土木学会論文報告集
第336号・1983年8月
【論　文】

幾何学的非線形性を考慮した等質ならびに層状性平板の解析理論

STATIC AND DYNAMIC THEORIES OF HOMOGENEOUS AND LAMINATED PLATES WITH GEOMETRICAL NONLINEARITY

平 島 健 一*・根 岸 嘉 和**
By Ken-ichi HIRASHIMA and Yoshikazu NEGISHI

1. まえがき

通常の微小変位を仮定する等質あるいは対称な積層状態の層状性平板の面外（曲げ）挙動と面内（伸縮）挙動は互いに連成せず，それぞれ独立な支配方程式を形成するが，幾何学的な非線形性を考慮する場合，それらは互いに連成（bending-stretching coupling）し一般に複雑な方程式系を形成する．その最も簡単なものに板厚方向座標に関して面内変位の1次の項と面外変位（たわみ）の0次の項のみを採用し，幾何学関係式として Green のひずみテンソルの式に特別な条件を付加して一部線形化した式を用いて静的な平板理論を構成した von Kármán の理論[1]がよく知られている．この方程式の誘導には基本仮定として横方向のせん断変形の効果を無視するいわゆる Kirchhoff の仮定が採用されている．その後この理論の理論的妥当性に関する純数学的検証[2]や数値計算例に対する研究成果[3),4]が多数発表されており，また異方性板，層状性板の解析精度の向上のため，Kirchhoff の仮定を除去したいわゆるせん断変形を考慮する拡張理論の提案やそれを用いた各種の荷重，境界条件のもとでの数値計算例もなされはじめている[5)~9]．さらに最近の研究傾向としては均質な等方性板から異方性，層状性の平板や複雑な境界条件，荷重条件の問題に対する取り扱いへと広がってきている[3]．

本論文では上述の取り扱いを平板・はりを含めて統一的に拡張および位置付けすることを目的とし，3次元弾性論を立脚点として，時間依存性を有する3次元変位成分 u_j を板厚方向の座標 x_3 に関して無限項のベキ級数に展開することによって，完全な形で幾何学的非線形性を考慮した静的・動的な平板の解析理論の定式化を行う．またここで得られた結果に対して，従来までに発表された非線形性を考慮した平板・はりに対する主たる研究結果との関連について記述し，本論文の結果において低次のいくつかの変位係数および n 次モーメントのみを採用すれば，それらに帰着することを証明する．なお，平板の厚さは一定であるとして以下，定式化を行う．

* 正会員　工博　山梨大学助教授　工学部土木工学科
** 正会員　工修　福島工業高等専門学校講師　土木工学科

2. 基礎方程式の誘導

ここでは，平板の問題に対する定式化について記述するが，奥行方向に変化のないはりの問題の場合には，後述するように，得られた結果を単に奥行方向に関係する項および成分を削除してやればよい．

まず，**Fig. 1** に示すように，一定厚さ $2b(=h)$ の平板中央面が x_1-x_2 平面となるような直交デカルト座標系（x_1, x_2, x_3）を採用し，3次元変位 $u_j=u_j(x_1, x_2, x_3, t)$ を板厚方向の座標 x_3 に関して次式のようにベキ級数に展開できるものと仮定する．

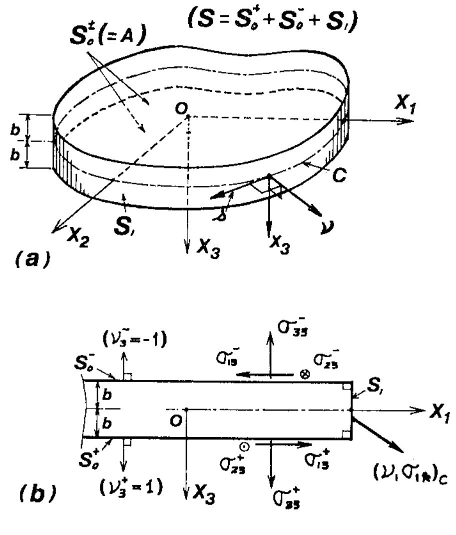

Fig. 1 Geometry of plate and surface tractions.

$$u_j=\sum_{n=0}^{\infty} x_3{}^n \cdot u_j{}^{(n)} \qquad (1)$$

ここに，$u_j{}^{(n)}=u_j{}^{(n)}(x_1, x_2, t)$ は n 次の変位係数（displacement coefficients of nth order）とよばれる未知量である．

運動学的関係式として Lagrange 座標で定義される Green のひずみテンソル[10] e_{ij} を採用し，式 (1) の変位係数との関係を求めれば，最終的に次式のようになる．

$$\begin{aligned} e_{ij}&=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\\ &=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x_3{}^n \cdot \{\delta_{j\alpha}u_{i,\alpha}{}^{(n)}+\delta_{i\alpha}u_{j,\alpha}{}^{(n)}\\ &\quad+(n+1)(\delta_{j3}u_i{}^{(n+1)}+\delta_{i3}u_j{}^{(n+1)})\}\\ &\quad+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} x_3{}^{n+m}\{\delta_{i\alpha}u_{k,\alpha}{}^{(n)}+(n+1)\delta_{i3}u_k{}^{(n+1)}\}\\ &\quad\cdot\{\delta_{j\beta}u_{k,\beta}{}^{(m)}+(m+1)\delta_{j3}u_k{}^{(m+1)}\} \end{aligned} \qquad (2)$$

なお，上式ではテンソル表記が用いられ和の規約が採用されている．また下添字の指標のうちラテン文字は 1，2，3 を，ギリシア文字は 1，2 をとるものとする．δ_{ij} は Kronecker の delta である．

いまたとえば，変位係数 $u_j{}^{(n)}$ のうち $u_j{}^{(0)}$, $u_\alpha{}^{(1)}$ のみを採用した場合の式 (2) を具体的に書き出すと以下のようになる．

$$\left.\begin{aligned} e_{11}&=u_{1,1}{}^{(0)}+\frac{1}{2}u_{k,1}{}^{(0)}u_{k,1}{}^{(0)}+x_3(u_{1,1}{}^{(1)}\\ &\qquad+u_{\alpha,1}{}^{(0)}u_{\alpha,1}{}^{(1)})+\frac{1}{2}x_3{}^2u_{\alpha,1}{}^{(1)}u_{\alpha,1}{}^{(1)},\\ e_{22}&=u_{2,2}{}^{(0)}+\frac{1}{2}u_{k,2}{}^{(0)}u_{k,2}{}^{(0)}+x_3(u_{2,2}{}^{(1)}\\ &\qquad+u_{\alpha,2}{}^{(0)}u_{\alpha,2}{}^{(1)})+\frac{1}{2}x_3{}^2u_{\alpha,2}{}^{(1)}u_{\alpha,2}{}^{(1)},\\ e_{33}&=\frac{1}{2}u_\alpha{}^{(1)}u_\alpha{}^{(1)},\\ e_{12}&=\frac{1}{2}(u_{2,1}{}^{(0)}+u_{1,2}{}^{(0)}+u_{k,1}{}^{(0)}u_{k,2}{}^{(0)})\\ &\quad+\frac{1}{2}x_3(u_{2,1}{}^{(1)}+u_{1,2}{}^{(1)}+u_{\alpha,1}{}^{(0)}u_{\alpha,2}{}^{(1)}\\ &\qquad+u_{\alpha,2}{}^{(0)}u_{\alpha,1}{}^{(1)})+\frac{1}{2}x_3{}^2u_{\alpha,1}{}^{(1)}u_{\alpha,2}{}^{(1)},\\ e_{13}&=\frac{1}{2}(u_{3,1}{}^{(0)}+u_1{}^{(1)}+u_{\alpha,1}{}^{(0)}u_\alpha{}^{(1)}+x_3u_{\alpha,1}{}^{(1)}u_\alpha{}^{(1)}),\\ e_{23}&=\frac{1}{2}(u_{3,2}{}^{(0)}+u_2{}^{(1)}+u_{\alpha,2}{}^{(0)}u_\alpha{}^{(1)}+x_3u_{\alpha,2}{}^{(1)}u_\alpha{}^{(1)}). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

後述する Chu & Herrmann[5], Wu & Vinson[6),7] および Singh ら[8]の各理論における変位場は上式中の実線部をすべて削除し，点線部は $k=3$ の項のみを残したもの（いわゆる，せん断変形理論におけるひずみ場）であり，さらにこの制限に加えて断面のせん断変形なしの仮定：

$$u_\alpha{}^{(1)}=-u_{3,\alpha}{}^{(0)} \qquad (4)\text{注 1)}$$

を採用したものがいわゆる von Kármán 理論のひずみ-変位（係数）関係式である．なお，Schmidt の理論[9] は $u_j{}^{(0)}$, $u_\alpha{}^{(1)}$, $u_\alpha{}^{(3)}(=4(u_\alpha{}^{(1)}+u_{3,\alpha}{}^{(0)})/3h^2)$ の項までを採用するが，面内回転角（ω_3）は面外回転角（ω_α）に比して十分小さく無視できるという仮定を設けた変位場が設定されたものに相当する．ここに，ω_k は具体的に次式のように定義される量である．

$$\left.\begin{aligned} &\omega_1=\frac{1}{2}(u_{2,3}-u_{3,2}),\quad \omega_2=\frac{1}{2}(u_{3,1}-u_{1,3}),\\ &\omega_3=\frac{1}{2}(u_{1,2}-u_{2,1}). \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

次に材料の構成関係式としていわゆる hyperelastic な材料[10]を対象とし，また通常，幾何学的非線形問題で設定される Kirchhoff の応力テンソル σ_{ij} と先の Green のひずみテンソル e_{ij}（ともに対称な２階のテンソル）の間に一般化 Hooke の法則が成立することをここでも採用する．すなわち次式：

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}&=c_{ijkl}e_{kl}\\ &=\sum_{m=0}^{\infty} x_3{}^m\{c_{ij\alpha l}u_{l,\alpha}{}^{(m)}+(m+1)c_{ij3l}u_l{}^{(m+1)}\}\\ &\quad+\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} x_3{}^{m+s}\{c_{ij\alpha\beta}u_{p,\alpha}{}^{(m)}u_{p,\beta}{}^{(s)}\\ &\quad+2(s+1)c_{ij3\alpha}u_{p,\alpha}{}^{(m)}u_p{}^{(s+1)}+(m+1)\\ &\quad\cdot(s+1)c_{ij33}u_p{}^{(m+1)}u_p{}^{(s+1)}\} \end{aligned} \qquad (6)$$

のように，応力成分が変位係数で表示された式が得られる．ここに，c_{ijkl} は弾性定数（elastic constants）であって，次式のような対称性が存在する．

$$c_{ijkl}=c_{ijlk}=c_{jikl}=c_{klij} \qquad (7)$$

ここで，後に必要となる σ_{ij} の板中央面（$x_3=0$ の面）に関する n 次モーメントを $\sigma_{ij}{}^{(n)}$ で定義する．

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}{}^{(n)}&=\int_{-b}^{b} x_3{}^n\sigma_{ij}dx_3\\ &=\sum_{m=0}^{\infty}\{c_{ij\alpha l}{}^{(m+n)}u_{l,\alpha}{}^{(m)}+(m+1)c_{ij3l}{}^{(m+n)}u_l{}^{(m+1)}\}\\ &\quad+\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\{c_{ij\alpha\beta}{}^{(s+m+n)}u_{p,\alpha}{}^{(m)}u_{p,\beta}{}^{(s)}\\ &\quad+2(s+1)c_{ij3\alpha}{}^{(s+m+n)}u_{p,\alpha}{}^{(m)}u_p{}^{(s+1)}\\ &\quad+(m+1)(s+1)c_{ij33}{}^{(s+m+n)}u_p{}^{(m+1)}u_p{}^{(s+1)}\} \end{aligned} \qquad (8)$$

ここに，

$$c_{ijkl}{}^{(m+n)}=\int_{-b}^{b} x_3{}^{m+n}\cdot c_{ijkl}dx_3 \qquad (9)$$

一般に単層の等質材料から構成された平板の場合には弾性定数 c_{ijkl} は板厚座標 x_3 には依存しないから，上式は次のように書き換えられる．

$$c_{ijkl}{}^{(m+n)}=\hat{\delta}_{m+n}\cdot\frac{2b^{m+n+1}}{m+n+1}c_{ijkl}\equiv I^{m+n}\cdot c_{ijkl} \qquad (9)'$$

注 1）これは式 $(3)_{5,6}$ において実線部を削除した結果に $e_{13}=e_{23}=0$ とおいて求められた関係式である．

上式中の記号 $\hat{\delta}_{m+n}$ は次式のように定義される.

$$\hat{\delta}_{m+n}=\frac{1}{2}\{1+(-1)^{m+n}\} \qquad (10)$$

上式で定義した $\sigma_{ij}{}^{(n)}$ は，たとえば古典的な等質ないし層状性の平板理論における断面力との間に

$\sigma_{11}{}^{(0)}, \sigma_{22}{}^{(0)}$：軸力，$\sigma_{12}{}^{(0)}$：面内せん断力，

$\sigma_{13}{}^{(0)}, \sigma_{23}{}^{(0)}$：面外せん断力，

$\sigma_{11}{}^{(1)}, \sigma_{22}{}^{(1)}$：曲げモーメント，

$\sigma_{12}{}^{(1)}$：ねじりモーメント．

のような関係が成立する．その他の $\sigma_{ij}{}^{(n)}$ は古典理論(Germain-Lagrange, Poisson および von Kármán の各理論）では現われない断面力である．

ここで次式のような Voigt 規約を用いた O-x_1x_2 平面をただ一つの弾性対称面としてもつ異方性体の構成関係式：

$$\left.\begin{array}{l}\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{16}\\ & c_{22} & c_{23} & c_{26}\\ & & c_{33} & c_{36}\\ (\mathrm{Sym.}) & & & c_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}e_{11}\\ e_{22}\\ e_{33}\\ 2e_{12}\end{Bmatrix},\\ \begin{Bmatrix}\sigma_{23}\\ \sigma_{13}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{44} & c_{45}\\ c_{45} & c_{55}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}2e_{23}\\ 2e_{13}\end{Bmatrix}.\end{array}\right\} \qquad (11)$$

を有する板厚 $2b(=h)$ にわたって等質な平板を考えると上述の断面力 $\sigma_{ij}{}^{(n)}$ の具体式は次式のように計算される．

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{11}{}^{(n)}=&\sum_{m=0}^{\infty}I^{n+m}\{c_{11}u_{1,1}{}^{(m)}+c_{16}(u_{1,2}{}^{(m)}+u_{2,1}{}^{(m)})\\
&+c_{12}u_{2,2}{}^{(m)}+(m+1)c_{13}u_3{}^{(m+1)}\}\\
&+\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}I^{n+m+k}\{c_{11}u_{p,1}{}^{(m)}u_{p,1}{}^{(k)}\\
&+c_{16}(u_{p,1}{}^{(m)}u_{p,2}{}^{(k)}+u_{p,1}{}^{(k)}u_{p,2}{}^{(m)})\\
&+c_{12}u_{p,2}{}^{(m)}u_{p,2}{}^{(k)}+(m+1)(k+1)\\
&\cdot c_{13}u_p{}^{(m+1)}u_p{}^{(k+1)}\},\\
\sigma_{22}{}^{(n)}=&\sum_{m}I^{n+m}\{c_{12}u_{1,1}{}^{(m)}+c_{26}(u_{1,2}{}^{(m)}+u_{2,1}{}^{(m)})\\
&+c_{22}u_{2,2}{}^{(m)}+(m+1)c_{23}u_3{}^{(m+1)}\}\\
&+\frac{1}{2}\sum_{m}\sum_{k}I^{n+m+k}\{c_{12}u_{p,1}{}^{(m)}u_{p,1}{}^{(k)}\\
&+c_{26}(u_{p,1}{}^{(m)}u_{p,2}{}^{(k)}+u_{p,1}{}^{(k)}u_{p,2}{}^{(m)})\\
&+c_{22}u_{p,2}{}^{(m)}u_{p,2}{}^{(k)}+(m+1)(k+1)\\
&\cdot c_{23}u_p{}^{(m+1)}u_p{}^{(k+1)}\},\\
\sigma_{33}{}^{(n)}=&\sum_{m}I^{n+m}\{c_{13}u_{1,1}{}^{(m)}+c_{36}(u_{1,2}{}^{(m)}+u_{2,1}{}^{(m)})\\
&+c_{23}u_{2,2}{}^{(m)}+(m+1)c_{33}u_3{}^{(m+1)}\}\\
&+\frac{1}{2}\sum_{m}\sum_{k}I^{n+m+k}\{c_{13}u_{p,1}{}^{(m)}u_{p,1}{}^{(k)}\\
&+c_{36}(u_{p,1}{}^{(m)}u_{p,2}{}^{(k)}+u_{p,1}{}^{(k)}u_{p,2}{}^{(m)})\\
&+c_{23}u_{p,2}{}^{(m)}u_{p,2}{}^{(k)}+(m+1)(k+1)\\
&\cdot c_{33}u_p{}^{(m+1)}u_p{}^{(k+1)}\},\\
\sigma_{12}{}^{(n)}=&\sum_{m}I^{n+m}\{c_{16}u_{1,1}{}^{(m)}+c_{66}(u_{1,2}{}^{(m)}+u_{2,1}{}^{(m)})\\
&+c_{26}u_{2,2}{}^{(m)}+(m+1)c_{36}u_3{}^{(m+1)}\}\\
&+\frac{1}{2}\sum_{m}\sum_{k}I^{n+m+k}\{c_{16}u_{p,1}{}^{(m)}u_{p,1}{}^{(k)}\\
&+c_{66}(u_{p,1}{}^{(m)}u_{p,2}{}^{(k)}+u_{p,1}{}^{(k)}u_{p,2}{}^{(m)})\\
&+c_{26}u_{p,2}{}^{(m)}u_{p,2}{}^{(k)}+(m+1)(k+1)\\
&\cdot c_{36}u_p{}^{(m+1)}u_p{}^{(k+1)}\},\\
\sigma_{23}{}^{(n)}=&\sum_{m}I^{n+m}\{c_{44}u_{3,2}{}^{(m)}+c_{45}u_{3,1}{}^{(m)}\\
&+(m+1)(c_{44}u_2{}^{(m+1)}+c_{45}u_1{}^{(m+1)})\}\\
&+\sum_{m}\sum_{k}I^{n+m+k}(k+1)(c_{44}u_{p,2}{}^{(m)}u_p{}^{(k+1)}\\
&+c_{45}u_{p,1}{}^{(m)}u_p{}^{(k+1)}),\\
\sigma_{13}{}^{(n)}=&\sum_{m}I^{n+m}\{c_{45}u_{3,2}{}^{(m)}+c_{55}u_{3,1}{}^{(m)}\\
&+(m+1)(c_{45}u_2{}^{(m+1)}+c_{55}u_1{}^{(m+1)})\}\\
&+\sum_{m}\sum_{k}I^{n+m+k}(k+1)(c_{45}u_{p,2}{}^{(m)}u_p{}^{(k+1)}\\
&+c_{55}u_{p,1}{}^{(m)}u_p{}^{(k+1)}).
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

特に，等方性の場合には式 (11) の c_{ij} は次式のように置けばよい．

$$\left.\begin{array}{l}c_{11}=c_{22}=c_{33}=\lambda+2G,\ c_{12}=c_{23}=c_{13}=\lambda\\ c_{44}=c_{55}=c_{66}=G,\ \text{その他の}\ c_{ij}=0\end{array}\right\} \qquad (13)$$

ここに，λ, G は Lamé 定数であって，弾性係数 E, ポアソン比 ν との間に

$$\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},\quad G=\frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (14)$$

の関係がある．したがって，この場合の $\sigma_{ij}{}^{(n)}$ は式 (12) に (13) の関係を代入すればよい．なお，層状性平板の場合には式 (12) において，次のような置き換えをしてやれば，その式がそのまま使用できる．

$$\left.\begin{array}{l}I^{m+n}c_{ij}\rightarrow c_{ij}{}^{(m+n)}=\displaystyle\int_{-b}^{b}x_3{}^{m+n}\cdot c_{ij}dx_3,\\ I^{m+n}\lambda\ \rightarrow\lambda^{(m+n)}\ =\displaystyle\int_{-b}^{b}x_3{}^{m+n}\lambda dx_3,\\ I^{m+n}G\ \rightarrow G^{(m+n)}=\displaystyle\int_{-b}^{b}x_3{}^{m+n}\cdot Gdx_3.\end{array}\right\} \qquad (15)$$

これらの量は一般に対象とする平板の剛性に関連するものであり，たとえば Chia は次のような用語を用いている[3) 注2)]．

$$\left.\begin{array}{l}c_{ij}{}^{(0)}:\text{membrane rigidity},\\ c_{ij}{}^{(1)}:\text{coupling rigidity},\\ c_{ij}{}^{(2)}:\text{flexural rigidity}.\end{array}\right\}$$

この $c_{ij}{}^{(1)}$ は曲げと伸縮の挙動の間の連成 (coupling) の役割を果たすものであるが，c_{ij} が板中央面に対して対称な関数（x_3 の偶関数）のときには零となる．$c_{ij}{}^{(3)}$ 以上の項についての特別な用語は見当たらないが，より高次の板剛性を意味する量である．なお，等質の平板の場合には $c_{ij}{}^{(1)}, c_{ij}{}^{(3)}, \cdots, c_{ij}{}^{(2n+1)}, \cdots$ の項は恒等的に零となることは式から容易に理解できる．逆に非対称の積層状態の層状性平板の場合には $c_{ij}{}^{(2n+1)}$, ($n=0, 1, 2, \cdots$) の値は零にならず，たとえ微小変位を仮定して，非線形項をすべて削除しても曲げと伸縮は互いに連成し合

注 2) 厳密には Chia の用いているこれらの用語は $c_{ij}{}^{(n)}$ ではなく，**3.** で示される $\bar{c}_{ij}{}^{(n)}$ を指す．

うことになる．

さて，次に現在，対象としている平板の支配方程式を導出するために，以下のような一般化 Hamilton 原理を考える．

$$\delta\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1}dt\int_V(T-U)dV+\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1}dt\left\{\int_S t_j\delta u_j dS+\int_V f_j\delta u_j dV\right\}=0 \quad\cdots\cdots(16)$$

ここに，t_j は表面力 (surface traction)，f_j は単位体積当たりの物体力である．また T および U はそれぞれ単位体積当たりの弾性体に蓄えられる運動エネルギーおよびひずみエネルギーであって，ここで対象としている問題では次式で与えられる．

$$T=\frac{1}{2}\rho\dot{u}_j\dot{u}_j,\quad U=\frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij} \quad\cdots\cdots(17)$$

したがって，

$$\begin{aligned}
&\delta\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1}dt\int_V TdV\\
&=\frac{1}{2}\delta\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1}dt\int_A\int_{-b}^{b}\sum_m\sum_n\rho x_3^{m+n}\cdot\dot{u}_j^{(m)}\dot{u}_j^{(n)}dx_3dA\\
&=\frac{1}{2}\delta\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1}dt\int_A\sum_m\sum_n\rho^{(m+n)}\dot{u}_j^{(m)}\dot{u}_j^{(n)}dA\\
&=\sum_m\sum_n\int_A\left\{\rho^{(m+n)}\Big[\dot{u}_j^{(m)}\delta u_j^{(n)}\Big]_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1}-\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1}\rho^{(m+n)}\ddot{u}_j^{(m)}\delta u_j^{(n)}dt\right\}dA\\
&=-\sum_m\sum_n\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1}dt\int_A\rho^{(m+n)}\ddot{u}_j^{(m)}\delta u_j^{(n)}dA \quad\cdots(18)
\end{aligned}$$

ここに，$\rho^{(m+n)}$ は次式によって定義される．

$$\rho^{(m+n)}=\int_{-b}^{b}x_3^{m+n}\cdot\rho dx_3 \quad\cdots\cdots(19)$$

上式も $c_{ij}^{(m+n)}$ の場合と同様に，密度 ρ が板厚方向に一定であるような等質の平板の場合には次のように簡単になる．

$$\rho^{(m+n)}=I^{m+n}\rho=\hat{\delta}_{m+n}\cdot\frac{2b^{m+n+1}}{m+n+1}\cdot\rho \quad\cdots\cdots(19)'$$

他方，ひずみエネルギー U に関するものは次のようになる．

$$\begin{aligned}
&\delta\int_V UdV=\int_V\sigma_{ij}\delta e_{ij}dV\\
&=\sum_n\int_A\{\sigma_{\alpha j}^{(n)}\delta u_{j,\alpha}^{(n)}+(n+1)\sigma_{3j}^{(n)}\delta u_j^{(n+1)}\}dA\\
&\quad+\sum_n\sum_m\sigma_{ij}^{(m+n)}\int_A\{\delta_{i\alpha}\delta u_{k,\alpha}^{(n)}+(n+1)\delta_{i3}\cdot\delta u_k^{(n+1)}\}\{\delta_{j\beta}u_{k,\beta}^{(m)}+(m+1)\delta_{j3}u_k^{(m+1)}\}dA\\
&=\sum_n\Bigg[\!\!\Bigg[\int_A(-\sigma_{\alpha j,\alpha}^{(n)}+n\sigma_{3j}^{(n-1)})\delta u_j^{(n)}dA\\
&\quad+\sum_m\int_A[-\sigma_{\alpha\beta}^{(m+n)}u_{j,\alpha\beta}^{(m)}-\{\sigma_{\alpha\beta,\alpha}^{(m+n)}+(m-n)\sigma_{3\beta}^{(m+n-1)}\}u_{j,\beta}^{(m)}-(m+1)\\
&\quad\cdot(\sigma_{3\alpha,\alpha}^{(m+n)}-n\sigma_{33}^{(m+n-1)})u_j^{(m+1)}]\delta u_j^{(n)}dA\Bigg]\!\!\Bigg]\\
&\quad+\sum_n\oint_C\nu_\alpha[\sigma_{\alpha j}^{(n)}+\sum_{m=0}^{\infty}\{\sigma_{\alpha\beta}^{(m+n)}u_{j,\beta}^{(m)}+(m+1)\sigma_{3\alpha}^{(m+n)}u_j^{(m+1)}\}]\delta u_j^{(n)}ds \quad\cdots\cdots(20)
\end{aligned}$$

なお，上式右辺の第2式から第3式に移る過程で Gauss の発散定理を用いると同時に，次数を示す上付きの指標に関して，弱干の変換を行った．また $\oint_C$ は境界端面に沿う周積分を表わす．

式 (16) の残りの項についても同様に計算すれば最終的に次のように求められる．

$$\begin{aligned}
\int_S t_j\delta u_j dS&=\int_S\nu_i\sigma_{ik}(\delta_{kj}+u_{j,k})\delta u_j dS\\
&=\sum_n\left\{\int_A[x_3^n\cdot\sigma_{3k}(\delta_{kj}+u_{j,k})]_{-b}^{b}\delta u_j^{(n)}dA+\oint_C\int_{-b}^{b}x_3^n\{\nu_\alpha\sigma_{\alpha k}(\delta_{kj}+u_{j,k})\}_C dx_3\delta u_j^{(n)}ds\right\}\\
&\equiv\sum_n\left\{\int_A F_j^{(n)}\delta u_j^{(n)}dA+\oint_C\overset{*}{T}_j^{(n)}\delta u_j^{(n)}ds\right\} \quad\cdots\cdots(21)
\end{aligned}$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned}
F_j^{(n)}&=[x_3^n\cdot\sigma_{3k}(\delta_{kj}+u_{j,k})]_{-b}^{b},\\
\overset{*}{T}_j^{(n)}&=\int_{-b}^{b}x_3^n\{\nu_\alpha\sigma_{\alpha k}(\delta_{kj}+u_{j,k}\}_C dx_3.
\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(22)$$

なお，表面力が $t_j=\nu_i\sigma_{ik}(\delta_{kj}+u_{j,k})$ となることについては，たとえば Washizu[11]，Dym & Shames[12] 等を参照されたい．

$$\begin{aligned}
\int_V f_j\delta u_j dV&=\int_A\left\{\int_{-b}^{b}f_j x_3^n dx_3\right\}\delta u_j^{(n)}dA\\
&\equiv\int_A f_j^{(n)}\delta u_j^{(n)}dA \quad\cdots\cdots(23)
\end{aligned}$$

したがって，上式までで得られた各式を (16) に代入し整理すると最終的に系を支配する方程式（変位係数 $u_j^{(n)}$ と断面力 $\sigma_{ij}^{(n)}$ の満足すべき方程式）および境界条件式が次のように求められる．

（支配方程式）：

$$\sigma_{\alpha j,\alpha}^{(n)}-n\sigma_{3j}^{(n-1)}+\hat{K}_j^{(n)}+F_j^{(n)}+f_j^{(n)}=\sum_{m=0}^{\infty}\rho^{(m+n)}\ddot{u}_j^{(m)} \quad\cdots\cdots(24)$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned}
\hat{K}_j^{(n)}&=\sum_{m=0}^{\infty}[\sigma_{\alpha\beta}^{(m+n)}u_{j,\alpha\beta}^{(m)}+\{\sigma_{\alpha\beta,\alpha}^{(m+n)}+(m-n)\sigma_{3\beta}^{(m+n-1)}\}u_{j,\beta}^{(m)}\\
&\qquad+(m+1)(\sigma_{3\alpha,\alpha}^{(m+n)}-n\sigma_{33}^{(m+n-1)})u_j^{(m+1)}],\\
F_j^{(n)}&=[x_3^n\cdot\sigma_{3k}(\delta_{kj}+u_{j,k})]_{-b}^{b}\\
&=[x_3^n\sigma_{3j}+\sum_{m=0}^{\infty}x_3^{m+n}\{\sigma_{3\alpha}u_{j,\alpha}^{(m)}+(m+1)\sigma_{33}u_j^{(m+1)}\}]_{-b}^{b},\\
f_j^{(n)}&=\int_{-b}^{b}x_3^n\cdot f_j dx_3,\quad \sigma_{ij}^{(n)}=\int_{-b}^{b}x_3^n\cdot\sigma_{ij}dx_3,\\
\rho^{(n)}&=\int_{-b}^{b}x_3^n\cdot\rho dx_3.
\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(25)$$

（境界条件式）：

$$\left.\begin{aligned}
\overset{*}{T}_j{}^{(n)}&=\int_{-b}^{b} x_3{}^n\{\nu_\alpha\sigma_{\alpha k}(\delta_{kj}+u_{j,k})\}c\,dx_3\\
&=\nu_\alpha[\sigma_{\alpha j}{}^{(n)}+\sum_{m=0}^{\infty}\{\sigma_{\alpha\beta}{}^{(m+n)}u_{j,\beta}{}^{(m)}\\
&\qquad+(m+1)\sigma_{3\alpha}{}^{(m+n)}u_j{}^{(m+1)}\}]\ \text{on}\ C,\\
\bar{u}_j{}^{(n)}&=u_j{}^{(n)}\ \text{on}\ C.
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(26)$$

式 (24) の具体的な式として，たとえば (11) のような等質の異方性平板を対象とし，変位係数 $u_j{}^{(n)}$ の項で表示した式を求めると**付録A**に示したような結果が得られる．ここでは，その結果をさらに式 (13) のような等質等方性平板に特殊化したものを以下に示す．

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\infty}I^{n+m}[G\nabla^2u_\alpha{}^{(m)}+(\lambda+G)u_{\beta,\beta\alpha}{}^{(m)}\\
&\quad+\{(m+1)\lambda-nG\}u_{3,\alpha}{}^{(m+1)}]-2Gb^n\mathring{\delta}_nu_{3,\alpha}{}^{(0)}\\
&\quad-G\sum_{m=0}^{\infty}I^{n+m-1}n(m+1)u_\alpha{}^{(m+1)}+K_{\alpha1}{}^{(n)}\\
&\quad+K_{\alpha2}{}^{(n)}+F_\alpha{}^{(n)}+f_\alpha{}^{(n)}=\sum_{m=0}^{\infty}I^{n+m}\rho\ddot{u}_\alpha{}^{(m)},\\
&\sum_{m=0}^{\infty}I^{n+m}[G\nabla^2u_3{}^{(m)}+\{(m+1)G\\
&\quad-n\lambda\}u_{\beta,\beta}{}^{(m+1)}]-2\lambda b^n\mathring{\delta}_nu_{\beta,\beta}{}^{(0)}-(\lambda+2G)\\
&\quad\cdot\sum_{m=0}^{\infty}I^{n+m-1}n(m+1)u_3{}^{(m+1)}+K_{31}{}^{(n)}+K_{32}{}^{(n)}\\
&\quad+F_3{}^{(n)}+f_3{}^{(n)}=\sum_{m=0}^{\infty}I^{n+m}\rho\ddot{u}_3{}^{(m)}
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(27)$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned}
&I^k=\int_{-b}^{b}x_3{}^kdx_3=\hat{\delta}_k\frac{2b^{k+1}}{k+1},\\
&\hat{\delta}_k=\frac{1}{2}\{1+(-1)^k\},\\
&\mathring{\delta}_k=\frac{1}{2}\{1-(-1)^k\},\\
&\hat{\delta}_k+\mathring{\delta}_k=1,\\
&\nabla^2=\partial^2/\partial x_1{}^2+\partial^2/\partial x_2{}^2.
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(28)$$

$$\begin{aligned}
K_{j1}{}^{(n)}=&\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}I^{n+m+k}\Big[\!\Big[[\{(\lambda+2G)u_{1,1}{}^{(k)}+\lambda u_{2,2}{}^{(k)}\}u_{j,1}{}^{(m)}]_{,1}+[\{\lambda u_{1,1}{}^{(k)}+(\lambda+2G)u_{2,2}{}^{(k)}\}u_{j,2}{}^{(m)}]_{,2}\\
&+(1-\delta_{\alpha\beta})G\{(u_{1,2}{}^{(k)}+u_{2,1}{}^{(k)})u_{j,\alpha}{}^{(m)}\}_{,\beta}+(k+1)\lambda(u_3{}^{(k+1)}u_{j,\alpha}{}^{(m)})_{,\alpha}+(m+1)G(u_{3,\alpha}{}^{(k)}u_j{}^{(m+1)})_{,\alpha}\\
&+(m+1)(k+1)G(u_\alpha{}^{(k+1)}u_j{}^{(m+1)})_{,\alpha}\Big]\!\Big]-n\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}I^{n+m+k-1}\{Gu_{3,\alpha}{}^{(k)}u_{j,\alpha}{}^{(m)}+(k+1)Gu_\alpha{}^{(k+1)}u_{j,\alpha}{}^{(m)}\\
&+(m+1)\lambda u_{\alpha,\alpha}{}^{(k)}u_j{}^{(m+1)}+(m+1)(k+1)(\lambda+2G)u_3{}^{(k+1)}u_j{}^{(m+1)}\}\\
&+\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}I^{n+m+k}\Big[\!\Big[\delta_{j1}[\{(\lambda+2G)u_{p,1}{}^{(m)}u_{p,1}{}^{(k)}+\lambda u_{p,2}{}^{(m)}u_{p,2}{}^{(k)}\}_{,1}+G(u_{p,1}{}^{(m)}u_{p,2}{}^{(k)}\\
&+u_{p,1}{}^{(k)}u_{p,2}{}^{(m)})_{,2}]+\delta_{j2}[\{\lambda u_{p,1}{}^{(m)}u_{p,1}{}^{(k)}+(\lambda+2G)u_{p,2}{}^{(m)}u_{p,2}{}^{(k)}\}_{,2}+G(u_{p,1}{}^{(m)}u_{p,2}{}^{(k)}\\
&+u_{p,1}{}^{(k)}u_{p,2}{}^{(m)})_{,1}]+2\delta_{j3}(k+1)G(u_{p,\alpha}{}^{(m)}u_p{}^{(k+1)})_{,\alpha}+\delta_{j\alpha}(m+1)(k+1)\lambda(u_p{}^{(m+1)}u_p{}^{(k+1)})_{,\alpha}\Big]\!\Big]\\
&-\frac{1}{2}n\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}I^{n+m+k-1}\{\delta_{j3}\lambda u_{p,\alpha}{}^{(m)}u_{p,\alpha}{}^{(k)}+2\delta_{j\alpha}(k+1)Gu_{p,\alpha}{}^{(m)}u_p{}^{(k+1)}\\
&+\delta_{j3}(m+1)(k+1)(\lambda+2G)u_p{}^{(m+1)}u_p{}^{(k+1)}\quad\cdots\cdots(29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{j2}{}^{(n)}=&\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}I^{n+m+r+s}\Big[\!\Big[[\{(\lambda+2G)u_{p,1}{}^{(r)}u_{p,1}{}^{(s)}+\lambda u_{p,2}{}^{(r)}u_{p,2}{}^{(s)}\}u_{j,1}{}^{(m)}]_{,1}+[\{\lambda u_{p,1}{}^{(r)}u_{p,1}{}^{(s)}\\
&+(\lambda+2G)u_{p,2}{}^{(r)}u_{p,2}{}^{(s)}\}u_{j,2}{}^{(m)}]_{,2}+(1-\delta_{\alpha\beta})G\{(u_{p,1}{}^{(r)}u_{p,2}{}^{(s)}+u_{p,1}{}^{(s)}u_{p,2}{}^{(r)})u_{j,\alpha}{}^{(m)}\}_{,\beta}\\
&+(r+1)(s+1)\lambda(u_p{}^{(r+1)}u_p{}^{(s+1)}u_{j,\alpha}{}^{(m)})_{,\alpha}+2(m+1)(s+1)G(u_{p,\alpha}{}^{(r)}u_p{}^{(s+1)}u_j{}^{(m+1)})_{,\alpha}\Big]\!\Big]\\
&-\frac{1}{2}n\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}I^{n+m+r+s-1}\{2(s+1)Gu_{p,\alpha}{}^{(r)}u_p{}^{(s+1)}u_{j,\alpha}{}^{(m)}+(m+1)\lambda u_{p,\alpha}{}^{(r)}u_{p,\alpha}{}^{(s)}u_j{}^{(m+1)}\\
&+(m+1)(r+1)(s+1)(\lambda+2G)u_p{}^{(r+1)}u_p{}^{(s+1)}u_j{}^{(m+1)}\}\quad\cdots\cdots(30)
\end{aligned}$$

上式にみるように $K_{j1}{}^{(n)}$ は変位係数の 2 次の項，$K_{j2}{}^{(n)}$ は変位係数の 3 次の項でそれぞれ構成されたいわゆる非線形項である．したがって，これらの項をすべて無視すればいわゆる微小変位を仮定した一般化高次（general higher-order）の平板理論[13)~15)]に帰着され，その結果は，面内変位係数 $u_\alpha{}^{(2k+1)}$ と板厚方向変位係数 $u_3{}^{(2k)}$，($k=0, 1, 2, \cdots$) の組で構成される面外（曲げ）挙動に関する支配方程式，ならびに $u_\alpha{}^{(2k)}$ と $u_3{}^{(2k+1)}$，($k=0, 1, 2, \cdots$) の組で構成される面内（伸縮）挙動に関する支配方程式の間に連成は起こらず，それぞれ独立な方程式系を形成することになる[14),15)]（ただし，上式では等質性の仮定が設定されていることに注意．一般的な層状性平板の場合には前にも述べたようにたとえ非線形項をすべて無視しても上述の方程式系は分離できず，互いに連成することになる）．

したがって，式 (29)，(30) の非線形項をどの程度まで採用するかにより，非線形性を考慮した各種の order の平板理論が構成され，その場合にはもちろん，いわゆる“面外（曲げ）”と“面内（伸縮）”の間の連成も生じることになる．

なお，層状性平板を対象とするのであれば，**付録A**および式 (27)～(30) で用いられている弾性定数 c_{ij}，密度 ρ を (15)，(19) のように置き換えてやればよい．また静的な平板理論に限定するときには方程式右辺の慣性項注3)，つまり，変位係数 $u_j^{(n)}$ の時間微分項を無視すればよい．

次に境界条件式 (26) のうち第2番目の式は変位の幾何学的境界条件であって，きわめて簡単な形をとるため力学的意味も容易に理解でき，問題はない．残りの第1番目の式は力学的境界条件であり，これは一般化断面力 $\sigma_{ij}^{(n)}$ と変位係数 $u_j^{(n)}$ の混合形式で与えられているので，式 (8)（具体的には (12)）を用いて変位係数のみで表示した関係式に変換することも可能であるがここでは省略する．ただし (26) で変位係数 $u_j^{(n)}$ と断面力 $\sigma_{ik}^{(n)}$ の積の項を無視すれば，微小変位理論に対する力学的境界条件式[13]に一致するのはいうまでもない．なお，式 $(26)_1$ の具体的な式と従来までの理論との関係については次節で取り上げられる．

3. 項数の打切りと支配方程式，境界条件式

前節では形式的に変位をベキ級数展開した際の項数に何ら制限を設けることなく無限項までを採用できる形にした基本式を導いたが，ここでは実用的な配慮から項数の打切りを行った場合の具体例を考える．なお，前節の支配式ならびに境界条件式では将来の便宜を考えて変位係数 $u_j^{(n)}$ で統一的に表示した式も示してあり，したがって，これらの式（および**付録A**の式 (A・1)～(A・3)）で項数打切りを実施して整理することもできるが，ここでは物理的な意味が比較的明確であるという理由から，変位係数 $u_j^{(n)}$ と一般化断面力 $\sigma_{ij}^{(n)}$ の混合した形の支配式 (27) および境界条件式 (26) を用いて議論を進めることにする．

そこで，いまその一例として，まず変位係数 $u_j^{(n)}$ のうち $u_j^{(0)}$，$u_\alpha^{(1)}$ の5個の量および一般化断面力 $\sigma_{ij}^{(n)}$ のうち $\sigma_{ij}^{(0)}$，$\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}$ の9個の量が零でない場合を考える（この場合の Green のひずみテンソル e_{ij} は前節の (3) で与えられている）．なお，その際，板厚方向直応力 σ_{33} の評価にあたって通常の平板理論（線形の古典平板理論，von Kármán 理論）におけるような平面応力の仮定（$\sigma_{33}=0$）は設定せず，板上下表面での作用外荷重状態を考慮し，σ_{33} は一般に零でないとして構成関係式 $(11)_3$ を整理した次式を用いて断面力の算定を行うことにする注4)．

$$\left.\begin{aligned}&\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & \bar{c}_{16} & c_{13}/c_{33}\\ \bar{c}_{12} & \bar{c}_{22} & \bar{c}_{26} & c_{23}/c_{33}\\ \bar{c}_{16} & \bar{c}_{26} & \bar{c}_{66} & c_{36}/c_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}e_{11}\\ e_{22}\\ 2\,e_{12}\\ \sigma_{33}\end{Bmatrix},\\ &\begin{Bmatrix}\sigma_{23}\\ \sigma_{13}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{c}_{44} & \bar{c}_{45}\\ \bar{c}_{45} & \bar{c}_{55}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}2\,e_{23}\\ 2\,e_{13}\end{Bmatrix}.\end{aligned}\right\}\cdots(31)$$

ここに，

$$\bar{c}_{ij}=c_{ij}-\frac{c_{i3}c_{j3}}{c_{33}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

特に等方性の場合には上式の $\bar{c}_{ij}$ は次のようになる．

$$\left.\begin{aligned}&\bar{c}_{11}=\bar{c}_{22}=\frac{E}{1-\nu^2},\ \bar{c}_{12}=\frac{\nu E}{1-\nu^2},\ \bar{c}_{16}=\bar{c}_{26}=c_{36}=0,\\ &\bar{c}_{66}=c_{66}=G=\frac{E}{2(1+\nu)},\ \frac{c_{13}}{c_{33}}=\frac{c_{23}}{c_{33}}=\frac{\nu}{1-\nu}.\end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots(32)'$$

式 (31) および (3) において $\sigma_{\alpha3}$ の式のみはすべての項を採用し，その他の式については実線部をすべて削除し，点線部は $k=3$ の項のみ残した式を用いて $\sigma_{ij}^{(0)}$，$\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}$ を変位係数 $u_j^{(0)}$，$u_\alpha^{(1)}$ で表示すると，一般的な層状性平板に対し最終的に次のようになる．

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{(0)}=&\{\bar{c}_{11}^{(0)}u_{1,1}^{(0)}+\bar{c}_{16}^{(0)}(u_{1,2}^{(0)}+u_{2,1}^{(0)})+\bar{c}_{12}^{(0)}u_{2,2}^{(0)}\}\\ &\underline{+\frac{1}{2}\{\bar{c}_{11}^{(0)}(u_{3,1}^{(0)})^2+2\,\bar{c}_{16}^{(0)}u_{3,1}^{(0)}u_{3,2}^{(0)}+\bar{c}_{12}^{(0)}(u_{3,2}^{(0)})^2\}}\\ &+\{\bar{c}_{11}^{(1)}u_{1,1}^{(1)}+\bar{c}_{16}^{(1)}(u_{1,2}^{(1)}+u_{2,1}^{(1)})+\bar{c}_{12}^{(1)}u_{2,2}^{(1)}\}+\int_{-b}^{b}\frac{c_{13}}{c_{33}}\cdot\sigma_{33}dx_3,\\ \sigma_{22}^{(0)}=&\{\bar{c}_{12}^{(0)}u_{1,1}^{(0)}+\bar{c}_{26}^{(0)}(u_{1,2}^{(0)}+u_{2,1}^{(0)})+\bar{c}_{22}^{(0)}u_{2,2}^{(0)}\}\\ &\underline{+\frac{1}{2}\{\bar{c}_{12}^{(0)}(u_{3,1}^{(0)})^2+2\bar{c}_{26}^{(0)}u_{3,1}^{(0)}u_{3,2}^{(0)}+\bar{c}_{22}^{(0)}(u_{3,2}^{(0)})^2\}}\\ &+\{\bar{c}_{12}^{(1)}u_{1,1}^{(1)}+\bar{c}_{26}^{(1)}(u_{1,2}^{(1)}+u_{2,1}^{(1)})+\bar{c}_{22}^{(1)}u_{2,2}^{(1)}\}+\int_{-b}^{b}\frac{c_{23}}{c_{33}}\cdot\sigma_{33}dx_3,\\ \sigma_{12}^{(0)}=&\{\bar{c}_{16}^{(0)}u_{1,1}^{(0)}+\bar{c}_{66}^{(0)}(u_{1,2}^{(0)}+u_{2,1}^{(0)})+\bar{c}_{26}^{(0)}u_{2,2}^{(0)}\}\end{aligned}$$

注 3) 慣性項 $\rho^{(n)}\ddot{u}_j^{(m)}$ のうち特別なものは次のような名称が与えられている．
$\rho^{(0)}\ddot{u}_3^{(0)}$: translational (out-of-plane) inertia, $\rho^{(0)}\ddot{u}_\alpha^{(0)}$: translational (in-plane) inertia,
$\rho^{(2)}\ddot{u}_\alpha^{(1)}$: rotatory inertia

注 4) 前節の (12) では構成式から e_{33} の項を除去する操作を行っていないので，次に求められる式 (33) とは多少異なったものとなっている．もし式 (12) の段階でここと同じ操作を施すものとすれば，式 (12) の c_{ij} の代わりに $\bar{c}_{ij}$ を代入し，$u_3^{(n)}$ に関する項をすべて削除する代わりに $\int_{-b}^{b}\frac{c_{3k}}{c_{33}}\cdot\sigma_{33}\cdot x_3^n dx_3$ の項を適切に補ってやればよい．

$$
\left.\begin{aligned}
&\quad+\underline{\frac{1}{2}\{\bar{c}_{16}{}^{(0)}(u_{3,1}{}^{(0)})^2+2\,\bar{c}_{66}{}^{(0)}u_{3,1}{}^{(0)}u_{3,2}{}^{(0)}+\bar{c}_{26}{}^{(0)}(u_{3,2}{}^{(0)})^2\}}\\
&\quad+\{\bar{c}_{16}{}^{(1)}u_{1,1}{}^{(1)}+\bar{c}_{66}{}^{(1)}(u_{1,2}{}^{(1)}+u_{2,1}{}^{(1)})+\bar{c}_{26}{}^{(1)}u_{2,2}{}^{(1)}\}+\int_{-b}^{b}\frac{c_{36}}{c_{33}}\cdot\sigma_{33}dx_3,\\
\sigma_{23}{}^{(0)}&=\{\bar{c}_{45}{}^{(0)}(u_{3,1}{}^{(0)}+u_1{}^{(1)}+\underline{u_{\alpha,1}{}^{(0)}u_\alpha{}^{(1)}})+\bar{c}_{44}{}^{(0)}(u_{3,2}{}^{(0)}+u_2{}^{(1)}+\underline{u_{\alpha,2}{}^{(0)}u_\alpha{}^{(1)}})\\
&\qquad+\underline{\bar{c}_{45}{}^{(1)}u_{\alpha,1}{}^{(1)}u_\alpha{}^{(1)}+\bar{c}_{44}{}^{(1)}u_{\alpha,2}{}^{(1)}u_\alpha{}^{(1)}}\},\\
\sigma_{13}{}^{(0)}&=\{\bar{c}_{55}{}^{(0)}(u_{3,1}{}^{(0)}+u_1{}^{(1)}+\underline{u_{\alpha,1}{}^{(0)}u_\alpha{}^{(1)}})+\bar{c}_{45}{}^{(0)}(u_{3,2}{}^{(0)}+u_2{}^{(1)}+\underline{u_{\alpha,2}{}^{(0)}u_\alpha{}^{(1)}})\\
&\qquad+\underline{\bar{c}_{55}{}^{(1)}u_{\alpha,1}{}^{(1)}u_\alpha{}^{(1)}+\bar{c}_{45}{}^{(1)}u_{\alpha,2}{}^{(1)}u_\alpha{}^{(1)}}\},\\
\sigma_{11}{}^{(1)}&=\{\bar{c}_{11}{}^{(1)}u_{1,1}{}^{(0)}+\bar{c}_{16}{}^{(1)}(u_{1,2}{}^{(0)}+u_{2,1}{}^{(0)})+\bar{c}_{12}{}^{(1)}u_{2,2}{}^{(0)}\}\\
&\quad+\underline{\frac{1}{2}\{\bar{c}_{11}{}^{(1)}(u_{3,1}{}^{(0)})^2+2\,\bar{c}_{16}{}^{(1)}u_{3,1}{}^{(0)}u_{3,2}{}^{(0)}+\bar{c}_{12}{}^{(1)}(u_{3,2}{}^{(0)})^2\}}\\
&\quad+\{\bar{c}_{11}{}^{(2)}u_{1,1}{}^{(1)}+\bar{c}_{16}{}^{(2)}(u_{1,2}{}^{(1)}+u_{2,1}{}^{(1)})+\bar{c}_{12}{}^{(2)}u_{2,2}{}^{(1)}\}+\underline{\int_{-b}^{b}\frac{c_{13}}{c_{33}}\cdot\sigma_{33}x_3dx_3},\\
\sigma_{22}{}^{(1)}&=\{\bar{c}_{12}{}^{(1)}u_{1,1}{}^{(0)}+\bar{c}_{26}{}^{(1)}(u_{1,2}{}^{(0)}+u_{2,1}{}^{(0)})+\bar{c}_{22}{}^{(1)}u_{2,2}{}^{(0)}\}\\
&\quad+\underline{\frac{1}{2}\{\bar{c}_{12}{}^{(1)}(u_{3,1}{}^{(0)})^2+2\,\bar{c}_{26}{}^{(1)}u_{3,1}{}^{(0)}u_{3,2}{}^{(0)}+\bar{c}_{22}{}^{(1)}(u_{3,2}{}^{(0)})^2\}}\\
&\quad+\{\bar{c}_{12}{}^{(2)}u_{1,1}{}^{(1)}+\bar{c}_{26}{}^{(2)}(u_{1,2}{}^{(1)}+u_{2,1}{}^{(1)})+\bar{c}_{22}{}^{(2)}u_{2,2}{}^{(1)}\}+\underline{\int_{-b}^{b}\frac{c_{23}}{c_{33}}\cdot\sigma_{33}x_3dx_3},\\
\sigma_{12}{}^{(1)}&=\{\bar{c}_{16}{}^{(1)}u_{1,1}{}^{(0)}+\bar{c}_{66}{}^{(1)}(u_{1,2}{}^{(0)}+u_{2,1}{}^{(0)})+\bar{c}_{26}{}^{(1)}u_{2,2}{}^{(0)}\}\\
&\quad+\underline{\frac{1}{2}\{\bar{c}_{16}{}^{(1)}(u_{3,1}{}^{(0)})^2+2\,\bar{c}_{66}{}^{(1)}u_{3,1}{}^{(0)}u_{3,2}{}^{(0)}+\bar{c}_{26}{}^{(1)}(u_{3,2}{}^{(0)})^2\}}\\
&\quad+\{\bar{c}_{16}{}^{(2)}u_{1,1}{}^{(1)}+\bar{c}_{66}{}^{(2)}(u_{1,2}{}^{(1)}+u_{2,1}{}^{(1)})+\bar{c}_{26}{}^{(2)}u_{2,2}{}^{(1)}\}+\underline{\int_{-b}^{b}\frac{c_{36}}{c_{33}}\cdot\sigma_{33}x_3dx_3}.
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(33)
$$

ここに,

$$
\bar{c}_{ij}{}^{(n)}=\int_{-b}^{b}x_3{}^n\bar{c}_{ij}dx_3=\int_{-b}^{b}x_3{}^n\left(c_{ij}-\frac{c_{i3}c_{j3}}{c_{33}}\right)dx_3 \quad\cdots\cdots(34)
$$

上式の $\bar{c}_{ij}{}^{(n)}$ は層状性平板であっても板中央面 ($x_3=0$) に関して対称な層状性 (symmetric lamination geometry) のときには上添字 n の奇数項 ($n=1, 3, 5, \cdots$) は恒等的に零となる. また等質の平板の場合には式 (15) と同様な置換を行えばそのまま上式が成立する. ただし, この場合はもちろん, n の奇数項は当然のことながら零となる. また, 式 (33) の中に現われる積分項は, 直応力 σ_{33} の板厚方向の分布形が何らかの手段で計算 (または仮定) されれば, 具体的な数値として求められるもので, たとえば, そのいくつかの分布形に対する計算例については文献[16]に示されている. von Kármán 理論における断面力 $\sigma_{ij}{}^{(0)}$, $\sigma_{ij}{}^{(1)}$ は下線部 (点線) の項を無視し, せん断変形なし ($u_\alpha{}^{(1)}=-u_{3,\alpha}{}^{(0)}$) を仮定するとともに, 面外せん断力 $\sigma_{3\alpha}{}^{(0)}$ は後述のように断面力 $\sigma_{\alpha\beta}{}^{(1)}$ を微分して得られる式 (36) から計算したものに相当する.

次に式 (24) から, 変位係数, 断面力を用いて支配方程式を書き下すと次のように求められる.

$$
\left.\begin{aligned}
&\sigma_{11,1}{}^{(0)}+\sigma_{12,2}{}^{(0)}+\{(\sigma_{11}{}^{(0)}u_{1,1}{}^{(0)}+\sigma_{12}{}^{(0)}u_{1,2}{}^{(0)}+\sigma_{13}{}^{(0)}u_1{}^{(1)})_{,1}+(\sigma_{12}{}^{(0)}u_{1,1}{}^{(0)}+\sigma_{22}{}^{(0)}u_{1,2}{}^{(0)}+\sigma_{23}{}^{(0)}u_1{}^{(1)})_{,2}\}\\
&\qquad+\underline{(\sigma_{11}{}^{(1)}u_{1,1}{}^{(1)}+\sigma_{12}{}^{(1)}u_{1,2}{}^{(1)})_{,1}}+\underline{(\sigma_{12}{}^{(1)}u_{1,1}{}^{(1)}+\sigma_{22}{}^{(1)}u_{1,2}{}^{(1)})_{,2}}+F_1{}^{(0)}+\underline{f_1{}^{(0)}}=\rho(I^0\ddot{u}_1{}^{(0)}+I^1\ddot{u}_1{}^{(1)}),\\
&\sigma_{12,1}{}^{(0)}+\sigma_{22,2}{}^{(0)}+\{(\sigma_{11}{}^{(0)}u_{2,1}{}^{(0)}+\sigma_{12}{}^{(0)}u_{2,2}{}^{(0)}+\sigma_{13}{}^{(0)}u_2{}^{(1)})_{,1}+(\sigma_{12}{}^{(0)}u_{2,1}{}^{(0)}+\sigma_{22}{}^{(0)}u_{2,2}{}^{(0)}+\sigma_{23}{}^{(0)}u_2{}^{(1)})_{,2}\}\\
&\qquad+\underline{(\sigma_{11}{}^{(1)}u_{2,1}{}^{(1)}+\sigma_{12}{}^{(1)}u_{2,2}{}^{(1)})_{,1}}+\underline{(\sigma_{12}{}^{(1)}u_{2,1}{}^{(1)}+\sigma_{22}{}^{(1)}u_{2,2}{}^{(1)})_{,2}}+F_2{}^{(0)}+\underline{f_2{}^{(0)}}=\rho(I^0\ddot{u}_2{}^{(0)}+I^1\ddot{u}_2{}^{(1)}),\\
&\sigma_{13,1}{}^{(0)}+\sigma_{23,2}{}^{(0)}+\{(\sigma_{11}{}^{(0)}u_{3,1}{}^{(0)}+\sigma_{12}{}^{(0)}u_{3,2}{}^{(0)})_{,1}+(\sigma_{12}{}^{(0)}u_{3,1}{}^{(0)}+\sigma_{22}{}^{(0)}u_{3,2}{}^{(0)})_{,2}\}+F_3{}^{(0)}+\underline{f_3{}^{(0)}}=\rho I^0\ddot{u}_3{}^{(0)},\\
&\sigma_{11,1}{}^{(1)}+\sigma_{12,2}{}^{(1)}-\sigma_{13}{}^{(0)}+\{\underline{(\sigma_{11}{}^{(1)}u_{1,1}{}^{(0)}+\sigma_{12}{}^{(1)}u_{1,2}{}^{(0)})_{,1}}+\underline{(\sigma_{12}{}^{(1)}u_{1,1}{}^{(0)}+\sigma_{22}{}^{(1)}u_{1,2}{}^{(0)})_{,2}}\\
&\qquad\qquad-(\sigma_{13}{}^{(0)}u_{1,1}{}^{(0)}+\sigma_{23}{}^{(0)}u_{1,2}{}^{(0)}+\sigma_{33}{}^{(0)}u_1{}^{(1)})\}+F_1{}^{(1)}+\underline{f_1{}^{(1)}}=\rho(I^1\ddot{u}_1{}^{(0)}+I^2\ddot{u}_1{}^{(1)}),\\
&\sigma_{12,1}{}^{(1)}+\sigma_{22,2}{}^{(1)}-\sigma_{23}{}^{(0)}+\{\underline{(\sigma_{11}{}^{(1)}u_{2,1}{}^{(0)}+\sigma_{12}{}^{(1)}u_{2,2}{}^{(0)})_{,1}}+\underline{(\sigma_{12}{}^{(1)}u_{2,1}{}^{(0)}+\sigma_{22}{}^{(1)}u_{2,2}{}^{(0)})_{,2}}\\
&\qquad\qquad-(\sigma_{13}{}^{(0)}u_{2,1}{}^{(0)}+\sigma_{23}{}^{(0)}u_{2,2}{}^{(0)}+\sigma_{33}{}^{(0)}u_2{}^{(1)})\}+F_2{}^{(1)}+\underline{f_2{}^{(1)}}=\rho(I^1\ddot{u}_2{}^{(0)}+I^2\ddot{u}_2{}^{(1)}).
\end{aligned}\right\}
$$

$$\cdots\cdots(35)$$

上述のように $\sigma_{ij}{}^{(n)}$, $u_j{}^{(n)}$ に関する項の採用に際してかなりの限定をしたにもかかわらず, 式 (3), (33) にみるように, それぞれの式中には非線形項が散在しているが, これらのうち, どのレベルまでの非線形項を保持するかによって種々のレベルの非線形理論が構築されることになるのが推定される. たとえば von Kármán 理論は,

$$
\ddot{u}_j{}^{(0)}=\ddot{u}_\alpha{}^{(1)}=F_\alpha{}^{(0)}=F_\alpha{}^{(1)}=f_j{}^{(0)}=f_\alpha{}^{(1)}=0
$$

と置き，下線（実線および点線）の項を省略するとともにせん断変形なし（$u_\alpha^{(1)}=-u_{3,\alpha}^{(0)}$）の仮定を導入したものに等しい．その際，式（35）に代入する断面力成分 $\sigma_{ij}^{(n)}$ は式（33）での非線形項（実線部）と点線部をすべて無視した式を用いる．したがって，このような仮定のもとで von Kármán 理論が変位係数 $u_j^{(0)}$ のみで表示した支配方程式として得られるが，それについては付録**B**を参照されたい．

式（35）に戻って Singh らの結果[8]は下線（実線および点線）の項と慣性力項のうち I^1 の掛かった項を無視したものに等しい．Chu & Herrmann[5]は上述の Singh らと同様の特殊化を行い，さらに式（35）から

$$\sigma_{\alpha 3}^{(0)} \doteqdot \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(1)}=\sigma_{\alpha 1,1}^{(1)}+\sigma_{\alpha 2,2}^{(1)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(36)$$

として $\sigma_{\alpha 3}^{(0)}$ を求め，これを $(35)_3$ に代入して整理したものに一致する．Wu & Vinson[6),7)] はせん断変形すなわち $u_\alpha^{(1)}$ の独立性を考慮しているが，得られた基本式の線形化を図るために Berger の手法[17]（ひずみエネルギー式中 membrane strains に関する第2不変量を無視することによって von Kármán 理論式の実質的な意味での線形化を行う手法）を利用している．したがって Wu & Vinson の結果は Singh らのそれを特殊化したものに相当する．Novozhilov のいう “strong bending”[18] は $u_j^{(1)}$ までを考慮するが，断面剛（$e_{13}=e_{23}=e_{33}=0$）の仮定を導入して得られるものに等価である．また中川らの結果[19]は Novozhilov の考えを特殊化したものに相当し，式（35）で，

$$\ddot{u}_i^{(0)}=\ddot{u}_\alpha^{(1)}=F_\alpha^{(1)}=f_j^{(0)}=f_\alpha^{(1)}=0$$

とし下線（実線）の項を無視したうえで，式 $(35)_{4,5}$ から式（36）のように $\sigma_{\alpha 3}^{(0)}$ を求め，これと断面剛の仮定から得られる関係式とを式 $(35)_{1,2}$ の点線の項に代入した結果に一致する．

なお，奥行方向に変化（たとえば，ねじり，回転等）のないはりの場合には上記の式で $u_2^{(n)}$ および x_2 の座標で偏微分される項をすべて消去すれば，そのまま利用できる．たとえばはり理論に関する西野らの結果[20]は，

$$u_2^{(0)}=u_2^{(1)}=0,\ \ddot{u}_j^{(0)}=\ddot{u}_\alpha^{(1)}=F_1^{(1)}=0$$

とおき，断面剛の条件ならびに直交保持の条件から得られる式：

$$\left.\begin{aligned}&(u_1^{(1)})^2+(1+u_3^{(1)})^2=1,\\&\frac{u_1^{(1)}}{1+u_3^{(1)}}+\frac{u_{3,1}^{(0)}}{1+u_{1,1}^{(0)}}=0.\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(37)$$

を用いて整理したものに基本的に一致する．

一般的な層状性を有する平板の支配方程式については付録**B**に示されており，そこでは Chia の著書[3] に述べられた理論式との関連について議論がされている．

次に境界条件式については，一般に式（26）で与えられるが，そのうち力学的境界条件式 $(26)_1$ で $\sigma_{ij}^{(0)}$，$\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}$；$u_j^{(0)}$, $u_\alpha^{(1)}$ までの項を採用するものとすれば，

$$\left.\begin{aligned}\overset{*}{T}_j{}^{(0)}&=\nu_\alpha\{\sigma_{\alpha j}^{(0)}+(\sigma_{\alpha\beta}^{(0)}u_{j,\beta}^{(0)}\\&\quad+\delta_{j\gamma}\sigma_{3\alpha}^{(0)}u_\gamma^{(1)})+\delta_{j\gamma}\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}u_{\gamma,\beta}^{(1)}\},\\\overset{*}{T}_j{}^{(1)}&=\nu_\alpha\{\delta_{j\gamma}\sigma_{\alpha\gamma}^{(1)}+(\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}u_{j,\beta}^{(0)}\\&\quad+\delta_{j\gamma}\sigma_{3\alpha}^{(1)}u_\gamma^{(1)})\}.\end{aligned}\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(38)$$

が得られる．ここで，たとえば $\nu_1=1$, $\nu_2=0$（すなわち，**Fig. 1**（**b**）の x_1＝一定の断面）の場合を考えると式（38）は具体的な式として求められるが，ここではそのうちの $\overset{*}{T}_3{}^{(0)}$ および $\overset{*}{T}_2{}^{(1)}$ のみを書き出そう．

$$\left.\begin{aligned}\overset{*}{T}_3{}^{(0)}&=\sigma_{13}^{(0)}+\sigma_{11}^{(0)}u_{3,1}^{(0)}+\sigma_{12}^{(0)}u_{3,2}^{(0)},\\\overset{*}{T}_2{}^{(1)}&=\sigma_{12}^{(1)}+\sigma_{11}^{(1)}u_{2,1}^{(0)}+\sigma_{12}^{(1)}u_{2,2}^{(0)}.\end{aligned}\right\}\cdots(39)$$

通常の von Kármán 理論での境界条件は式（38）の非線形項をすべて無視した次式：

$$\overset{*}{T}_1{}^{(0)}=\sigma_{11}^{(0)},\ \overset{*}{T}_2{}^{(0)}=\sigma_{12}^{(0)},\ \overset{*}{T}_1{}^{(1)}=\sigma_{11}^{(1)}\cdots\cdot(40)$$

および $\overset{*}{T}_3{}^{(0)}$ と $\overset{*}{T}_2{}^{(1)}$ の線形項（式（39）の右辺第1項）のみを保持して組み合わせた等価面外せん断力：

$$\hat{\overset{*}{T}}_3{}^{(0)}=\overset{*}{T}_3{}^{(0)}+\overset{*}{T}_{2,2}{}^{(1)}=\sigma_{13}^{(0)}+\sigma_{12,2}^{(1)}\cdots\cdots\cdots(40)'$$

の4つの断面力が境界で与えられるか，または変位境界条件式 $(26)_2$ より，上式に対応した次式：

$$\left.\begin{aligned}&\bar{u}_1^{(0)}=u_1^{(0)},\ \bar{u}_2^{(0)}=u_2^{(0)},\\&\bar{u}_1^{(1)}=u_1^{(1)}(=-u_{3,1}^{(0)}).\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(41)$$

$$\bar{u}_3^{(0)}=u_3^{(0)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(41)'$$

の4つの変位（回転角）が境界で規定されればよい．ただし，式 $(41)_3$ ではせん断変形なしの仮定によって得られる関係が用いられている．Washizu[11], Dym & Shames[12] らは式（40）′ の代わりに式 $(39)_1$ の非線形項を残した等価せん断力：

$$\hat{\overset{*}{T}}_3{}^{(0)}=\sigma_{13}^{(0)}+\sigma_{12,2}^{(1)}+\sigma_{11}^{(0)}u_{3,1}^{(0)}+\sigma_{12}^{(0)}u_{3,2}^{(0)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(40)''$$

を用いるべきとしている．なお，Chia の著書[3] における境界条件は式（40），（40）′ ないしは式（41），（41）′ の線形な条件式のみが考えられている．また Singh ら[8]ではせん断変形を考慮するため，せん断力 $\sigma_{13}^{(0)}$ とねじりモーメント $\sigma_{12}^{(1)}$ は独立な力学量として取り扱われているが，彼らは式（39）の代わりに，

$$\left.\begin{aligned}\overset{*}{T}_3{}^{(0)}&=\sigma_{13}^{(0)}+\sigma_{11}^{(0)}u_{3,1}^{(0)}+\sigma_{12}^{(0)}u_{3,2}^{(0)},\\\overset{*}{T}_2{}^{(1)}&=\sigma_{12}^{(1)}.\end{aligned}\right\}\cdots(42)$$

を用いている．

また西野らのはりの理論[20]における境界条件は，前述のような仮定（式（37）参照）に基づいた定式化により，はりの両端面における表面力と内力との間のつり合いを表わす次の3つの式で与えられることになる．

$$\left.\begin{aligned}&\overset{*}{T}_1{}^{(0)}=\sigma_{11}^{(0)}(1+u_{1,1}^{(0)})-\sigma_{13}^{(0)}u_{3,1}^{(0)},\\&\overset{*}{T}_3{}^{(0)}=\sigma_{11}^{(0)}u_{3,1}^{(0)}+\sigma_{13}^{(0)}(1+u_3^{(1)}),\\&\overset{*}{T}_1{}^{(1)}(1+u_{1,1}^{(0)})+\overset{*}{T}_3{}^{(1)}u_{3,1}^{(0)}=\sigma_{11}^{(1)}.\end{aligned}\right\}\cdots(43)$$

4. むすび

平板の非線形理論は微小変位を仮定する線形理論とは異なって，系の静的挙動，安定，振動，分数調和共振(subharmonic resonance)，境界層(boundary layer)等について，きわめて興味ある問題を包含しており，まだ未解決な領域が数多く残されているが，本論文では，一般に時間依存性のある3次元変位 $u_j = u_j(x_1, x_2, x_3, t)$ を板厚方向の座標 x_3 に関し，ベキ級数に展開し，Green のひずみ e_{ij} と Kirchhoff の応力 σ_{ij} の間に一般化 Hooke の法則を仮定して幾何学的非線形性を完全な形で考慮した平板理論の定式化を試みたものである．式の誘導にあたっては，一般化 Hamilton 原理を利用したが，ここで得られた基礎方程式（場の支配方程式と境界条件式）の一般形は非線形性が級数型で完全に保持されており，打切り項数に何らの制限も設けられていない．したがって，それぞれの対象とする問題に応じ，系の形状，荷重等の特性によるオーダ評価[21),22)]や数学的な整合性[2)]，解の収束性等を考慮することによって個々の問題に適合した項数制限を実施すればよいことになる．たとえば，基礎式において非線形項をすべて削除すれば，いわゆる微小変位の一般化高次理論の結果[13)]に一致するのは当然である．

なお，二，三の特殊な項打切りを実施した結果が従来までに提案されている von Kármán 理論をはじめとして，いわゆる非線形性を考慮した平板理論に帰着することを証明したが，これらのレベルの非線形理論においても従来は無視されていた板厚方向直応力 σ_{33} の分布効果が考慮できるように改良がなされている．また，本論文では等質等方性平板ばかりでなく，異方性あるいは層状性といった，より一般的な平板の場合にも，さして繁雑にならずに適用できるように定式化がなされており，統一的な立場でこの種の平板理論の位置付けが行えるようになった点がその特徴であろう．

さらに得られた結果を特殊化することにより，奥行方向に変化のない2次元的なはりの非線形理論となることを述べ，従来までに提案されている理論との関係が言及されている．

最後に付録においては特に異方性および層状性平板の場合の定式化と従来までの結果との関連や対応関係が簡単に述べられている．

付録 A 変位係数 $u_j^{(n)}$ で表示した，唯一の弾性対称面をもつ等質異方性平板の運動方程式

標題のような場合についての運動方程式を書き記すが，一般的な層状性平板の場合には，以下の式における $I^{n+m}c_{ij}$ および $I^{n+m}\rho$ に関連する項を式 (15)，(19) のように置き換えてやれば，そのまま適用できる．

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\infty} I^{n+m}\{c_{11}u_{1,11}{}^{(m)}+2c_{16}u_{1,12}{}^{(m)}+c_{66}u_{1,22}{}^{(m)}+c_{16}u_{2,11}{}^{(m)}+(c_{12}+c_{66})u_{2,12}{}^{(m)}+c_{26}u_{2,22}{}^{(m)}\\
&\quad+\sum_{m=0}^{\infty} I^{n+m-1}\{(mc_{13}-nc_{55})u_{3,1}{}^{(m)}+(mc_{36}-nc_{45})u_{3,2}{}^{(m)}\}\\
&\quad-\sum_{m=0}^{\infty} nmI^{n+m-2}(c_{55}u_1{}^{(m)}+c_{45}u_2{}^{(m)})+K_{11}{}^{(n)}+K_{12}{}^{(n)}+F_1{}^{(n)}+f_1{}^{(n)}=\rho\sum_{m=0}^{\infty} I^{n+m}\ddot{u}_1{}^{(m)},\\
&\sum_{m=0}^{\infty} I^{n+m}\{c_{16}u_{1,11}{}^{(m)}+(c_{12}+c_{66})u_{1,12}{}^{(m)}+c_{26}u_{1,22}{}^{(m)}+c_{66}u_{2,11}{}^{(m)}+2c_{26}u_{2,12}{}^{(m)}+c_{22}u_{2,22}{}^{(m)}\}\\
&\quad+\sum_{m=0}^{\infty} I^{n+m-1}\{(mc_{36}-nc_{45})u_{3,1}{}^{(m)}+(mc_{23}-nc_{44})u_{3,2}{}^{(m)}\}\\
&\quad-\sum_{m=0}^{\infty} nmI^{n+m-2}(c_{45}u_1{}^{(m)}+c_{44}u_2{}^{(m)})+K_{21}{}^{(n)}+K_{22}{}^{(n)}+F_2{}^{(n)}+f_2{}^{(n)}=\rho\sum_{m=0}^{\infty} I^{n+m}\ddot{u}_2{}^{(m)},\\
&\sum_{m=0}^{\infty} I^{n+m}(c_{55}u_{3,11}{}^{(m)}+2c_{45}u_{3,12}{}^{(m)}+c_{44}u_{3,22}{}^{(m)})+\sum_{m=0}^{\infty} I^{n+m-1}\{(mc_{55}-nc_{13})u_{1,1}{}^{(m)}\\
&\quad+(mc_{45}-nc_{36})u_{1,2}{}^{(m)}+(mc_{45}-nc_{36})u_{2,1}{}^{(m)}+(mc_{44}-nc_{23})u_{2,2}{}^{(m)}\}\\
&\quad-\sum_{m=0}^{\infty} nmI^{n+m-2}c_{33}u_3{}^{(m)}+K_{31}{}^{(n)}+K_{32}{}^{(n)}+F_3{}^{(n)}+f_3{}^{(n)}=\rho\sum_{m=0}^{\infty} I^{n+m}\ddot{u}_3{}^{(m)}.
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{A}\cdot1)$$

ここに，

$$\begin{aligned}
K_{j1}{}^{(n)}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} I^{n+m+k}\Big\|&[\{c_{11}u_{1,1}{}^{(k)}+c_{16}(u_{1,2}{}^{(k)}+u_{2,1}{}^{(k)})+c_{12}u_{2,2}{}^{(k)}\}u_{j,1}{}^{(m)}]_{,1}+[\{c_{12}u_{1,1}{}^{(k)}+c_{26}(u_{1,2}{}^{(k)}\\
&+u_{2,1}{}^{(k)})+c_{22}u_{2,2}{}^{(k)}\}u_{j,2}{}^{(m)}]_{,2}+(1-\delta_{\alpha\beta})[\{c_{16}u_{1,1}{}^{(k)}+c_{66}(u_{2,1}{}^{(k)}+u_{1,2}{}^{(k)})+c_{26}u_{2,2}{}^{(k)}\}u_{j,\alpha}{}^{(m)}]_{,\beta}\\
&+(k+1)\{c_{13}(u_3{}^{(k+1)}u_{j,1}{}^{(m)})_{,1}+c_{23}(u_3{}^{(k+1)}u_{j,2}{}^{(m)})_{,2}+(1-\delta_{\alpha\beta})c_{36}(u_3{}^{(k+1)}u_{j,\alpha}{}^{(m)})_{,\beta}\}\\
&+(m+1)\{c_{55}(u_{3,1}{}^{(k)}u_j{}^{(m+1)})_{,1}+c_{44}(u_{3,2}{}^{(k)}u_j{}^{(m+1)})_{,2}+(1-\delta_{\alpha\beta})c_{45}(u_{3,\alpha}{}^{(k)}u_j{}^{(m+1)})_{,\beta}\}\\
&+(m+1)(k+1)\{c_{55}(u_1{}^{(k+1)}u_j{}^{(m+1)})_{,1}+c_{44}(u_2{}^{(k+1)}u_j{}^{(m+1)})_{,2}+(1-\delta_{\alpha\beta})c_{45}(u_\alpha{}^{(k+1)}u_j{}^{(m+1)})_{,\beta}\}\Big\|
\end{aligned}$$

$$-n\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}I^{n+m+k-1}\Big[\!\Big[\{c_{55}u_{3,1}{}^{(k)}u_{j,1}{}^{(m)}+c_{44}u_{3,2}{}^{(k)}u_{j,2}{}^{(m)}+(1-\delta_{\alpha\beta})c_{45}u_{3,\alpha}{}^{(k)}u_{j,\beta}{}^{(m)}\}$$
$$+(k+1)\{c_{55}u_1{}^{(k+1)}u_{j,1}{}^{(m)}+c_{44}u_2{}^{(k+1)}u_{j,2}{}^{(m)}+(1-\delta_{\alpha\beta})c_{45}u_\alpha{}^{(k+1)}u_{j,\beta}{}^{(m)}\}$$
$$+(m+1)\{c_{13}u_{1,1}{}^{(k)}+c_{23}u_{2,2}{}^{(k)}+(1-\delta_{\alpha\beta})c_{36}u_{\alpha,\beta}{}^{(k)}\}u_j{}^{(m+1)}+(m+1)(k+1)c_{33}u_3{}^{(k+1)}u_j{}^{(m+1)}\Big]\!\Big]$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}I^{n+m+k}\Big[\!\Big[\delta_{j1}[\{c_{11}u_{p,1}{}^{(m)}u_{p,1}{}^{(k)}+c_{12}u_{p,2}{}^{(m)}u_{p,2}{}^{(k)}+(1-\delta_{\alpha\beta})c_{16}u_{p,\alpha}{}^{(m)}u_{p,\beta}{}^{(k)}\}_{,1}$$
$$+\{c_{16}u_{p,1}{}^{(m)}u_{p,1}{}^{(k)}+c_{26}u_{p,2}{}^{(m)}u_{p,2}{}^{(k)}+(1-\delta_{\alpha\beta})c_{66}u_{p,\alpha}{}^{(m)}u_{p,\beta}{}^{(k)}\}_{,2}]+\delta_{j2}[\{c_{12}u_{p,1}{}^{(m)}u_{p,1}{}^{(k)}$$
$$+c_{22}u_{p,2}{}^{(m)}u_{p,2}{}^{(k)}+(1-\delta_{\alpha\beta})c_{26}u_{p,\alpha}{}^{(m)}u_{p,\beta}{}^{(k)}\}_{,2}+\{c_{16}u_{p,1}{}^{(m)}u_{p,1}{}^{(k)}+c_{26}u_{p,2}{}^{(m)}u_{p,2}{}^{(k)}$$
$$+(1-\delta_{\alpha\beta})c_{66}u_{p,\alpha}{}^{(m)}u_{p,\beta}{}^{(k)}\}_{,1}]+2(k+1)\delta_{j3}\{c_{55}(u_{p,1}{}^{(m)}u_p{}^{(k+1)})_{,1}+c_{44}(u_{p,2}{}^{(m)}u_p{}^{(k+1)})_{,2}$$
$$+(1-\delta_{\alpha\beta})c_{45}(u_{p,\alpha}{}^{(m)}u_p{}^{(k+1)})_{,\beta}\}+(m+1)(k+1)\{\delta_{j1}c_{13}(u_p{}^{(m+1)}u_p{}^{(k+1)})_{,1}$$
$$+\delta_{j2}c_{23}(u_p{}^{(m+1)}u_p{}^{(k+1)})_{,2}+\delta_{j\alpha}(1-\delta_{\alpha\beta})c_{36}(u_p{}^{(m+1)}u_p{}^{(k+1)})_{,\beta}\}\Big]\!\Big]$$
$$-\frac{1}{2}n\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}I^{n+m+k-1}\Big[\!\Big[\delta_{j3}\{c_{13}u_{p,1}{}^{(m)}u_{p,1}{}^{(k)}+c_{23}u_{p,2}{}^{(m)}u_{p,2}{}^{(k)}+(1-\delta_{\alpha\beta})c_{36}u_{p,\alpha}{}^{(m)}u_{p,\beta}{}^{(k)}\}$$
$$+2(k+1)\{\delta_{j1}c_{55}u_{p,1}{}^{(m)}u_p{}^{(k+1)}+\delta_{j2}c_{44}u_{p,2}{}^{(m)}u_p{}^{(k+1)}+\delta_{j\alpha}(1-\delta_{\alpha\beta})c_{45}u_{p,\beta}{}^{(m)}u_p{}^{(k+1)}\}$$
$$+(m+1)(k+1)\delta_{j3}c_{33}u_p{}^{(m+1)}u_p{}^{(k+1)}\}\Big]\!\Big]\quad\cdots\cdots(\mathrm{A}\cdot2)$$

$$K_{j2}{}^{(n)}=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}I^{n+m+r+s}\Big[\!\Big[[\{c_{11}u_{p,1}{}^{(r)}u_{p,1}{}^{(s)}+c_{12}u_{p,2}{}^{(r)}u_{p,2}{}^{(s)}+(1-\delta_{\alpha\beta})c_{16}u_{p,\alpha}{}^{(r)}u_{p,\beta}{}^{(s)}\}u_{j,1}{}^{(m)}]_{,1}$$
$$+[\{c_{12}u_{p,1}{}^{(r)}u_{p,1}{}^{(s)}+c_{22}u_{p,2}{}^{(r)}u_{p,2}{}^{(s)}+(1-\delta_{\alpha\beta})c_{26}u_{p,\alpha}{}^{(r)}u_{p,\beta}{}^{(s)}\}u_{j,2}{}^{(m)}]_{,2}$$
$$+(1-\delta_{\alpha\beta})[\{c_{16}u_{p,1}{}^{(r)}u_{p,1}{}^{(s)}+c_{26}u_{p,2}{}^{(r)}u_{p,2}{}^{(s)}+(1-\delta_{\gamma\eta})c_{66}u_{p,\gamma}{}^{(r)}u_{p,\eta}{}^{(s)}\}u_{j,\alpha}{}^{(m)}]_{,\beta}$$
$$+(r+1)(s+1)\{c_{13}(u_p{}^{(r+1)}u_p{}^{(s+1)}u_{j,1}{}^{(m)})_{,1}+c_{23}(u_p{}^{(r+1)}u_p{}^{(s+1)}u_{j,2}{}^{(m)})_{,2}$$
$$+(1-\delta_{\alpha\beta})c_{36}(u_p{}^{(r+1)}u_p{}^{(s+1)}u_{j,\alpha}{}^{(m)})_{,\beta}\}+2(m+1)(s+1)\{c_{55}(u_{p,1}{}^{(r)}u_p{}^{(s+1)}u_j{}^{(m+1)})_{,1}$$
$$+c_{44}(u_{p,2}{}^{(r)}u_p{}^{(s+1)}u_j{}^{(m+1)})_{,2}+(1-\delta_{\alpha\beta})c_{45}(u_{p,\alpha}{}^{(r)}u_p{}^{(s+1)}u_j{}^{(m+1)})_{,\beta}\}\Big]\!\Big]$$
$$-\frac{1}{2}n\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}I^{n+m+r+s-1}\Big[\!\Big[2(s+1)\{c_{55}u_{p,1}{}^{(r)}u_p{}^{(s+1)}u_{j,1}{}^{(m)}+c_{44}u_{p,2}{}^{(r)}u_p{}^{(s+1)}u_{j,2}{}^{(m)}$$
$$+(1-\delta_{\alpha\beta})c_{45}u_{p,\alpha}{}^{(r)}u_p{}^{(s+1)}u_{j,\beta}{}^{(m)}\}+(m+1)\{c_{13}u_{p,1}{}^{(r)}u_{p,1}{}^{(s)}+c_{23}u_{p,2}{}^{(r)}u_{p,2}{}^{(s)}$$
$$+(1-\delta_{\alpha\beta})c_{36}u_{p,\alpha}{}^{(r)}u_{p,\beta}{}^{(s)}\}u_j{}^{(m+1)}+(m+1)(r+1)(s+1)c_{33}u_p{}^{(r+1)}u_p{}^{(s+1)}u_j{}^{(m+1)}\Big]\!\Big]\quad\cdots\cdots(\mathrm{A}\cdot3)$$

付録 B　$\boldsymbol{\sigma}_{ij}{}^{(0)}$, $\boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta}{}^{(1)}$, $\boldsymbol{u}_j{}^{(0)}$, $\boldsymbol{u}_\alpha{}^{(1)}$ までの項を採用した場合の一般的な層状性平板に対する運動方程式

ここでは式 (35) において下線の項を削除し，式 (31) のような準平面応力的な構成関係式を用いた場合の運動方程式を以下に示すが，その式で $\bar{c}_{ij}{}^{(n)}$ の形の項を式 (15) のように置き換えれば，等質な平板の場合の支配方程式となる．これは式 (35) を変位係数表示したものに対応する．ただし，この結果は式 (A･1)～(A･3) で，単に項の打切りを実施した場合のものには一致しない．そのことの理由については本文の脚注 4) を参照のこと．

$$\left.\begin{aligned}
&L_1{}^{(0)}u_1{}^{(0)}+L_3{}^{(0)}u_2{}^{(0)}+L_1{}^{(1)}u_1{}^{(1)}+L_3{}^{(1)}u_2{}^{(1)}+(u_{3,1}{}^{(0)}L_1{}^{(0)}+u_{3,2}{}^{(0)}L_3{}^{(0)})u_3{}^{(0)}\\
&\qquad+\underline{\int_{-b}^{b}\left(\frac{c_{13}}{c_{33}}\sigma_{33,1}+\frac{c_{36}}{c_{33}}\sigma_{33,2}\right)dx_3}+F_1{}^{(0)}+\underline{f_1{}^{(0)}}=\rho^{(0)}\ddot{u}_1{}^{(0)}+\rho^{(1)}\ddot{u}_1{}^{(1)},\\
&L_3{}^{(0)}u_1{}^{(0)}+L_2{}^{(0)}u_2{}^{(0)}+L_3{}^{(1)}u_1{}^{(1)}+L_2{}^{(1)}u_2{}^{(1)}+(u_{3,1}{}^{(0)}L_3{}^{(0)}+u_{3,2}{}^{(0)}L_2{}^{(0)})u_3{}^{(0)}\\
&\qquad+\underline{\int_{-b}^{b}\left(\frac{c_{36}}{c_{33}}\sigma_{33,1}+\frac{c_{23}}{c_{33}}\sigma_{33,2}\right)dx_3}+F_2{}^{(0)}+\underline{f_2{}^{(0)}}=\rho^{(0)}\ddot{u}_2{}^{(0)}+\rho^{(1)}\ddot{u}_2{}^{(1)},\\
&L_7{}^{(0)}u_3{}^{(0)}+l_1{}^{(0)}u_1{}^{(1)}+l_2{}^{(0)}u_2{}^{(1)}\\
&\quad+\underline{u_{3,1}{}^{(0)}\{L_1{}^{(0)}u_1{}^{(0)}+L_3{}^{(0)}u_2{}^{(0)}+L_1{}^{(1)}u_1{}^{(1)}+L_3{}^{(1)}u_2{}^{(1)}+(u_{3,1}{}^{(0)}L_1{}^{(0)}+u_{3,2}{}^{(0)}L_3{}^{(0)})u_3{}^{(0)}\}}\\
&\quad+\underline{u_{3,2}{}^{(0)}\{L_3{}^{(0)}u_1{}^{(0)}+L_2{}^{(0)}u_2{}^{(0)}+L_3{}^{(1)}u_1{}^{(1)}+L_2{}^{(1)}u_2{}^{(1)}+(u_{3,1}{}^{(0)}L_3{}^{(0)}+u_{3,2}{}^{(0)}L_2{}^{(0)})u_3{}^{(0)}\}}\\
&\quad+\left[\left\{u_{1,1}{}^{(0)}+\frac{1}{2}(u_{3,1}{}^{(0)})^2\right\}L_4{}^{(0)}+\left\{u_{2,2}{}^{(0)}+\frac{1}{2}(u_{3,2}{}^{(0)})^2\right\}L_5{}^{(0)}+\{u_{2,1}{}^{(0)}+u_{1,2}{}^{(0)}+u_{3,1}{}^{(0)}u_{3,2}{}^{(0)}\}L_6{}^{(0)}\right]u_3{}^{(0)}\\
&\qquad+\underline{\{u_{1,1}{}^{(1)}L_4{}^{(1)}+u_{2,2}{}^{(1)}L_5{}^{(1)}+(u_{2,1}{}^{(1)}+u_{1,2}{}^{(1)})L_6{}^{(1)}\}u_3{}^{(0)}}+F_3{}^{(0)}+\underline{f_3{}^{(0)}}=\rho^{(0)}\ddot{u}_3{}^{(0)},\\
&L_1{}^{(1)}u_1{}^{(0)}+L_3{}^{(1)}u_2{}^{(0)}+(L_1{}^{(2)}-\bar{c}_{55}{}^{(0)})u_1{}^{(1)}+(L_3{}^{(2)}-\bar{c}_{45}{}^{(0)})u_2{}^{(1)}+(u_{3,1}{}^{(0)}L_1{}^{(1)}+u_{3,2}{}^{(0)}L_3{}^{(1)}-l_1{}^{(0)})u_3{}^{(0)}
\end{aligned}\right\}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\qquad +\underline{\int_{-b}^{b}\left(\frac{c_{13}}{c_{33}}\sigma_{33,1}+\frac{c_{36}}{c_{33}}\sigma_{33,2}\right)x_3dx_3}+F_1^{(1)}+\underline{f_1^{(1)}}=\rho^{(1)}\ddot{u}_1^{(0)}+\rho^{(2)}\ddot{u}_1^{(1)},\\
&L_3^{(1)}u_1^{(0)}+L_2^{(1)}u_2^{(0)}+(L_3^{(2)}-\bar{c}_{45}^{(0)})u_1^{(1)}+(L_2^{(2)}-\bar{c}_{44}^{(0)})u_2^{(1)}+(u_{3,1}^{(0)}L_3^{(1)}+u_{3,2}^{(0)}L_2^{(1)}-l_2^{(0)})u_3^{(0)}\\
&\qquad +\underline{\int_{-b}^{b}\left(\frac{c_{36}}{c_{33}}\sigma_{33,1}+\frac{c_{23}}{c_{33}}\sigma_{33,2}\right)x_3dx_3}+F_2^{(1)}+\underline{f_2^{(1)}}=\rho^{(1)}\ddot{u}_2^{(0)}+\rho^{(2)}\ddot{u}_2^{(1)}.
\end{aligned}\right\}
\qquad \cdots\cdots(\mathrm{B}\cdot 1)
$$

ここに,

$$
\left.\begin{aligned}
&L_1^{(n)}=\bar{c}_{11}^{(n)}\partial_{11}+2\,\bar{c}_{16}^{(n)}\partial_{12}+\bar{c}_{66}^{(n)}\partial_{22}, && L_2^{(n)}=\bar{c}_{66}^{(n)}\partial_{11}+2\,\bar{c}_{26}^{(n)}\partial_{12}+\bar{c}_{22}^{(n)}\partial_{22},\\
&L_3^{(n)}=\bar{c}_{16}^{(n)}\partial_{11}+(\bar{c}_{12}^{(n)}+\bar{c}_{66}^{(n)})\partial_{12}+\bar{c}_{26}^{(n)}\partial_{22}, && L_4^{(n)}=\bar{c}_{11}^{(n)}\partial_{11}+\bar{c}_{16}^{(n)}\partial_{12}+\bar{c}_{12}^{(n)}\partial_{22},\\
&L_5^{(n)}=\bar{c}_{12}^{(n)}\partial_{11}+\bar{c}_{26}^{(n)}\partial_{12}+\bar{c}_{22}^{(n)}\partial_{22}, && L_6^{(n)}=\bar{c}_{16}^{(n)}\partial_{11}+\bar{c}_{66}^{(n)}\partial_{12}+\bar{c}_{26}^{(n)}\partial_{22},\\
&L_7^{(n)}=\bar{c}_{55}^{(n)}\partial_{11}+2\,\bar{c}_{45}^{(n)}\partial_{12}+\bar{c}_{44}^{(n)}\partial_{22}, && l_1^{(n)}=\bar{c}_{55}^{(n)}\partial_1+\bar{c}_{45}^{(n)}\partial_2.\\
&l_2^{(n)}=\bar{c}_{45}^{(n)}\partial_1+\bar{c}_{44}^{(n)}\partial_2,\quad \partial_\alpha=\frac{\partial}{\partial x_\alpha},\quad \partial_{\alpha\beta}=\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}.
\end{aligned}\right\}
\cdots\cdots(\mathrm{B}\cdot 2)
$$

式 $(35)_{4,5}$ で $f_\alpha^{(1)}$ の項以外の下線部を削除した式を $(35)_3$ に代入して $\sigma_{\alpha 3}^{(0)}$ を消去し，これを式 (33) に用いて変位係数で表示し，その結果を式 $(\mathrm{B}\cdot 1)_3$ の代わりに用いれば，式 $(\mathrm{B}\cdot 1)_{1,2,4,5}$ および次式の合計5つの式が，その支配方程式となる.

$$
\begin{aligned}
&(L_{1,1}^{(1)}+L_{3,2}^{(1)})u_1^{(0)}+(L_{3,1}^{(1)}+L_{2,2}^{(1)})u_2^{(0)}+(L_{1,1}^{(2)}+L_{3,2}^{(2)})u_1^{(1)}+(L_{3,1}^{(2)}+L_{2,2}^{(2)})u_2^{(1)}\\
&\quad+\underline{(u_{3,1}^{(0)}L_1^{(0)}+u_{3,2}^{(0)}L_3^{(0)})u_1^{(0)}+(u_{3,1}^{(0)}L_3^{(0)}+u_{3,2}^{(0)}L_2^{(0)})u_2^{(0)}+(u_{3,1}^{(0)}L_1^{(1)}+u_{3,2}^{(0)}L_3^{(1)})u_1^{(1)}}\\
&\quad\underline{+(u_{3,1}^{(0)}L_3^{(1)}+u_{3,2}^{(0)}L_2^{(1)})u_2^{(1)}}+\{(u_{3,11}^{(0)}L_1^{(1)}+2\,u_{3,12}^{(0)}L_3^{(1)}+u_{3,22}^{(0)}L_2^{(1)})+u_{1,1}^{(1)}L_4^{(1)}\\
&\quad+(u_{2,1}^{(1)}+u_{1,2}^{(1)})L_6^{(1)}+u_{2,2}^{(1)}L_5^{(1)}+u_{3,1}^{(0)}(L_{1,1}^{(1)}+L_{3,2}^{(1)})+u_{3,2}^{(0)}(L_{3,1}^{(1)}+L_{2,2}^{(1)})\}u_3^{(0)}\\
&\quad+\left[\left\{u_{1,1}^{(0)}+\frac{1}{2}(u_{3,1}^{(0)})^2\right\}L_4^{(0)}+\left\{u_{2,2}^{(0)}+\frac{1}{2}(u_{3,2}^{(0)})^2\right\}L_5^{(0)}+\{u_{2,1}^{(0)}+u_{1,2}^{(0)}+u_{3,1}^{(0)}u_{3,2}^{(0)}\}L_6^{(0)}\right]u_3^{(0)}\\
&\quad+\underline{\{(u_{3,1}^{(0)})^2L_1^{(0)}+2\,u_{3,1}^{(0)}u_{3,2}^{(0)}L_3^{(0)}+(u_{3,2}^{(0)})^2L_2^{(0)}\}u_3^{(0)}}+F_3^{(0)}+\underline{(F_{1,1}^{(1)}+F_{2,2}^{(1)})}\\
&\quad+\underline{f_3^{(0)}+(f_{1,1}^{(1)}+f_{2,2}^{(1)})}=\rho^{(0)}\ddot{u}_3^{(0)}+\rho^{(1)}(\ddot{u}_{1,1}^{(0)}+\ddot{u}_{2,2}^{(0)})+\underline{\rho^{(2)}(\ddot{u}_{1,1}^{(1)}+\ddot{u}_{2,2}^{(1)})}\ \cdots\cdots(\mathrm{B}\cdot 1)_3'
\end{aligned}
$$

Chia の著書の結果は $(\mathrm{B}\cdot 1)_{1,2}$ および $(\mathrm{B}\cdot 1)_3'$ において，下線の項を無視し，せん断変形なし ($u_\alpha^{(1)}=-u_{3,\alpha}^{(0)}$) の仮定を設定した結果に一致する．ただし，その場合には上記のように $u_\alpha^{(1)}$ の従属性を仮定することから，未知量は $u_j^{(0)}$ の3個となって，$(\mathrm{B}\cdot 1)_{4,5}$ の式は不必要となり，これらの $u_j^{(0)}$ は式 $(\mathrm{B}\cdot 1)_{1,2}$ および $(\mathrm{B}\cdot 1)_3'$ の方程式系に支配されることになる．なお，式 $(\mathrm{B}\cdot 1)_3$，および $(\mathrm{B}\cdot 1)_3'$ の式にも式 $(\mathrm{B}\cdot 1)_{1,2,4,5}$ と同様に σ_{33} の積分項が含まれるべきであるが，高次の項となるのでここでは省略されている.

参 考 文 献

1) von Kármán, T. : Festigkeitsproblem in Mashinenbau, Encykl. Math. Wiss., Vol. 4, pp. 311～385, 1910.

2) Ciarlet, P.G. : A justification of the von Kármán equations, Arch. Rat. Mech. Anal., Vol. 73, pp. 349～389, 1980, およびこの論文に示されている参考文献.

3) Chia, C.Y. : Nonlinear analysis of plates, McGraw-Hill, p. 422, 1980.

4) Ambartsumyan, S.A. (神谷紀生訳)：異方弾性板の理論，森北出版，pp. 55～68, 148～156, 212～221, 1975.

5) Chu, H.N. and G. Herrmann : Influence of large amplitudes on free flexural vibrations of rectangular elastic plates, J. Appl. Mech., pp. 532～540, 1956.

6) Wu, C.I. and J.R. Vinson : Influence of large amplitudes, transverse shear deformation, and rotatory inertia on lateral vibrations of transversely isotropic plates, J. Appl. Mech. pp. 254～260, 1969.

7) Wu, C.I. and J.R. Vinson : On the nonlinear oscillations of plates composed of composite materials, J. Comp. Mat., Vol. 3, pp. 548～561, 1969.

8) Singh, P.N., Y.C. Das and V. Sundrarajan : Large-amplitude vibration of rectangular plates, J. Sound Vib., Vol. 17, pp. 235～240, 1971.

9) Schmidt, R. : A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation, J. Indust. Math. Soc., Vol. 27, pp. 23～38, 1977.

10) Fung, Y.C. : Foundations of solid mechanics, Prentice-Hall, pp. 463～470, 444～449, 1965.

11) Washizu, K. : Variational methods in elasticity and plasticity, 2nd Ed., Pergamon, pp. 163～165, 1975.

12) Dym, C.L. and I.H. Shames : Solid mechanics—A variational approach—, McGraw-Hill, pp. 419～459, 1973.

13) Hirashima, K., P.C.Y. Lee and Y. Negishi : General higher-order equations of two-dimensional static and dynamic theories for homogeneous and laminated elastic plates, Proc. Ninth U.S. National Congr. of Appl. Mech., Ithaca, Cornell Univ., p. 476, 1982; 平島健一・根岸嘉和：異方性・層状性を考慮した平板の高次近似理論，土木学会年次学術講演概要集，第1部，pp. 29～30, 1981.

14) 平島健一・根岸嘉和：板厚方向の成分を考慮した代表的な二次元化平板理論の精度に関する考察，土木学会論文報告集，No. 330, pp. 1～14, 1983.

15) 平島健一・根岸嘉和：数種の平板理論の動特性（自由振動と分散特性）に関する研究，土木学会論文報告集，No. 333, pp. 21～34, 1983.

16) 平島健一・根岸嘉和：弾性平板の静的・動的解析理論に関する二，三の考察-Reissner 理論および Mindlin 理

論の修正―，山梨大学工学部研究報告，No. 32, pp. 18～27, 1981.

17) Berger, H.M.: A new approach to the analysis of large deflections of plates, J. Appl. Mech., pp. 465～472, 1955.

18) Novozhilov, V.V.: Foundations of the nonlinear theory of elasticity, Graylock Press, pp. 177～216, 1953.

19) 中川　茂・阿井正博・西野文雄：薄板の有限変位解析に関する一考察，第31回土木学会年次学術講演会，第I部門，pp. 81～82, 1976.

20) 西野文雄・倉方慶夫・後藤芳顕：一軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位問題，土木学会論文報告集，No. 237, pp. 11～26, 1975.

21) Sugimoto, N.: Nonlinear theory for flexural motions of thin elastic plate, J. Appl. Mech., pp. 377～390, 1981; pp. 409～416, 1982.

22) 倉田光春：Kirchhoff-Love の仮定及びせん断変形二次分布仮定の妥当性の証明-線形理論，幾何学的非線形理論の場合，日本建築学会学術講演梗概集，pp. 1129～1132, 1981.

(1982.3.19・受付)