

沈降性粒子を含む鉛直噴流の特性

CHARACTERISTICS OF SEDIMENT LADEN VERTICAL JETS

栗谷 陽一*・藤崎 一裕**

By Yoichi AWAYA and Kazuhiro FUJISAKI

1. 緒言

沈降性を有する粒子を含む噴流が静水中へ放出される現象について考察した。周囲流体と密度差を有する懸濁液が鉛直に噴出されると、噴出流体は噴出口の近傍では運動量が卓越して jet 的な挙動をするが、軸上の流速が低下するにつれて、周囲流体との密度差が卓越して、重力プルームへと移行する。さらに軸対称噴流のような場合には、このプルームから粒子群の沈降が卓越する領域へと現象が進展していく。本報は、これらの現象に及ぼす粒子と流体との相対速度の影響や、粒子濃度の影響などを調べたものである。

なお、この種の現象に関しては、運動量が卓越している場合については吉川ら¹⁾、Brush³⁾、Singamsetti⁴⁾の検討などがあり、密度差が卓越している場合については北野ら²⁾の報告がある。また、均一流体の密度噴流についての報告もなされている。均一流体の場合の現象は、本報で対象とした現象のうち、沈降速度=0の場合に相当する。この場合に対しても、従来の報告との比較検討を行った。

本報では現象の概略を知ることが目的とした。したがって、噴流内の乱れには混合距離の理論を用い、流速分布や濃度分布には相似形を仮定して、基礎式の解をモーメント法により求めた。

2. 基礎方程式

c を粒子の体積濃度、 ρ_s および ρ_l を粒子および流体の密度とすると、粒子の存在による過剰の比重 σ は

$$\sigma = c \cdot (\rho_s - \rho_l) / \rho_l$$

と表わせる。噴流の中心軸に沿って鉛直下方へ x 軸、水平方向に y 軸をとりそれぞれの方向の流速を u, v 、粒子の沈降速度を w とし、 c を小さいとすると、この場合

の基本式は体積、運動量および粒子の重力流束の保存則に対応するものとして、以下の3式となる。

$$\partial u / \partial x + y^{-n} \partial (y^n v) / \partial y = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{aligned} \partial u^2 / \partial x + y^{-n} \partial (y^n uv) / \partial y &= 0 \\ &= \sigma g + y^{-n} \partial \{ K y^n (\partial u / \partial y) \} / \partial y \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial \{ \sigma (u + w) \} / \partial x + y^{-n} \partial (y^n \sigma v) / \partial y \\ = y^{-n} \partial \{ K y^n (\partial y / \partial \sigma) \} / \partial y \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

上式で $n=0$ は2次元、 $n=1$ は軸対称密度噴流に対応する。また K は y 方向の渦動拡散係数で本報では、プラントルの運動量輸送理論による値を用いた。つまり

$$K = l^2 |\partial u / \partial y|, \quad l = \varepsilon \cdot x \dots\dots\dots (4)$$

とし、 ε は運動量と粒子に対して、同一の値をとるものとした。噴流内の速度分布と濃度分布に相似形を仮定し、分布形として正規分布を用いると次式となる。

$$u = u_0(x) \exp \{-y^2/b(x)^2\} \dots\dots\dots (5)$$

$$\sigma = \sigma_0(x) \exp \{-y^2/a(x)^2\} \dots\dots\dots (6)$$

添字 0 は軸上の値を意味し、 a および b はそれぞれ粒子および運動量の広がり幅に対応する。式(1)、(4)、(5)、(6)を式(2)、(3)に代入してモーメント変換すれば、 y についての0次および1次の式が、無次元表示ではそれぞれ以下のようになる。2次元の場合

$$1/\sqrt{2} \cdot d(U_0^2 B) / dX = AS \dots\dots\dots (7)$$

$$d\{SA(1+U_0/(1+\lambda^2)^{1/2})\} / dX = 0 \dots\dots\dots (8)$$

$$\begin{aligned} (\pi+4)U_0 B^2 dU_0/dX + (\pi+2)BU_0^3 dB/dX \\ = 2\sqrt{2}\pi BU_0^3 + 4A^2 S \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{ \tan^{-1} \lambda + \lambda / (1 + \lambda^2) \} SB dU_0/dX \\ + \{ \tan^{-1} \lambda + \lambda(\lambda^2 - 1) / (1 + \lambda^2)^2 \} SU_0 dB/dX \\ + 2\{1 + U_0/(1 + \lambda^2)^2\} S dA/dX \\ + \{1 + U_0/(1 + \lambda^2)\} A dS/dX \\ = 2\sqrt{\pi} U_0 S / (1 + \lambda^2)^{3/2} \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

ただし $\lambda = A/B \dots\dots\dots (11)$

$$\left. \begin{aligned} U_0 = u_0/w, \quad X = x/L_0, \quad B = b/(\varepsilon^2 L_0) \\ A = a/(\varepsilon^2 L_0), \quad S = \sigma_0 g L_0 / w^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots (12)$$

* 正会員 工博 九州大学教授 工学部水工土木工学教室
** 正会員 工博 九州工業大学助教授 開発土木工学教室

$$\left. \begin{aligned}
 L_0 &= m(qg)^{-2/3}(2/\pi)^{1/2}\epsilon^{-2/3} \\
 m &= 2 \int_0^\infty u^2 dy, \\
 q &= 2 \int_0^\infty \sigma(u+w) dy \\
 &= \sqrt{\pi} a \sigma_0 \{w + bu_0(a^2 + b^2)^{-1/2}\} \\
 M &= m/(\sqrt{\pi}/2 \epsilon^2 L_0 w^3) = BU_0^2 \\
 Q &= qg \epsilon^{-2} w^{-3} \\
 &= \sqrt{\pi} AS \{1 + BU_0/(A^2 + B^2)^{1/2}\}
 \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

$$\left. \begin{aligned}
 M &= m/(\sqrt{\pi}/2 \epsilon^2 L_0 w^3) = BU_0^2 \\
 Q &= qg \epsilon^{-2} w^{-3} \\
 &= \sqrt{\pi} AS \{1 + BU_0/(A^2 + B^2)^{1/2}\}
 \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

軸対称の場合も同様にして以下の式が得られる。

$$d(U_0^2 B^2)/dX = 2SA^2 \dots (15)$$

$$d\{SA^2(1 + U_0/(1 + \lambda^2))\}/dX \dots (16)$$

$$\begin{aligned}
 B^3 U_0 dU_0/dX + (2\sqrt{2} - 1)/\sqrt{2} B^2 U_0^2 dB/dX \\
 = A^3 S + 2/\sqrt{\pi} B^2 U_0^2 \dots (17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \{1 - 1/(1 + \lambda^2)^{3/2}\} AB^2 S dU_0/dX \\
 + \{2 - 2/(1 + \lambda^2)^{3/2} - 3\lambda^2/(1 + \lambda^2)^{5/2}\} \\
 \cdot ABSU_0 dB/dX + 3\{U_0/(1 + \lambda^2)^{5/2} + 1\} \\
 \cdot A^2 S dA/dX + (1 + U_0/(1 + \lambda^2)^{3/2}) A^3 dS/dX \\
 = 8/\sqrt{\pi} \cdot \lambda^2/(1 + \lambda^2)^2 B^2 SU_0 \dots (18)
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \text{ただし } U_0 &= u/w, X = x/L_1, B = b/(\epsilon^2 L_1) \\
 A &= a/(\epsilon^2 L_1), S = \sigma_0 g L_1/w^2
 \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

$$\left. \begin{aligned}
 L_1 &= (m^{3/4}(qg)^{-1/2}(2/\pi)^{3/4}\epsilon^{-1}) \\
 m &= \int_0^\infty 2\pi y u^2 dy, \\
 q &= \int_0^\infty 2\pi y (u+w) \sigma dy \\
 &= \pi \sigma_0 a^2 \{w + b^2 u/(a^2 + b^2)\} \\
 M &= m/(\sqrt{\pi}/2 \epsilon^2 L_1 w^3) = U_0^2 B^2 \\
 Q &= qg L_1^{-1} w^{-3} \epsilon^{-4} \\
 &= \pi A^2 S (1 + U_0/(1 + \lambda^2))
 \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

$$\left. \begin{aligned}
 M &= m/(\sqrt{\pi}/2 \epsilon^2 L_1 w^3) = U_0^2 B^2 \\
 Q &= qg L_1^{-1} w^{-3} \epsilon^{-4} \\
 &= \pi A^2 S (1 + U_0/(1 + \lambda^2))
 \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

仮想原点からの噴出を考えると、現象は運動量 M と粒子流束 Q により規定されるが、以上の無次元表示を用いると $M=Q^{2/3}$ となり、2, 3次元とも1つのパラメーターでまとめることができる。

3. 計算結果と考察

2次元の場合の計算結果を 図-1~図-4 に、軸対称の場合の結果を 図-5~図-8 に示す。2次元の場合には、これらの図によると jet 的挙動から、パラメーター Q に応じたプリュームへと現象が移行している様子がわかる。このプリュームは式 (15)~(18) から

$$\begin{aligned}
 U_0 Q^{-1/3} &= A \{ \tan^{-1} A - (\pi + 2 - 2\sqrt{2} A) \\
 &\quad \times 2^{-1/2} (1 + A)^{-2/3} \}^{-1} \dots (22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 BX^{-1} &= 2\sqrt{2} \pi (\pi + 2 - 2\sqrt{2} A)^{-1}, A = BA \\
 &\dots (23)
 \end{aligned}$$

$$SQ^{-2/3}X = (U_0 Q^{-1/3})^{1/2} 2^{-1/2} A^{-1} \dots (24)$$

$$\begin{aligned}
 2\pi (U_0 Q^{-1/3})^2 + \{Q^{-1/3} + U_0 Q^{-1/3} (1 + A^2)^{-1/2}\} \\
 \times (\pi + 2 - 2\sqrt{2} A)^{-1} = 1 \dots (25)
 \end{aligned}$$

ただし、 A は式 (22) と (25) を連立させて求める。

図-1~図-4 中の jet 域に記した点は、吉川らの論文¹⁾より引用したもので、 $Q=120$ の場合の実験結果である。このとき $\epsilon=0.19$ とした。粒子濃度は計算値の方が全般的に大きめに出ているが、流速や運動量の広がりについては、計算値は実験値をよく近似している。また、図-1 の右端部の点は気泡噴流の実験値²⁾で、 $\epsilon=0.3$ とした。これらの図から、 ϵ に適当な値を用いると計算値は現象の大略を表現できるものと考えられる。

図-5~図-8 の軸対称の場合には、 $w=0$ ($Q=\infty$) の場合を除いて、jet→プリュームからさらに粒子群の沈降

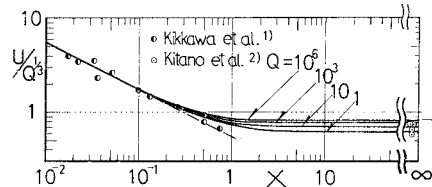


図-1 U と X との関係 (2次元)

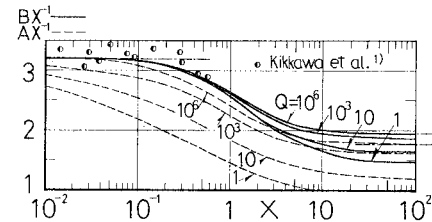


図-2 A, B と X との関係

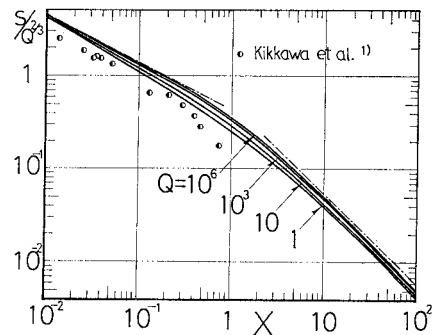


図-3 S と X との関係

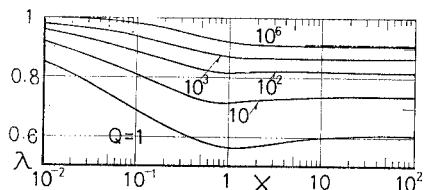


図-4 λ と X との関係

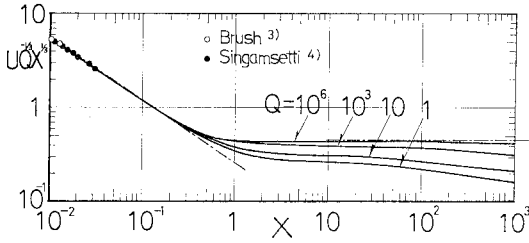


図-5 U と X との関係 (軸対称)

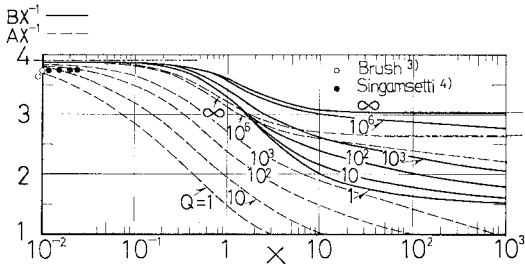


図-6 A, B と X との関係

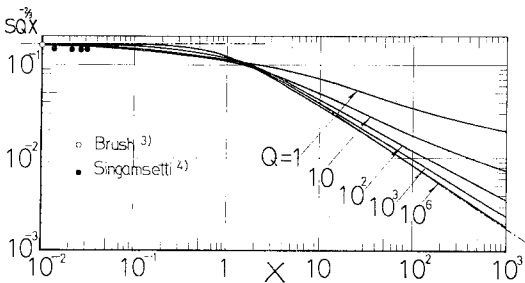


図-7 S と X との関係

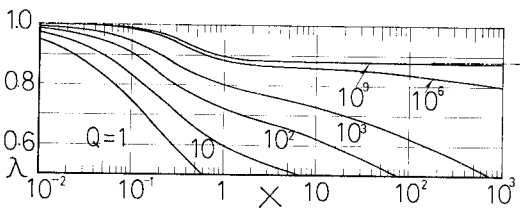


図-8 λ と X との関係

へと現象が進行している。この沈降過程が現われることが2次元の場合との最も大きな相違点である。軸上流速 U_0 についていえば、これらの過程は X のべき乗がそれぞれの領域で X^{-1} , $X^{-1/3}$, $X^{-1/2}$ で表わされる。図-5によると、たとえば $Q=10^3$ の場合などは、 $X < 1$ でjet的、 $X=10$ の近傍でプルームの挙動をし、 $X > 10^3$ で沈降の影響が強くなる様子が現われている。他の図からも同様な考察が可能である。しかし、 Q が小さい場合や、 X が大きい箇所のように相対的に粒子群の沈降の影響が大きくなると、粒子濃度の分布が正規分布で近似できるといふ仮定に無理が生じ、図中の計算結果と実際の現象との差が大きくなることも予想される。

図-5~図-7 に記した点も従来の実験値^{3),4)}を示す。

これらの実験は、jet 域での粒子の挙動を調べる目的で行われたものであるが、 $\epsilon=0.17$ とすると計算値は実験値に近い値となることがわかる。なお、図-2, 図-6 中の点(実験結果)は運動量の広がり幅 B を示す。

粒子群の広がり幅 A に対しては、 $\lambda=A/B$ が1より大きくなる例^{1),4)-8)}もあり、逆に $\lambda < 1$ の実測^{2),3),5),9)}も報告されている。本報では、運動量と粒子の拡散係数を等しいとしたが、このことは検討を要する問題である。

一様流体の密度噴流については、これまでにいくつかの報告がある。これらの報告では、 λ を一定値とし、エントレインメントの概念を用いるなど、噴流内の乱れに関して、より大まかな取扱いがなされている場合が多い。 $w=0$ の場合については、先に示した基礎式を用いて、2次元および軸対称噴流におけるjet, プルームの解がそれぞれ求められる。これらの解は図-1~図-8 中にも一点鎖線で記入されているが、この混合距離理論を用いた解と従来の検討とを比較した結果を表-1, 2 に示す。これらの表によると、 ϵ の値は、2次元の場合 jet で0.2, プルームで0.3, 軸対称の場合 jet で0.18, プルームで0.2程度が妥当であり、jet とプルームで異なる ϵ の値を用いた方が従来の結果をよりよく再現できるようである。

なお、表中の U_{0i} , b_i , σ_{0i} は仮想原点における噴出流体流速、粒子の流速および運動量を、幅 D_0 のスリットから濃度 C_i の流体が一様速度 U_i で噴出する場合のそれぞれの値に等置して求めたもので、次の関係がある

$$\left. \begin{aligned} U_i \sqrt{D_0} &= (2/\pi)^{1/4} U_{0i} \sqrt{b_i}, \\ C_i \sqrt{D_0} &= (2/\pi)^{1/4} \sigma_{0i} \sqrt{b_i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

軸対称の場合も D_0 をノズル直径とすると次式となる。

$$U_i D_0 = \sqrt{2} U_{0i} b_i, \quad C_i D_0 = \sqrt{2} \sigma_{0i} b_i \dots\dots (27)$$

一様流体の密度噴流に関して、jet からプルームまでの一連の解析では、2次元、軸対称の場合に対してそれぞれ Lee et al.⁹⁾ や Morton⁷⁾ の検討などがよく知られている。これらの解析では、いずれも λ を X に無関係な一定値とし、エントレインメント係数 α を用いて現象が調べられている。 λ は図-4, 図-8 にも示されているように $w=0$ の場合でも、jet からプルームに至る過程で変化している。しかし、 λ の値の変化する幅は比較的小さいともいえる。以下には α について考察する。

α を用いると流体の保存則から、2次元の場合

$$d(\sqrt{\pi}/2 u_{0b})/dx = \alpha u_0 \dots\dots\dots (28)$$

が得られる。無次元表示する前の段階での式(7), (8)を用いて、上式から $d/dx(u_0 b)$ を消去すると

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \sqrt{2} \epsilon^2 + 2a^2 \sigma_{0g} / (\sqrt{\pi} b u_0^2) - \sqrt{2} \cdot a \sigma_{0g} / (\sqrt{\pi} u_0^2) \\ &= \sqrt{2} \epsilon^2 + \sqrt{1+\lambda^2} (2\lambda - \sqrt{2}) \pi^{-1} R_i, \quad R_i = (qg) u_0^{-3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

表-1 jet と プリ ュ ー ム の 解 (2次元)

	jet				プ リ ュ ー ム			
	bx^{-1}	ax^{-1}	$\frac{u_0 \sqrt{x}}{u_{0i} \sqrt{h_i}}$	$\frac{\sigma_0 \sqrt{x}}{\sigma_{0i} \sqrt{h_i}}$	bx^{-1}	ax^{-1}	$\frac{u_0}{(qg)^{1/3}}$	$\frac{\sigma_0 g x}{(qg)^{2/3}}$
著 者 ら	3.192e ²	3.192e ²	0.5598e ⁻¹	0.5598e ⁻¹	1.949e ²	1.771e ²	0.8208e ^{-2/3}	0.5244e ^{-4/3}
Lee, et al. ⁹⁾	0.3610	0.3250	0.5262	0.5262	0.1806	0.1625	1.812	2.578
Kotsovinos, et al. ⁶⁾	0.0808	0.1083	2.814	3.029	0.0808	0.1083	1.650	2.381
Rouse, et al. ⁵⁾	—	—	—	—	0.1768	0.1562	1.800	2.600

表-2 jet と プリ ュ ー ム の 解 (軸対称)

	jet				プ リ ュ ー ム			
	bx^{-1}	ax^{-1}	$\frac{u_0 x}{u_{0i} b_i}$	$\frac{\sigma_0 x}{\sigma_{0i} b_i}$	bx^{-1}	ax^{-1}	$\frac{u_0 x^{1/3}}{(qg)^{1/3}}$	$\frac{\sigma_0 g x^{5/3}}{(qg)^{2/3}}$
著 者 ら	3.853e ²	3.853e ²	0.2596e ⁻²	0.2596e ⁻²	3.030e ²	2.669e ²	0.4520e ^{-4/3}	0.1756e ^{-8/3}
Morton ⁷⁾	0.1640	0.1902	6.098	6.098	0.0984	0.1141	4.782	11.74
Abraham ⁸⁾	0.1125	0.1220	8.770	7.850	—	—	—	—
Rouse et al. ⁵⁾	—	—	—	—	0.1021	0.1187	4.700	11.00

となり、 α は R_i とともに変化する量となる。jet で $R_i = 0$ 、プリュームで $R_i = 0.8207^{-3}$ であることを考えると、 α の両極端の値も求められる。

軸対称の場合も同様に、次式で α を定義すると

$$d/dx(\pi b^2) = \alpha 2\pi b u_0 \dots\dots\dots (30)$$

式 (15), (16) に対応する式を用いて $d/dx(u_0 b^2)$ を消去して、次式が得られる¹⁴⁾。

$$\alpha = (2 + \sqrt{2}) \epsilon^2 / \sqrt{\pi} + \lambda \{ \lambda + (\lambda - 1)(1 + \sqrt{2}) \} / (2F_{dc}^2)$$

$$F_{dc} = u_0 / \sqrt{a \sigma_0 g} \dots\dots\dots (31)$$

この場合も 2次元の場合と類似の考察が可能で、現象の進行とともに α が変化することになる。 α に関しては

$$\alpha = 0.055 + 0.087 R_i / \sqrt{2}^{10), \quad \alpha = 0.057 + 0.25 / F_{dc}^2^{11)}$$

などのような形で利用されている例^{9), 12), 13)} もみられる。本報では、混合距離の理論を用い ϵ を一定として、(29), (31) のような式を導いたが、 ϵ の R_i や F_{dc} に対する依存性については別に検討を要する。

以上、本報では粒子を含む密度噴流について考察した。体積、運動量と、粒子の重力流束の保存則を基礎式として、噴流内の乱れには混合距離の理論を用い、流速分布や濃度分布には相似形を仮定して現象を解析した。基礎式の 0 次および 1 次のモーメント変換式を数値計算して無次元距離 X の種々の値に応じて、運動量、相対密度、粒子群沈降のいずれかが卓越した状況が現われる様子を無次元パラメーター Q との関連において示した。

参 考 文 献

1) 吉川秀夫・福岡捷二・吉川勝秀：流体と固体粒子の相互作用に関する研究，土木学会論文集，第 260 号，pp. 89~100, 1977 年 4 月。

2) 北野義則・田中経彦・栗谷陽一：静水中における気泡噴流の性質，土木学会論文集，第 253 号，pp. 37~47, 1976 年 9 月。

3) Brush, L. M.: Exploratory study of sediment diffusion, J. Geophys. Res., Vol. 67, No. 4, pp. 1427~1433, 1962.

4) Singamsetti, S. R.: Diffusion of sediment in a submerged jet, Proc. of ASCE, Vol. 92, No. HY2, pp. 153~168, March, 1966.

5) Rouse, H., C. S. Yih and H. W. Humphreys: Gravitational convection from a boundary source, Tellus, Vol. 4, pp. 201~210, 1952.

6) Kotsovinos, N. E. and E. J. List: Plane turbulent buoyant jets, J. Fluid Mech., Vol. 81, pp. 22~24, 1977.

7) Morton, B. R.: Forced plumes, J. Fluid Mech., Vol. 5, pp. 151~163, 1959.

8) Abraham, G.: Jet diffusion in liquid of greater density, Proc. of ASCE, Vol. 86, No. HY6, pp. 1~13, June, 1960.

9) Lee, S. L. and H. W. Emmons: A study of natural convection above a line fire, J. Fluid Mech., Vol. 11, pp. 353~368, 1961.

10) List, E. J. and J. Imberger: Turbulent entrainment in buoyant jets and plumes, Proc. of ASCE, Vol. 99, No. HY9, pp. 1461~1474, September, 1972.

11) Wright, S. J. and R. B. Wallance: Two-dimensional buoyant jets in stratified fluid, Proc. of ASCE, Vol. 105, No. HY11, pp. 1393~1406, November, 1979.

12) Fox, D. G.: Forced plume in a stratified fluid, J. of Geophys. Res., Vol. 75, No. 33, pp. 6818~6835, 1970.

13) Hirst, E.: Buoyant jets discharged to quiescent stratified ambients, J. of Geophys. Res., Vol. 76, No. 30, pp. 7375~7885, 1971.

14) Scorer, R. S.: Environmental Aerodynamics, Ellis Horwood, pp. 320~321, 1978.