図の一点鎖線、実線で示される濃度・速度分布をもつ小粒子の土石流中に少量の大粒子が存在する流れにおいては、大粒子は上昇しながらも、流れ方向にはその中心の高さにおける周辺小粒子の速度と同じ速度成分をもつものとみなされる。このような流動層における大粒子と周辺小粒子との間には速度差が存在するため、周辺小粒子は大粒子の上層・下層部の限られた表面に衝突する。

土石流のように粒子を高濃度に含んだせん断流では、粒子間の衝突は非弾性的で、衝突後、小粒子は大粒子に沿って動くため、大粒子は粒子間力として周辺小粒子から衝突時の衝突力とその後の接触時の接触力を受けり、両者の評価が重要である。以下、簡単のため、均一な小粒子を高濃度に含んだ2次元せん断流中に単一大粒子が上昇しているものとして解析を行う。

a) 衝突力

小粒子群が上昇中の大粒子に及ぼす衝突力  $F$  は、小粒子が1回衝突することによる大粒子の運動量変化に、単位時間当たりの小粒子の衝突回数に乗じたものである。大粒子と小粒子の衝突前後の速度をおのおの  $v_L, v_L'$  および  $v, v'$  とすると、大粒子が1回の衝突で受ける

力積は、衝突後の粒子間の接触条件式  $(v_L' - v) \cdot n = 0$  を用いて

$$M_L(v_L' - v_L) = \{MM_L / (M + M_L)\} \cdot \{(v - v_L) \cdot n\} (n - \mu s) \dots (1)$$

ここに、 $M, M_L$  は、衝突において運動量が周小粒子群へ伝達されることを考慮したときの小粒子、大粒子のみかけの質量で、 $m, m_L$  を質量、 $C$  を小粒子の体積濃度、 $k_M$  を運動量伝達に関する係数として、前報<sup>1)</sup>の3章、(1), b) とほぼ同様な考察により、次式

$$\left. \begin{aligned} M &= \left(1 + \frac{\rho}{2\sigma}\right) \frac{2k_M}{1 - C/C_*} m \\ M_L &= \left(1 + \frac{\rho}{2\sigma}\right) \frac{2k_M}{1 - C/C_*} m_L \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

で与えられ、 $k_M \approx 5$  程度である。 $n = (\cos \theta, \sin \theta \sin \varphi, -\sin \theta \cos \varphi)$  は大粒子の中心から衝突点に向かう単位ベクトルで、 $\theta, \varphi$  は粒子表面を表すときの余緯度と方位角である。また、 $s$  は小粒子のすべり方向の単位ベクトル、 $\mu$  は摩擦係数である。

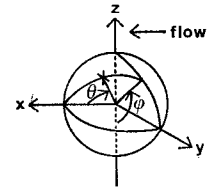


図10 球面座標の定義 (x印:衝突点)

小粒子が単位時間当たりに大粒子の  $\theta \sim \theta + d\theta, \varphi \sim \varphi + d\varphi$  の微小表面に衝突する回数  $dn$  は

$$dn = -\hat{d}^2 \sin \theta d\theta d\varphi n \cdot ([v]_{\theta, \varphi} - v_L) [N]_{\theta, \varphi} \dots \dots \dots (3)$$

ここに、 $d$  を小粒子径として、 $\hat{d} = (d + d_L)/2$ 、 $[ \cdot ]_{\theta, \varphi}$  は大粒子に  $\theta, \varphi$  の角度で衝突する小粒子の物理量を表わす。また、 $N$  は流動層における単位体積当たりの小粒子数で、 $\beta C / (C_* d^3)$  と表わされ、 $\beta = 1.15$  である。したがって、大粒子の微小表面に作用する衝突力は、式(1)で  $M \rightarrow [M]_{\theta, \varphi}, v \rightarrow [v]_{\theta, \varphi}$  と置き変えて、式(1)、(3)より

$$\begin{aligned} \delta F &= M_L(v_L' - v_L) dn \\ &= -\hat{d}^2 \frac{[M]_{\theta, \varphi} M_L}{[M]_{\theta, \varphi} + M_L} [N]_{\theta, \varphi} \cdot \{([v]_{\theta, \varphi} - v_L) \cdot n\}^2 (n - \mu s) \sin \theta d\theta d\varphi \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

となる。変量  $[ \cdot ]_{\theta, \varphi}$  を大粒子の中心の位置に関してテラー展開して、次式

$$\begin{aligned} [v]_{\theta, \varphi} - v_L &\approx (-\hat{d} \sin \theta \cos \varphi du/dz + (1/2)\hat{d}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi d^2 u/dz^2, 0, -v_L) \dots \dots \dots (5) \\ \frac{[M]_{\theta, \varphi} M_L}{[M]_{\theta, \varphi} + M_L} [N]_{\theta, \varphi} &\approx \frac{M M_L}{M + M_L} N \\ &- \hat{d} \sin \theta \cos \varphi \left\{ -\frac{M M_L N}{(M + M_L)^2} \frac{d}{dz} M + \frac{M_L}{M + M_L} \frac{d}{dz} (M N) \right\} \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

となる。ここに、 $u$  は巨視的な  $x$  方向の速度成分、 $v_L$  は大粒子の上昇速度である。

式 (5), (6) を式 (4) に代入して、次式が得られる。

$$\delta F = -\hat{d}' \left( \frac{du}{dz} \right)^2 \left[ \frac{MM_L}{M+M_L} N - \hat{d} \sin \theta \cos \varphi \right. \\ \cdot \left\{ -\frac{MM_L}{(M+M_L)^2} N \frac{d}{dz} M \right. \\ \left. + \frac{M_L}{M+M_L} \frac{d}{dz} (MN) \right\} \left[ (\cos \theta - V)^2 \right. \\ \left. - \hat{r} (\cos \theta - V) \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \hat{r}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \right] f(\theta, \varphi) d\theta d\varphi \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに

$$\hat{r} = \hat{d} \frac{d^2 u}{dz^2} \Big/ \frac{du}{dz}, \quad V = v_L \Big/ \left( \hat{d} \frac{du}{dz} \right) \quad \dots\dots (8) \\ f(\theta, \varphi) = \sin^3 \theta \cos^2 \varphi (n - \mu s) \quad \left. \right\}$$

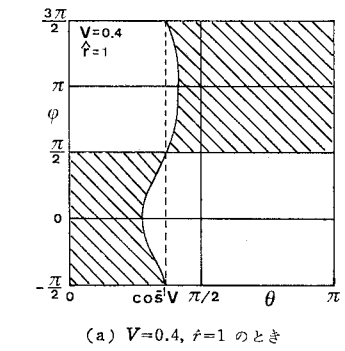
式 (7) の積分は、小粒子が衝突する大粒子の限られた表面、すなわち  $dn \geq 0$  を満たす領域

$$\mathbf{n} \cdot ([v]_{\theta, \varphi} - \mathbf{v}_L) \leq 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

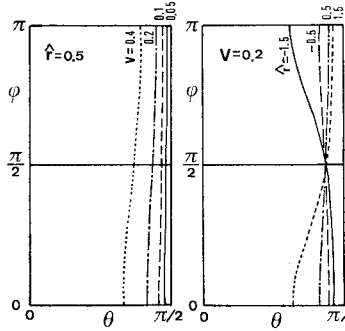
について行われる。式 (5) を代入し、 $du/dz > 0$ ,  $\sin \theta > 0$  を考慮すると、上式は

$$\cos \varphi \{-\cos \theta + (1/2) \hat{r} \sin \theta \cos \theta \cos \varphi + V\} \leq 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

$|\hat{r}| \leq 2$ ,  $V \leq 1$  の場合について、上式を満たす  $\theta, \varphi$  の領域を求めると、 $\hat{r}$  と  $V$  をパラメーターとして 図-11(a)



(a)  $V=0.4, \hat{r}=1$  のとき



(b)  $V$  と  $\hat{r}$  を変化させたとき

図-11 衝突範囲

に斜線で示すような範囲となるが、 $|\hat{r}|$  や  $V$  の値は底面と表面のごく近傍を除いた大部分において一般に微小 ( $V < 0.1$ ,  $|\hat{r}| < 0.5$ ) であるから図の境界線は、直線  $\theta = \cos^{-1} V$  で近似することができ (図-11 (b)), 積分範囲は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \theta \leq \cos^{-1} V, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2 \\ \cos^{-1} V \leq \theta \leq \pi, \quad \pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

式 (7) の  $f(\theta, \varphi)$  における摩擦係数の影響は小さく、ここでは無視する。式 (11) の範囲で式 (7) を積分すると、かなり面倒な計算の後、微小項を無視して、次式

$$\mathbf{F} = -\hat{d}' \left( \frac{du}{dz} \right)^2 \left[ \frac{MM_L}{M+M_L} N A_1 \right. \\ \left. - \hat{d} \left\{ -\frac{MM_L N}{(M+M_L)^2} \frac{d}{dz} M \right. \right. \\ \left. + \frac{M_L}{M+M_L} \frac{d}{dz} (MN) \right\} A_2 \\ - \frac{MM_L}{M+M_L} N \hat{r} A_3 + \hat{d} \left\{ -\frac{MM_L N}{(M+M_L)^2} \frac{d}{dz} M \right. \\ \left. + \frac{M_L}{M+M_L} \frac{d}{dz} (MN) \right\} \hat{r} A_4 \\ \left. + \frac{1}{4} \frac{MM_L}{M+M_L} N \hat{r}^2 A_5 \right] \quad \dots\dots\dots (12)$$

が得られる。式中の  $A_i (i=1 \sim 5)$  における  $y$  成分はすべて 0 であるから省略し、 $a = \cos^{-1} V$  と置いて

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= [-(4/15)\pi V, \pi/12 - a/6 + (1/24)\sin 4a \\ &\quad + (1/18)\sin^2 2a + (16/15)V\sin^2 a \\ &\quad + V^2\{\pi/2 - a + (2/3)\sin 2a - (1/12)\sin 4a\}] \\ A_2 &= [(8/3)\{(1/5)\sin^2 a - (1/7)\sin^2 a\} \\ &\quad + (V/6)\{\pi - 2a + (1/2)\sin 4a + (2/3)\sin^2 2a\} \\ &\quad + (8/15)V^2 \sin^2 a, - (2/35)\pi - (2/5)\pi V^2] \\ A_3 &= [(\pi/12)V + (8/15)\sin^2 a - (8/21)\sin^2 a \\ &\quad - (V/6)\{a - (1/4)\sin 4a - (1/3)\sin^2 2a\}, \\ &\quad - (2/35)\pi] \\ A_4 &= [-(2/35)V, \pi/24 + (32/105)V\sin^2 a \\ &\quad - (1/12)a + (1/60)\sin 4a + (2/45)\sin^2 2a \\ &\quad + (1/480)\sin 8a] \\ A_5 &= [0, \pi/24 - a/12 + (1/60)\sin 4a \\ &\quad + (2/45)\sin^2 2a + (1/480)\sin 8a] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$V \ll 1$  のときには、 $a = \cos^{-1} V \approx \pi/2 - V$  などを用いて

$$\left. \begin{aligned} A_1 &\approx [-(4/15)\pi V, (16/15)V] \\ A_2 &\approx [16/105 + (8/15)V^2, -(2/35)\pi - (2/5)\pi V^2] \\ A_3 &\approx [16/105, -(2/35)\pi] \\ A_4 &\approx [-(2/35)V, (32/105)V] \\ A_5 &\approx [0, 0] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

式 (12) において、 $M, M_L$  に式 (2) を、 $N$  に  $\beta C / (c_* d^3)$  を代入すると、大粒子に作用する衝突力  $\mathbf{F}$  は次

式で与えられる.

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & -\frac{\pi}{3} \left( \sigma + \frac{\rho}{2} \right) \beta k_M \hat{d}' \frac{(d_L/d)^3}{1+(d_L/d)^3} \frac{(du/dz)^2}{1-C/C_*} \\ & \cdot \left[ \frac{C}{C_*} \left( A_1 - \hat{r} A_3 + \frac{1}{4} \hat{r}^2 A_5 \right) \right. \\ & + \hat{d} \left( 1 - \frac{C/C_*}{1+(d_L/d)^3} \right) \frac{d(C/C_*)/dz}{1-C/C_*} \\ & \left. \cdot (-A_2 + \hat{r} A_4) \right] \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

### b) 接触力

小粒子群が大粒子に及ぼす接触力は、衝突点を除いた接点における小粒子の作用力と接点数で決定される. 大粒子の  $\theta \sim \theta + d\theta$ ,  $\varphi \sim \varphi + d\varphi$  の間の微小表面に働く接触力は,  $F'$  を接点における小粒子の作用力,  $n'_c$  を粒子表面単位面積当たりの接点数,  $\mathbf{n}'$  を大粒子の中心から接点に向かう単位ベクトルとして, 次式のようになる.

$$\delta F' = -[F'n'_c]_{\theta, \varphi} \mathbf{n}' (d_L/2)^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \dots\dots\dots(16)$$

上式の  $F'n'_c$  は周辺小粒子が大粒子に作用するところの接触力に起因した圧力 (接触圧力) であり, 周辺小粒子の流れにおける小粒子間に発生する接触圧力で近似することができよう. したがって,  $p$  を流動層における接触応力として, 前報<sup>9)</sup>, 3章, (2) 節の式 (31) より  $F'n'_c = p/C$  と表わされ, さらに前報の式 (32), (50) を参照して, 次式

$$F'n'_c = \chi(\sigma - \rho)gh \cos \theta_0 (C - C_s)/C_* \dots\dots(17)$$

が得られる. ここに,  $C_s$  は小粒子の流動層表面濃度,  $\chi$  は定数で  $\chi = 1/3$  である.  $F'n'_c$  は濃度  $C$  を通じて  $z$  の関数であるから, 式 (16) における  $[F'n'_c]_{\theta, \varphi}$  を大粒子の中心のまわりでテーラー展開し,  $F'n'_c - (d_L/2) \sin \theta \cdot \cos \varphi \, d(F'n'_c)/dz$  で置き換える. 接点は大粒子の全表面に分布するから, 式 (16) を大粒子の全表面にわたって積分し, 式 (17) を代入すると次式となる.

$$\mathbf{F} = -\frac{\pi}{6} \chi(\sigma - \rho)gd_L^3 h \cos \theta_0 \frac{d}{dz} \left( \frac{C}{C_*} \right) \mathbf{k} \dots\dots\dots(18)$$

ここに,  $\mathbf{k}$  は  $z$  方向の単位ベクトルである.  $d(C/C_*)/dz$  は負の値をとるので, 大粒子に働く接触力  $\mathbf{F}$  は常に正となり, 表面方向に作用する.

### c) 流動層における大粒子の運動方程式

均一な小粒子から成る流動層中を移動する大粒子は, 上述の衝突力  $\mathbf{F}$  と接触力  $\mathbf{F}'$  のほかには重力, 浮力および流体力を受ける. したがって, 大粒子の運動方程式は

$$m_L \left( 1 + \frac{\rho}{2\sigma} \right) \frac{dv_L}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{F}' + m_L g \mathbf{a} + \frac{\pi}{6} d_L^3 \mathbf{i}_L \dots\dots\dots(19)$$

ここに,  $\mathbf{a} = (\sin \theta_0, -\{(\sigma - \rho)/\sigma\} \cos \theta_0)$ , また,  $\mathbf{i}_L = (i_{Lz}, i_{Lz})$  は, 大粒子が頻繁な衝突・接触作用に伴って水から受ける単位体積当たりの流体力で, 衝突力  $\mathbf{F}$

において考慮されている<sup>9)</sup>付加質量力は含まれない. 式 (15), (18) を上式に代入すれば,  $z$  方向の運動方程式は次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6} d_L^3 \left( \sigma + \frac{\rho}{2} \right) \frac{dv_L}{dt} = & -\frac{\pi}{3} \left( \sigma + \frac{\rho}{2} \right) \\ & \cdot \beta k_M \hat{d}' \frac{(d_L/d)^3}{1+(d_L/d)^3} \frac{(du/dz)^2}{1-C/C_*} \\ & \cdot \left[ \frac{C}{C_*} \left( A_{1z} - \hat{r} A_{3z} + \frac{1}{4} \hat{r}^2 A_{5z} \right) \right. \\ & + \hat{d} \left\{ 1 - \frac{C/C_*}{1+(d_L/d)^3} \right\} \frac{d(C/C_*)/dz}{1-C/C_*} \\ & \left. \cdot (-A_{2z} + \hat{r} A_{4z}) \right] - \frac{\pi}{6} d_L^3 (\sigma - \rho) g \cos \theta_0 \\ & \cdot \left\{ \chi h \frac{d}{dz} \frac{C}{C_*} + 1 - \frac{i_{Lz}}{(\sigma - \rho) g \cos \theta_0} \right\} \\ & \dots\dots\dots(20) \end{aligned}$$

ここに,  $A_{iz} (i=1 \sim 5)$  は  $A_i$  の  $z$  成分である. 上式において,  $d_L \rightarrow d$ ,  $v_L \rightarrow 0$ ,  $i_{Lz} \rightarrow i_z$  とおけば, 流動層中における小粒子の  $z$  方向のつり合い式が次のように求まる.

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{\pi^2}{105} \left( \sigma + \frac{\rho}{2} \right) \beta k_M d^4 \frac{(du/dz)^2}{1-C/C_*} \\ & \cdot \left[ \frac{C}{C_*} r + d \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{C}{C_*} \right) \frac{d(C/C_*)/dz}{1-C/C_*} \right] \\ & - \frac{\pi}{6} d^3 (\sigma - \rho) g \cos \theta_0 \left\{ \chi h \frac{d}{dz} \frac{C}{C_*} \right. \\ & \left. + 1 - \frac{i_z}{(\sigma - \rho) g \cos \theta_0} \right\} \dots\dots\dots(21) \end{aligned}$$

ここに,  $r = d(d^2 u/dz^2)/(du/dz)$ ,  $i_z$  は単一小粒子が単位体積当たりを受ける  $z$  方向の流体力である. 上式中の  $i_z$  は前報<sup>9)</sup>で求めた均一粒径の場合の濃度・速度分布を用いて逆算することができる. その結果, 粒子に働く流体力と水中重量との比  $i_z/\{(\sigma - \rho)g \cos \theta_0\}$  は最大 0.1 の程度で,  $z$  方向の運動には流体力は大きな役割をもたないことがわかった. したがって, 簡単に  $i_{Lz} = i_z$  と仮定して, 式 (20) の  $i_{Lz}$  を消去する. 結果を無次元形で示すと次のようである. すなわち,  $u_* = \sqrt{gh \sin \theta_0}$ ,  $V_L = v_L/u_*$ ,  $T = u_* t/d$ , および  $D_2 = 1 + (d_L/d)^3$ ,  $D_1 = 2(d/d)^3/D_2$  を用いて,

$$\begin{aligned} \frac{dV_L}{dT} = & \beta k_M \left( \frac{d}{h} \right)^2 \left( \frac{d}{d\eta} \frac{u}{u_*} \right)^2 \\ & \cdot \Gamma \left( \frac{d_L}{d}, \frac{h}{d}, \tan \theta_0, C, V_L \right) \dots\dots(22) \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned} \Gamma \left( \frac{d_L}{d}, \frac{h}{d}, \tan \theta_0, C, V_L \right) = & \frac{1}{1-C/C_*} \left[ \frac{2}{35} \pi \left\{ (1-D_1) \frac{C}{C_*} r \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{d}{h} \frac{1-C/(2C_*)}{1-C/C_*} \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left( 1 - \frac{1-C/(C_*D_2)}{1-C/(2C_*)} D_1 \right) \frac{d}{d\eta} \frac{C}{C_*} \Big\} \\ & - D_1 \left\{ \frac{d}{d} \frac{C}{C_*} \left( A_{1z} + \frac{1}{4} \left( \frac{d}{d} r \right)^2 A_{5z} \right) \right. \\ & \left. + \frac{d}{h} \frac{1-C/(C_*D_2)}{1-C/C_*} \frac{d}{d\eta} \frac{C}{C_*} \right. \\ & \left. \cdot \left( \frac{2}{5} \pi V^2 + \frac{d}{d} r A_{1z} \right) \right\} \dots\dots\dots(23) \end{aligned}$$

上式における  $A_{1z}$  は式 (13) で与えられ、 $V=v_L/(\hat{d} \frac{du}{dz})$  の関数である。また  $V \ll 1$  のとき、式 (13) のかわりに式 (14) を用いると、上式はきわめて見通しのよい次式となる。

$$dV_L/dT = F_0 - F_1 V_L + F_2 V_L^2 \dots\dots\dots(24)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= \frac{2}{35} \pi \beta k_M \left( \frac{d}{h} \right)^3 \frac{\{d(u|u_*|)/d\eta\}^2}{1-C/C_*} \\ & \cdot \left[ (1-D_1) \frac{C}{C_*} r + \frac{d}{h} \frac{1-C/(2C_*)}{1-C/C_*} \right. \\ & \left. \cdot \left( 1 - \frac{1-C/(C_*D_2)}{1-C/(2C_*)} D_1 \right) \frac{d}{d\eta} \frac{C}{C_*} \right] \\ F_1 &= \frac{16}{15} \beta k_M \frac{d}{h} \frac{d(u|u_*|)/d\eta}{1-C/C_*} D_1 \left\{ \left( \frac{d}{d} \right)^2 \frac{C}{C_*} \right. \\ & \left. + \frac{2}{7} \frac{d}{h} \frac{1-C/(C_*D_2)}{1-C/C_*} \frac{d}{d\eta} \frac{C}{C_*} r \right\} \\ F_2 &= -\frac{2}{5} \pi \beta k_M \left( \frac{d}{d} \right)^2 D_1 \frac{d}{h} \frac{1-C/(C_*D_2)}{(1-C/C_*)^2} \frac{d}{d\eta} \frac{C}{C_*} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(25)$$

また、明らかに

$$\frac{dV_L}{dT} = \frac{1}{2} \frac{d}{h} \frac{dV_L^2}{d\eta_L}, \quad \frac{d\eta_L}{dT} = \frac{d}{h} V_L \dots\dots\dots(26)$$

以上の諸式における  $C/C_*$ ,  $u|u_*|$  およびそれらの微係数は、前報<sup>9)</sup>、4章において求められている式が利用される。本研究のように水-砂礫系で  $\sigma/\rho \approx 2.6$  の場合には、上式から、底質条件として粒径比  $d_L/d$ 、水理条件として勾配  $\tan \theta_0$  と相対水深  $h/d$  (または  $q_{w0}/\sqrt{gd^3}$ ) をパラメーターとして、無次元上昇速度  $V_L$  を  $\eta_L$  の関数として数値的に解くことができる。さらに、式 (26) の第2式を使用して大粒子の軌跡を求めることができる。

ここで、式 (24) の右辺各項について若干検討し、その符号を調べる。まず、 $F_0$  は、大粒子の垂直運動を考慮しない状態 ( $V_L=0$ ) で小粒子が大粒子に及ぼす衝突力、ならびに  $V_L$  に無関係な接触力、水中重量、および流体力より構成される。 $F_0$  の符号は主として、粒径比を表わす  $D_1$ ,  $D_2$ 、速度分布を表わす  $r=d(d^2u/dz^2)/(du/dz)$  および濃度勾配  $d(C/C_*)/d\eta$  に規定され、 $\eta_L$  に無関係に  $d_L/d > 1$  のとき正、 $d_L/d = 1$  で0、 $d_L/d < 1$  で負となる。次に、 $-F_1 V_L + F_2 V_L^2$  は、大粒子の上昇速度  $V_L$  によって衝突領域が大粒子の上部で増加、

下部で減少する効果と  $V_L$  に基づく粒子間衝突力の作用を表わすものである。 $F_1$  の符号はおもに濃度勾配と  $r$  との積に、 $F_2$  の符号は濃度勾配に規定され、 $F_1$  は底面近傍を除くと正、 $F_2$  は常に正である。

したがって、 $d_L > d$  の場合、式 (24) の右辺第1項、第3項は推進項、第2項は抵抗項となり、小粒子の流動層における大粒子は初速度なしで上昇することができる。また上昇速度に比例する粒子間衝突による抵抗を生じ、高橋<sup>2)</sup>のように粒子による抵抗を流体抵抗で置き換える必要はない。

d) 計算結果および実験との比較

これまでの解析では、大粒子の表面には小粒子による十分な衝突・接触作用が行われていなければならない。このため、解析の適用は底面および流動層表面のごく近傍を除いた  $d_L/2 \leq z_L \leq h - d_L/2$  の範囲に限られる。

Run1の実験条件に相当して、 $d_L/d = 3.2, q_{w0}/\sqrt{gd^3} = 20.5$  の場合について、初期条件  $T=0$  で  $\eta_L = d_L/(2h)$ 、および  $V_L=0$  のもとに、式 (13) の  $A_{1z}$  を用いて式 (22) の数値計算を行い、勾配ごとの大粒子の軌跡および図-12に示す無次元上昇速度の垂直分布を求めた。なお、式中の相対水深  $h/d$  は  $\theta_0$  と  $q_{w0}/\sqrt{gd^3}$  の関数で、前報<sup>9)</sup>、4章の式 (62) による計算値を用いている。

大粒子の実測上昇軌跡の図-3、ならびに  $\eta_L \approx 0.3$  付近における実測上昇速度の図-4には、Run 1の実験条件のもとで傾斜角  $\theta_0$  を変えた場合の軌跡の計算曲線、および上昇速度の計算曲線がいずれも実線で示されている。これらの実験結果は、土石流における流動層表面や河床の激しい変動等に影響されて大きく散らばっているが、計算結果とほぼ一致し、特に、土石流勾配においては勾配の減少とともに上昇速度が増し、逆グレイディング現象が顕著になる特性をうまく説明することができる。

次に、 $V \ll 1$  のときの近似式 (24) において、 $dV_L/dT=0$  として、 $V_L$  の2次式の解

$$V_L = (F_1 - \sqrt{F_1^2 - 4F_0F_2}) / (2F_2) \dots\dots\dots(27)$$

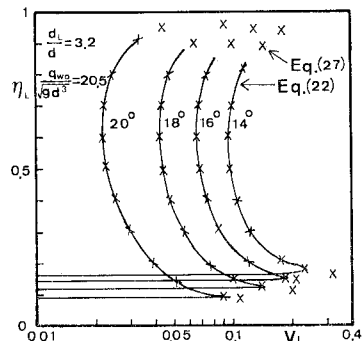


図-12 大粒子の無次元上昇速度  $V_L = v_L/u_*$  の計算曲線

を、上述の数値計算と同じ条件で計算した。その結果は、図-12 に × 印で示すように、底面付近を除いて式(22)の厳密解とよく一致する。したがって、以下では近似式(27)を用いて  $V_{L0}$  を計算し、その特性を検討する。

まず、すでに述べたように、 $V_L$  を規定する3個のパラメーター  $\theta_0$ ,  $h/d$  (または  $q_{w0}/\sqrt{gd^3}$ ) および  $d_L/d$  のうち、2個を固定して  $V_{L0}$  を求め、 $\eta_L=0.5$  における値  $V_{L0}(0.5)$  を用いて、 $V_{L0}/V_{L0}(0.5)$  と  $\eta_L$  との関係を示したのが図-13 である。これらの図から、 $V_{L0}/V_{L0}(0.5)$  の  $x$  方向の分布は実用上ではこ

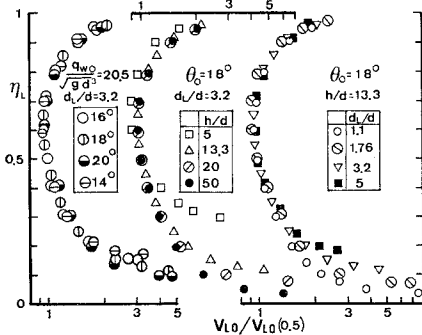


図-13  $V_{L0}/V_{L0}(0.5)$  の分布形へのパラメーターの影響

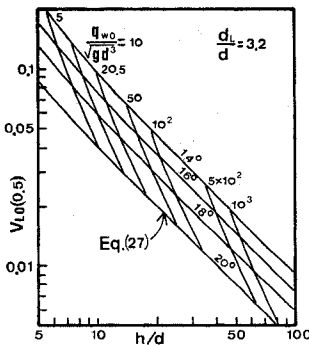


図-14 無次元上昇速度と相対水深の関係

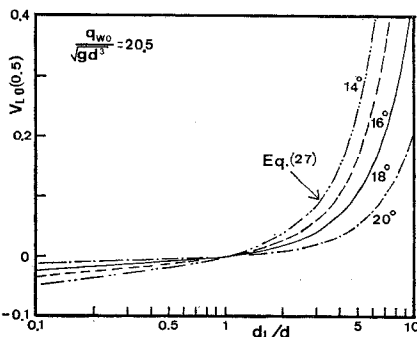


図-15 無次元上昇速度と粒径比の関係

これらのパラメーターに無関係にほぼ類似の分布形をもつとみなして差し支えない。したがって、 $V_{L0}(0.5)$  と上記のパラメーターとの関係を調べれば十分である。

図-14 は、粒径比  $d_L/d=3.2$  の場合について、 $\theta_0$  をパラメーターとして  $V_{L0}(0.5)$  と相対水深  $h/d$  との関係を示したもので、 $h/d$  が  $\theta_0$  と  $q_{w0}/\sqrt{gd^3}$  との関数であること(前報, 4章(3)節)を利用して、図には  $q_{w0}/\sqrt{gd^3}=\text{一定}$  の線も記入している。また、図-15 は  $q_{w0}/\sqrt{gd^3}=20.5$  の場合について、 $\theta_0$  をパラメーターとして  $V_{L0}(0.5)$  と粒径比  $d_L/d$  との関係を示したものである。当然、 $d_L/d=1$  のとき  $V_{L0}=0$ ,  $d_L/d>1$  のとき  $V_{L0}>0$ ,  $d_L/d<1$  のとき  $V_{L0}<0$  となり、 $\theta_0$  が小さいほど  $V_L$  の絶対値は大きい。

以上のように、均一小粒子からなる土石流中の大粒子は流動層内を上昇し、粒径比は大きいほど、勾配および相対水深は小さいほど無次元上昇速度  $V_L=v_L/u_*$  の値は大きくなるのが理論的に示された。さらに、 $V_L$  と  $h/d$ ,  $\theta_0$  との関係を用いて  $v_L/\sqrt{gd}=V_L\sqrt{(h/d)\sin\theta_0}$  のように書き変えることができる。 $v_L/\sqrt{gd}$  の値も  $V_L$  と同様に、 $d_L/d$  が大きいほど、 $\theta_0$  および  $h/d$  が小さいほど、大きくなるのが知られる。

(2) 均一大粒子の流動層における小粒子の下降機構

均一粒径  $d$  の大粒子から構成される流動層における粒径  $d_s(\leq d)$  の小粒子は負の上昇速度をもち、下降することが図-15 に示された。しかし、Run 3 の実験条件で下降速度を求めると、図-5 の実験値に比較して過小である。したがって、小粒子の下降については、前述の理論に修正を加える必要がある。

高濃度の均一大粒子からなる土石流中に小粒子が存在する場合には、隣接する大粒子と小粒子間に相対速度が存在し、衝突条件 ( $dn>0$ ) が満たされても、大粒子は小粒子近傍の他の大粒子と衝突して進路を妨害され、必ずしも小粒子と衝突することはできない。このような作用により、前節の解析における衝突回数  $dn$ , 接点数  $n'_c$  および、頻繁な衝突・接触作用に伴って生じる流体力は減少するので、補正係数としてそれぞれ  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  ( $0\leq\xi_i\leq 1$ ) を導入すれば、小粒子の運動方程式は、式(19)における添字  $L$  を小粒子の添字  $S$  で置換して、次のようになる。

$$m_s \left( 1 + \frac{\rho}{2\sigma} \right) \frac{dv_s}{dt} = \xi_1 F + \xi_2 F' + m_s g a + \frac{\pi}{6} d_s^3 \xi_3 i_s \dots\dots\dots(28)$$

粒径比  $d_s/d$  が小さくなるほど、上述の作用は顕著になると考えられるので、大略の性質を求める意味において



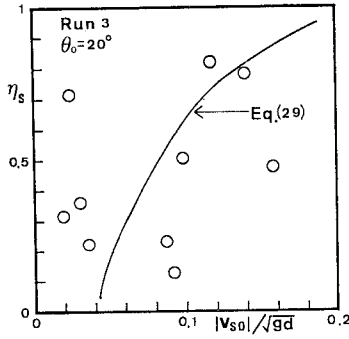


図-16 小粒子の下降速度

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = d_s/d$$

を仮定する。衝突力  $F$ 、接触力  $F'$  を前節と同様な方法により求めて式 (28) に代入し、近似的に  $i_{s2} \approx i_z$  として整理すると、小粒子の無次元速度  $V_s = v_s/u_*$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dV_s}{dT} &= \xi_1 \beta k_M \left(\frac{d}{h}\right)^2 \left(\frac{d}{d\eta} \frac{u}{u_*}\right)^2 \\ &\cdot \Gamma \left(\frac{d_s}{d}, \frac{h}{d}, \tan \theta_0, C, V_s\right) \\ &- (1 - \xi_1) \frac{d}{h} \frac{\sigma - \rho}{\sigma + \rho/2} \cot \theta_0 \dots\dots\dots(29) \\ &\approx \xi_1 (F_0 - F_1 V_s + F_2 V_s^2) \\ &- (1 - \xi_1) \frac{d}{h} \frac{\sigma - \rho}{\sigma + \rho/2} \cot \theta_0 \dots\dots\dots(30) \end{aligned}$$

ここに、 $\Gamma$ 、 $F_0$ 、 $F_1$  および  $F_2$  は式 (23)、(25) の  $d_L$ 、 $V_L$  をそれぞれ  $d_s$ 、 $V_s$  と置き換えたものである。Run 3 ( $q_{w0}/\sqrt{gd^3} = 3.58$ ) について、上式から非定常項を無視し、小粒子の無次元下降速度  $v_{s0}/\sqrt{gd}$  を求めると図

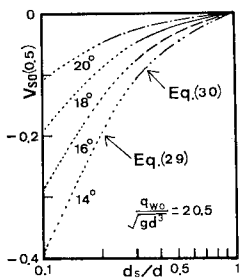


図-17 無次元下降速度と粒径比の関係

16 のようになる。同図には、図-5 などから求めた実験値も記され、両者はほぼ適合している。

下降速度に及ぼすパラメーターの影響を調べるため、上式から非定常項を無視し、 $\eta_s = 0.5$  における無次元速度  $V_{s0}(0.5)$  を計算した結果を図-17 に示す。粒径比  $d_s/d$  は 1 から減少

するほど、勾配は低いほど、そして図は省略するが相対水深は小さいほど、 $|V_s|$  は大きくなることがわかる。さらに  $v_s/\sqrt{gd}$  を求めると、 $V_s$  と同様な傾向をもつことが認められる。

このように、粒径比  $d_s/d$  が 1 より小さくなるほど、小粒子近傍の大粒子相互の干渉により、小粒子を支持する衝突・接触作用は減少して相対的に水中重量の影響が

大きくなり、小粒子は下降する。このような挙動は、大粒子相互の間隔が「ふるい目」のような役割をもち、その中を小粒子がふるい分けられながら下降するという考え方<sup>7)</sup>に相当するものである。

## 6. 結 語

大・小 2 種の砂礫粒子の混合材料を底質とする土石流実験を行い、流動層における粒子の挙動、逆グレイディング現象および土石流先端部への大粒子の集中現象について詳細な測定を行うとともに、粒子運動を解析して逆グレイディングの生成機構を理論的に検討した。おもな結果を要約すると以下のようである。

(1) 土石流の流動層における逆グレイディングは、流動層に小粒子が多い場合には大粒子の上昇により、逆に大粒子が多い場合には小粒子の下降により生ずる。したがって、大・小粒子の上昇・下降速度が大きくなり、流動層の表面に大粒子が集まりやすいほど、逆グレイディングは著しい。さらに、表面の大粒子は速い表面流速によって先端部に運ばれるため、逆グレイディングが著しいほど、大粒子の先端集中も顕著に現われる。上記の諸現象はいずれも、土石流発生勾配以上の勾配においては、大・小粒子の粒径比が大きくなり、勾配が小さいほど、著しいことが実験的に確認された。

(2) 土石流先端部における大粒子の輸送割合(集中度)は傾斜角  $\theta_0$  が小さいほど増加するが、土石流勾配の下限に相当する  $\theta_{0M} \approx 14^\circ$  付近で最大となる。さらに小さい  $\theta_0$  では、輸送割合は急減するが、これは  $\theta_0 \leq \theta_{0M}$  においては、粒子濃度の濃い流動層の上に粒子濃度の薄い水流層が新たに現われることから説明される。

(3) 均一な小粒子から構成される流動層において、大粒子に作用する衝突力と接触力を解析することにより得られた大粒子の運動方程式から、大粒子の軌跡および上昇速度などを理論的に求めた。無次元上昇速度は水-砂礫系の土石流では、大・小粒子の粒径比、勾配および相対水深によって規定されることを示し、上昇速度の推定に役立つ種々の図が作製されている。また、小粒子の下降速度についても理論的な考察を行った。以上の理論は粒子の軌跡や上昇、下降速度に関する実験とほぼ一致し、逆グレイディング現象の特性をよく説明することができる。

最後に、実験およびデータ整理に際し、藤田和夫技官、山本行範氏(現・日本鋼管)、岡田裕彰氏(現・福岡県)に多大の助力を受けた。記して謝意を表す。

## 参 考 文 献

- 1) 大同淳之: 急勾配上の多量の砂れきを含む流れの流動特性, 第 18 回水理講演会論文集, pp. 199~203, 1974.
- 2) Takahashi, T.: Debris flow on prismatic open chan-

- nel, A.S.C.E., Vol. 106, HY 3, pp. 381~396, 1980.
- 3) Bagnold, R.A. : Experiments on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear, Proc. Roy. Soc. A, Vol. 225, pp. 49~63, 1954.
  - 4) 椿 東一郎・橋本晴行・末次忠司：土石流における粒子間応力と流動特性，土木学会論文報告集，第 317 号，pp. 79~91, 1982.
  - 5) 高橋 保：土石流の発生と流動に関する研究，京都大学防災研究所年報，20 号 B-2, pp. 405~435, 1977.
  - 6) 水山高久：土石流から掃流に変化する勾配での流砂量，新砂防，116 号，pp. 1~6, 1980.
  - 7) 橋本晴行・椿 東一郎・山本行範：土石流における巨レキの先端集中に関する実験的研究，第 36 回土木学会年次学術講演会概要集，pp. 565~566, 1981.

(1982. 9. 20・受付)

---