

動的解析における無限境界での波動的処理

DYNAMIC ANALYSIS OF WAVE PROPAGATION PROCEDURE
ON THE INFINITE BOUNDARY

赤尾 嘉彦*・伯野 元彦**

By Yoshihiko AKAO and Motohiko HAKUNO

1. 緒 言

構造物と地盤の連成効果を考慮した地震動の数値計算手法の研究は近年特に盛んであり、種々の手法が提案されている。そのうちのおもな手法は、質点法、差分法、有限要素法、積分方程式法の 4 つに大別できる。この中で、解析モデルを質点とビーム要素にモデル化する質点法や、差分式を展開して一定間隔の離散質点とばね要素にモデル化する差分法は計算が簡単である反面、モデル化に多少の困難が伴う。この点、モデルの任意性や解析手法の選択の広さからいって有限要素法の方がより高次の手法である。また、積分方程式法は地盤の半無限体としての境界条件を満足させる点において、有限領域で解いている他の手法よりも厳密な方法である。しかし、この手法は主として周波数領域で解析が行われ、構造物の根入れ形状や地盤の地層形状、物性などに制限を受けるなど、まだ任意の構造物に適用することは難しい。これらの点から、有限要素法の境界処理の問題が解決されるならば、有限要素法が実際の構造物と地盤のモデルの解析に最も適した方法となると思われる。

解析領域が有限であるために生ずる有限要素法の境界処理の問題とは、逸散波の透過処理方法、地震波の入力方法の 2 つの問題に要約されるであろう。ここで、解析対象として抽出された有限部分（解析領域）と半無限な地盤部分とを隔てる解析上の仮想境界を無限境界とよぶことにする。一般に、有限要素法では周辺地盤の一部を含めた長方形の解析領域を採用することが多く、このとき解析領域は左右 2 つの側面無限境界と底面無限境界、それに自由表面によって囲まれている。

逸散波の透過処理方法とは、理論上は無限境界を透過するはずの解析領域の内側から外側に逃げる波動（逸散

波）が数値計算上ここで反射を生じ、この反射を抑える数値処理上の技巧を指す。たとえば、Lysmer, Kuhlemeyer¹⁾ は波動エネルギーを効率よく吸収する境界として粘性境界（viscous boundary）とよばれる無限境界の数値計算方法を提案した。これは実体波が媒質内で作用する応力と等価な無限境界に働くダンパーの式を求め、種々の入射角をもつ波動のエネルギーを最も効率よく吸収するように係数を定めたものである。ただし、粘性境界は実体波を対象としていることと、ポアソン比が 0.5 に近く、波動の境界面に対する入射角が大きいときには理論上の応力から大きくずれた係数を与えることになるなどの欠点がある。これに対して、Smith²⁾ は Neuman 境界条件と Dirichlet 境界条件を組み合わせ、無限境界に入射する波動に対して同位相の波動と逆位相の波動を反射させ、両方の平均をとることにより理論上完全な無反射境界（non-reflecting boundary）を提案した。ただし、この計算手法は波動が無限境界に n 回反射するときは、加え合わせる波動の数を 2^n 個にする必要がある。したがって、逸散波が解析領域内で何回も反射をする解析時間の長い場合には適用が難しい。また、Lysmer ら³⁾ は定常的な表面波タイプの逸散波を吸収する側面無限境界として伝達境界（transmitting boundary）を提案している。これは逸散波が水平成層地盤中を水平方向に伝播するときの波動による変位式を要素内の変位関数とした剛性マトリックスを求め、これを側面無限境界に付けたものである。ただし、伝達境界は周波数軸上の計算となり、しかも底面無限境界には適用できない。

地震波の入力方法の問題とは、解析領域の外側から伝播する進行性の非定常な地震波を解析モデルへの入力として評価する方法のことである。従来、最も一般的に用いられてきた入力方法は、解析モデルを基盤の上に置いたとして底面無限境界を固定し、基盤面と地表面の位相差が小さい（上下の時間ずれが地震波の周期に対して短い）と仮定して基盤面上で得られる地震動加速度記録を

* 正会員 工修 清水建設（株）研究所（現・大崎研究室）

** 正会員 工博 東京大学教授 地震研究所

モデル全体に作用させるものであったり²⁾。この方法では地震波の進行性は考慮されず、しかも逸散波による変位は底面無限境界上では微小として無視されている。底面無限境界が上下の波動インピーダンスの大きく異なる基盤面上にあれば、逸散波成分のほとんどがここで反射をするので、底面無限境界を固定として逸散波による変位を無視できるが、基盤面上にないときは無視し難い。これらの問題を解決した方法として、混合境界法の一つである Kunar³⁾ の手法がある。これは入力に地震動ではなく入射波を用い、底面無限境界にこの入射地震波から計算したせん断力を与えている。また、側面無限境界には Smith の無反射境界を、底面無限境界には Lysmer の粘性境界を用いて逸散波や反射波を吸収させる方法をとっている。これは有限要素法の境界処理問題を解決した優れた手法であるが、入力は鉛直下方から入射する実体波に限られ、表面波には適用が難しい。仮に、側面無限境界に表面波から計算したせん断力を与えても、表面波が解析領域内を伝播する間に底面無限境界からそのエネルギーの一部が失われてしまうであろう。

本報告で提案した数値計算手法は混合境界法の一つであり、波動的解析手法と有限要素法の振動解析手法を組み合わせるにより、実体波にも表面波にも適用できる地震波の入力方法を採用した。また、無限境界上の逸散波の透過処理方法には 2次元の面外方向 (SH 型) に変位する波動を吸収する特別な方法を考えた。したがって、振動解析は 2次元平面ひずみ構造物を対象モデルとし、これの面外方向の変位について行う。この種の構造物としては、堤防、ダム、トンネルなどがあるが、これらの軸方向変位は耐震上あまり重要視されていない。しかし、先に紹介した無限境界の波動透過処理法の一つを用いれば、この振動解析法を面内方向変位にも適用できる。また実際に、SH 波と Love 波を入力して振動解析した結果を記載して、この手法の有効性を示した。

2. 振動解析方法

水平均一な単層の地盤に実体波の地震波 (入射波) が下方から伝播してきたとき、自由地表面では反射波が発

生し、地盤の変位はこれら 2つの波動 (入射波、反射波) の和となる。もし、**Fig. 1** のように均一な地盤中に建屋などの構造物やその他の不均一な構造が存在するとき、変位の成分は 2つの波動のほか逸散波が加わる。逸散波は解析領域内の不均一性によって発生し、無限境界を通過して内側から外側の周辺地盤に逃げる実体波または表面波である。入力地震波が実体波でなく表面波のとき、不均一地盤中の変位は入力の表面波と逸散波に分けられる。なぜなら、この場合の表面波は実体波入力の場合の入射波と反射波の和に相当すると考えられるためである。**Fig. 1** のようなモデルに逸散波が生じるおもな原因は以下の 3つである。

- 建屋の底面および側面に突き当たった地震波がここで反射する場合。
- 反射波は地盤部分に存在し、建屋部分には存在しない。反射波がないということは、反射波とこれを打ち消す負の波動が共存することと同義であり、この負の波動を逸散波とみなした場合 ($h=-g$)。
- 一般に逸散減衰といわれ、建屋の自由振動エネルギーが埋め込み部分から波動エネルギーとなって地盤中に逃げる場合。

波動伝播の形からみれば、入射波、反射波および入力の表面波は平面波であり、逸散波は球面波に近いと考えられる。これらの波動成分を別々に、解析しようとする系全体に計算することは合理的ではない。そこで、解析しようとする系を **Fig. 2** のように、内側領域と境界領域に分け、部分的に重複した解析モデルを想定した。内

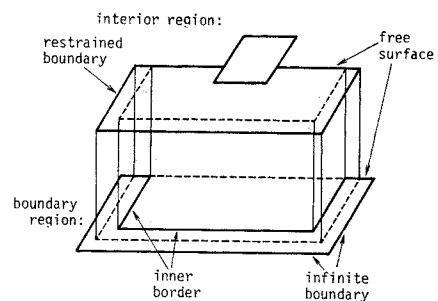


Fig. 2 Separation of analytical region into interior region and boundary region. Two regions partly overlap each other.

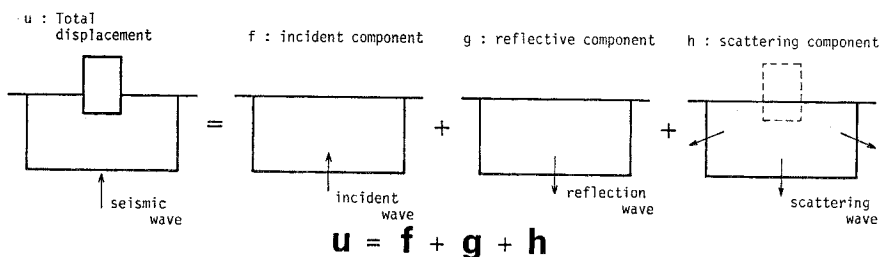


Fig. 1 Three different components of displacement caused by seismic wave.

側領域は自由表面（応力境界）と強制変位を与える境界（変位境界）によって囲まれた領域であり、FEMの直接積分法で全変位量（ u ）に対する振動解析を行う。境界領域は無限境界と内側境界と自由表面によって囲まれた帯状の領域であり、ここでは変位量を2つの成分に分離し、それぞれまったく異なった解析を行う。まず、第一の成分は入射波と反射波の和（ $f+g$ ）であり、弾性波動理論の式から計算する。もう1つの成分は逸散波（ h ）であり、差分法などによる波動の数値シミュレーション解析から求める。

以前、著者らはSH波の振動に対して、内側領域をFEMで、境界領域を差分法で解析した⁶⁾。このときは、Kumar⁵⁾の用いた方法と同じように、変位を入射波の成分（ f ）と、反射波と逸散波を合わせた成分（ $g+h$ ）の2つの成分に分離し、入射波を入力して無限境界上で反射波と逸散波を吸収させた。しかし、このとき用いた無限境界上の処理方法では、平面波である反射波と球面波（二次元なので厳密には円筒波）である逸散波の反射を同時に効率よく抑えることができなかった。今回の方法では、無限境界上で逸散波だけを吸収させるため、特定の円筒波を対象にした無限境界上の波動透過処理方法を設定でき、精度が向上した。また、 $f+g$ を波動理論から計算するために、地盤条件は水平成層構造まで許され、入力地震波は斜め入射の実体波や表面波を用いることができる。たとえば、斜め入射のSH波の場合ならば二次元的な重複反射の式を作って計算すればよいし、Love波入力の場合はHaskellの式⁸⁾などを用いればよい。

Fig. 2のモデルを参考に内側領域と境界領域の変位の連続条件について、以下で説明を加える。解析の主体である内側領域のFEM直接時間積分スキームに中心差分法を用いるならば、時刻 t までの節点変位 $u(t)$ 、 $u(t-\Delta t)$ などがわかれば、変位境界上の節点を除く節点の次の時刻の変位 $u(t+\Delta t)$ が求まる。また、線形加速度法を用いるならば、このほかに加速度、速度や次の時刻の変位境界上の節点変位 $u(t+\Delta t)$ からすべての節点の $u(t+\Delta t)$ を計算できる。いずれの場合も変位境界上の節点変位 $u(t+\Delta t)$ が未知数であるが、これは境界領域内の節点でもあり、入射波 f と反射波 g と逸散波 h の和として求められる。

$$u(t+\Delta t) = f(t+\Delta t) + g(t+\Delta t) + h(t+\Delta t) \dots\dots\dots(1)$$

境界領域内では入力 f に対する均一整層な地盤の応答 $f+g$ が得られており、逸散波 h は時刻 t までの値 $h(t)$ 、 $h(t-\Delta t)$ がわかっている、次の時刻の値 $h(t+\Delta t)$ を中心差分法による時間積分スキームによって計算する。ただし、無限境界上の $h(t+\Delta t)$ は先に示した方

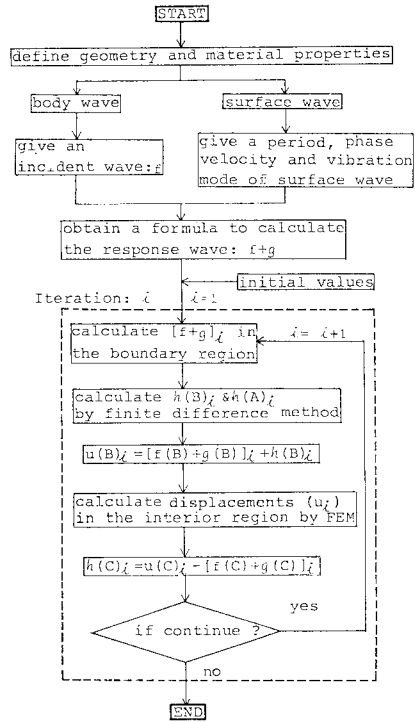


Fig. 3 A flow chart of the integral scheme.
 Suffix : B indicates on the restrained boundary,
 C on the inner border,
 A on the boundary region except B and C.

法^{1),2)}によって求めることもできるが、シミュレーションでは以前著者らが用いた方法⁷⁾を使った。また、内側境界上の $h(t+\Delta t)$ は内側領域で計算された $u(t+\Delta t)$ から $f(t+\Delta t)+g(t+\Delta t)$ を除いたものとして求まる。

$$h(t+\Delta t) = u(t+\Delta t) - [f(t+\Delta t) + g(t+\Delta t)] \dots\dots\dots(2)$$

以上の方法で、内側領域と境界領域の計算を1ステップ進めることができ、これを連続して行うことにより、振動解析を行う。**Fig. 3**に以上の解析手法のフローチャートを示す。ただし、 f 、 g を全解析時間にわたってあらかじめ計算しておくことは、計算機の容量上の問題から好ましくない。そこで、始めに $f+g$ の計算式を作っておき、Iterationのたびに $f+g$ を計算することにした。

3. 波動透過境界

振動解析を実施する前に、無限境界での逸散波の透過（無反射）処理方法を考えた。この方法は差分法の式を応用した方法であり、二次元の面外方向に変位し（SH型）、内側から外側に円状に拡散される波動（円筒波）に対して有効な方法である。したがって、解析はすべて

面外方向変位について行う。以下に、この方法の考え方と計算式を示し、同時に Lysmer の粘性境界を SH 波の場合に修正した方法と数値計算の結果を比較してみた。

(1) 一次元無限境界の計算

一次元の波動方程式は式 (3) である。

$$\ddot{u} = c^2 u_{,xx} \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 u ：変位、 c ：位相速度、 t ：時間、 x ：位置座標ただし、 \dot{u} は u の時間微分を、 $u_{,x}$ は u の x に関する偏微分を示す。式 (3) を中心差分法で差分して整理すると式 (4) となる。

$$u(x, t + \Delta t) = (2 - 2\beta^2)u(x, t) - u(x, t - \Delta t) + \beta^2(u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t)) \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 β ：無次元化波速度 ($c \cdot \Delta t / \Delta x$)、 Δt ：時間きざみ、 Δx ：節点間隔

この式は、節点座標 x における変位 u の時間積分スキームを表わすものである。Fig. 4 の上に示すような一次元半無限体において、O 点 ($x=0$) を加振したとき無限境界上の Q 点 ($x=l$) の変位 u を式 (4) から計算することができない。この計算を粘性境界では、媒質中に作用する応力に着目して解いている。すなわち、Fig. 4 のように波動が無限境界に達したとき、Q 点の右側から波動理論より導かれる応力 σ が作用し、左側からは応力-ひずみ関係より得られる応力 $\bar{\sigma}$ が作用する。応力 σ 、 $\bar{\sigma}$ を式 (5) に示す。

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= c\rho\dot{u} \\ \bar{\sigma} &= \mu u_{,x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 μ ：せん断弾性率 ($=\rho c^2$)

したがって、Q 点のつり合いの運動方程式は式 (6) となり、これを差分して整理すると式 (7) となり、この式を使って Q 点の次のステップの変位を計算する。

$$\begin{aligned} \rho\ddot{u} &= \sigma - \bar{\sigma} \dots\dots\dots (6) \\ \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) \cdot u(l, t + \Delta t) &= (2 - \beta^2) \cdot u(l, t) \\ &- \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) \cdot u(l, t - \Delta t) + \beta^2 \cdot u(l - \Delta x, t) \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

これに対して、波動が無限境界を速度 c で左側から右側方向にのみ伝播するとして式 (3) の $u_{,xx}$ を計算する式を作り、よりよい近似解を得た。すなわち、Fig. 5 のように波動現象 f が速度 c で x 軸の正の方向に伝播するならば、変数 s を一定値としたときの x と時間変数 τ の方程式 (8) は $x-\tau$ 平面上で同位相線を示す。

$$x - c\tau = s \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 s ： x と τ の関数

Fig. 5 において、点 (x, τ) は時刻 τ における座標 x

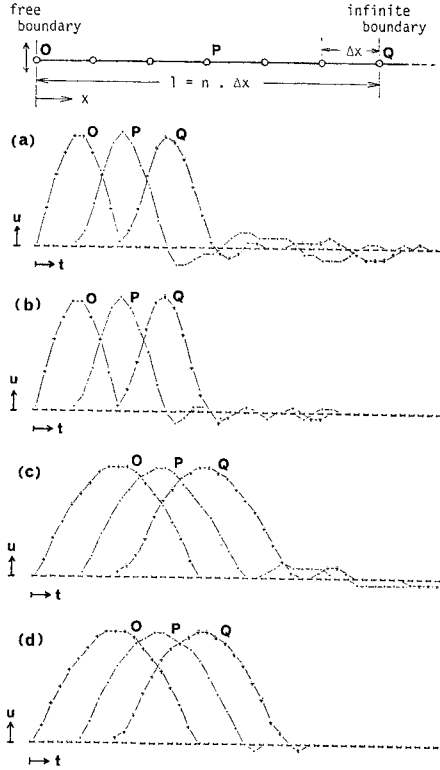


Fig. 4 One dimensional semi-infinite model and its simulation. Nodal point on the infinite boundary is calculated by the viscous boundary method.....(a), (c), or the proposed boundary method.....(b), (d). Period of input wave = 18 Δt(a), (b), 36 Δt(c), (d).

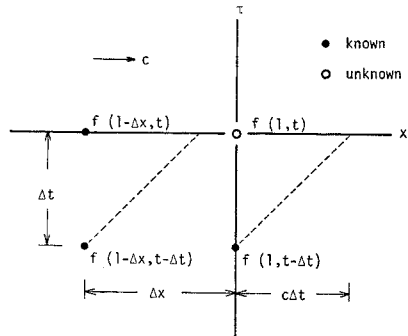


Fig. 5 Phase characteristics of wave propagation Dot-lines indicate same phase of wave.

を、点線は同位相線を表わす。このとき、式 (8) の両辺を Δx で割って無次元化し、右辺の無次元化変数を \bar{s} とすると (x, τ) の 1 つの組合せに対して \bar{s} が一義的に定まる。また、 x と τ の 2 変数の関数である波動現象 f は同位相線上では等しい値になるので、 \bar{s} のみを変数とする関数 \bar{f} で表わされる ($f(x, \tau) = f(\bar{s})$)。さらに、点 (l, t) で $\bar{s} = 0$ になるように \bar{s} を再定義すると、 f

(l, t) は $\bar{f}(0)$ と, $f(l-Dx, t)$, $f(l-Dx, t-Dt)$, $f(l, t-Dt)$ はそれぞれ $\bar{f}(-1)$, $\bar{f}(\beta-1)$, $\bar{f}(\beta)$ と書き換えられる. 仮に, Fig. 5 のように $f(l, t)$ が未知で他の3点が既知であったとすると, 未知数 $\bar{f}(0)$ は変数 \bar{s} の二次関数の内挿によって式 (9) のように求められる.

$$\bar{f}(0) = \frac{\beta-1}{\beta+1} \{\bar{f}(-1) - \bar{f}(\beta)\} + \bar{f}(\beta-1) \quad \dots\dots\dots (9)$$

式 (9) の f' に $u_{,xx}$ を代入すると, 式 (10) のように式 (3) における無限境界上の未知数 $u_{,xx}(l, t)$ を近似計算できる.

$$u_{,xx}(l, t) = \frac{\beta-1}{\beta+1} \{u_{,xx}(l-Dx, t) - u_{,xx}(l, t-Dt)\} + u_{,xx}(l-Dx, t-Dt) \quad \dots\dots\dots (10)$$

Fig. 4 の (a)~(d) は, 自由端節点 O にインパルス変位を与えたときの無限境界上の節点 Q と中間の節点 P の応答変位を両手法で計算した結果である. 物性は無次元化波速度 $\beta=0.65$ を用い, 入力 (a), (b) が周期 $18Dt$ (波長約 $12Dx$), (c), (d) が周期 $36Dt$ (波長約 $23Dt$) の正弦半波を用いた. いずれの波長に対しても提案した手法による計算結果 ((b), (d)) の方が, 粘性境界 ((a), (c)) よりも誤差が小さい.

(2) 二次元無限境界の計算

一つの平面波による二次元無限境界上の節点変位を計算するには, 境界面に対する法線方向の見掛けの位相速度を求めれば一次元の場合と同様に扱える. しかし, この見掛けの位相速度を求めることは容易ではない. また二次元の場合には逸散波は円筒波として広がり, 円筒の半径を考えなければ無限境界上の反射を十分抑えることはできない. さらに二次元では, 2つの異なる方向から同時に逸散波が無限境界に達する場合も考えられる. これらの3点について以下にその解決方法を示した.

a) 見掛けの位相速度の計算

二次元の面外方向変位の波動方程式は式 (11) である.

$$u = c^2(u_{,xx} + u_{,zz}) \quad \dots\dots\dots (11)$$

Fig. 6 のように波動が伝播するとき, 無限境界上の $u_{,xx}$ は中心差分式では計算できない. このとき, 法線

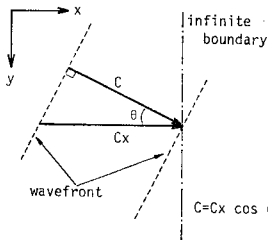


Fig. 6 Relationship of c : phase velocity and c_x : apparent velocity of normal direction against the infinite boundary.

方向の見掛けの位相速度 c_x がわかれば, 一次元の場合と同様に $u_{,xx}$ を求めることができる. c_x は Fig. 6 に示すように, 境界面に対する入射角 θ との間に以下の関係式が成り立つ.

$$c_x = c/\cos \theta \quad \dots\dots\dots (12)$$

いま考えている波動はせん断波であるから, 式 (12) の中の真の位相速度 c はせん断波速度であり, 地盤の物性だけで決まる. したがって, 入射角 θ または方向余弦 $\cos \theta$ がわかれば c_x が決まる. そこで次のように方向余弦を計算した.

いま, 無限境界に対する法線方向と θ の角をなす方向に伝播する SH 型の調和平面波 u (円振動数 ω) が存在したと仮定する. この波動の方程式は式 (13) で表わされ, この式の両辺を x と z で2階偏微分すると式 (14), (15) となる.

$$u = \sin \omega(t-x/c_x - z/c_z) \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$c_x : c/\cos \theta$$

$$c_z : c/\sin \theta$$

$$u_{,xx} = -\frac{\omega^2}{c_x^2} u = -\frac{\omega^2}{c^2} u \cos^2 \theta \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$u_{,zz} = -\frac{\omega^2}{c_z^2} u = -\frac{\omega^2}{c^2} u \sin^2 \theta \quad \dots\dots\dots (15)$$

式 (14), (15) から $\cos^2 \theta$ を求め, 平方根をとると式 (16) のように方向余弦が得られる.

$$\cos \theta = \sqrt{u_{,xx}/(u_{,xx} + u_{,zz})} \quad \dots\dots\dots (16)$$

この式は ω の関数ではないから任意の円振動数をもつ平面波に対して適用できる. ただし, 2つの方向から同時に2つの平面波が伝播してきたときは, 優勢な方の波動の方向余弦に近い値を求めることになる.

ところで, 式 (16) 中の $u_{,xx}$ は, z 軸に平行な無限境界上の求める時刻では未知である. そこで, θ が時間的, 空間的に急激な変化をしないと仮定して, 無限境界 ($x=l$) 上の求める時刻 ($\tau=l$) の値 $\theta(l, t)$ を近傍の2点の値 $\theta(l-Dx, t)$ と $\theta(l, t-Dt)$ から以下の式で求めた.

$$\cos \theta(l, t) = \frac{1}{2} \{\cos \theta(l-Dx, t) + \cos \theta(l, t-Dt)\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

これらの一連の計算で求めた方向余弦は, かなり粗い方法で求めたものであるけれども, 単震源の場合にはほとんど問題はなかった. ただし, 波動の主要動部分が無限境界上にないときは, 式 (16) の計算に誤差が生じやすい. この乱れを防ぐために, 方向余弦の適当な初期値を計算し, $u_{,xx}$ がある設定値より小さいときは方向余弦を初期値に固定した.

b) 円筒波の考慮

逸散波は三次元空間内では球面波として拡散し, 二次元平面内では円筒波として拡散するであろう. たとえば

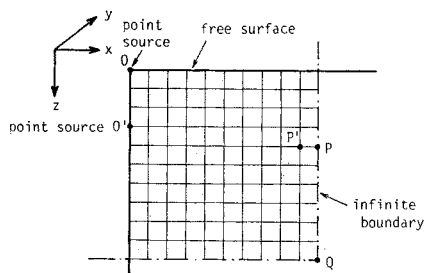


Fig. 7 Two-dimensional one-quarter infinite model.

Fig. 7 のような二次元の 1/4 半無限体の原点 O を加振したとき、逸散波は O 点を中心とする円筒波として広がる。加振点から無限境界までの距離が十分大きいならば、この波動を平面波とみなして無限境界上の計算を行っても誤差は小さいであろう。しかし、実際に差分法のシミュレーション計算を行ったところ、原点から無限境界までの節点数 20 以下の場合では、円筒波としての性質を無視できない。そこで、たとえば Fig. 7 の右側無限境界の変位計算をするようなときに、式 (10) から求めた $u_{,xx}$ に以下の考えによる円筒波としての補正を行い、式 (11) に代入して計算をした。

Fig. 7 の O 点を震源とする波動が周囲に伝播するとき、P 点の最大変位振幅 $|u(p)|$ と P' 点の最大変位振幅 $|u(p')|$ は O 点からの距離 (= 円筒波の半径) の平方根に反比例する。

$$\frac{|u(p)|}{|u(p')|} = \sqrt{\frac{OP'}{OP}} \dots \dots \dots (18)$$

また、両点は震源からほぼ同じ方向にあるので、偏微分量 $u_{,xx}$ は最大変位振幅 $|u|$ に比例する。そこで、式 (10) の右辺に用いる P' 点の値 $u_{,xx}(x=l-\Delta x)$ の代わりに、式 (19) の距離補正をした値 $\tilde{u}_{,xx}(x=l-\Delta x)$ を用いて式 (10) に代入し、無限境界上の P 点の値 $u_{,xx}(x=l)$ を計算した。

$$\tilde{u}_{,xx}(x=l-\Delta x) = \sqrt{\frac{OP'}{OP}} \cdot u_{,xx}(x=l-\Delta x) \dots \dots \dots (19)$$

Fig. 8 は、Fig. 7 のような 2 次元平面ひずみモデルの中心点 O にインパルス変位を与えたときのシミュレーション計算結果の比較であり、無限境界の計算は (a) が提案した方法によるもの、(b) が粘性境界の考え方による方法で計算したものである。粘性境界で用いた右側無限境界 ($x=l$) 上の差分式は式 (20) である。

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) \cdot u(l, z, t + \Delta t) &= (2 - 3\beta^2) \cdot u(l, z, t) \\ &- \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) \cdot u(l, z, t - \Delta t) + \beta^2 \{u(l - \Delta x, z, t) \\ &+ u(l, z - \Delta z, t) + u(l, z + \Delta z, t)\} \dots \dots \dots (20) \end{aligned}$$

ただし、モデルは節点数 14×14 (要素数 13×13)、 $\Delta t = \Delta x = \Delta z = 1.0$ 、 $\beta = 0.65$ であり、内部減衰は考えていない。また、入力周期 $12 \Delta t$ (波長約 $8 \Delta x$) の半波長正弦インパルス変位を用いた。

e) 複散波の処理

実際の構造物は一定の大きさを有し、逸散波は構造物地下部の各点から発生する。このとき、無限境界上では逸散波はさまざまな方向から伝播するさまざまな半径をもった球面波の集合体となる。もし、構造物の大きさに比べて解析領域が十分大きければ、逸散波を単一震源からの波動とみなしても問題はないであろうが、解析領域を可能な限り小さく取るためには、この問題は避けられない。しかし、実際問題として、同程度の強さをもった 2 つの逸散波が、まったく異なる方向から同時に無限境界に達することは非常にまれであり、多くの場合、ある時刻ではほぼ同じ方向から逸散波が伝播していると考えた。たとえ、まったく異なる方向から、複数の逸散波が同時に伝播してくるようなときでも、主要な成分を 1 つ抑えれば解析上期待される精度に対して十分な結果が得

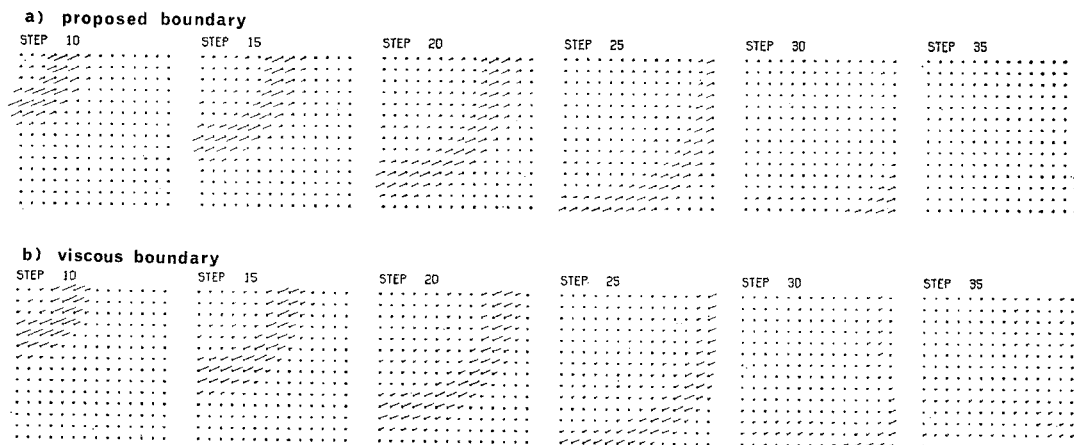


Fig. 8 Simulation of SH-wave on 1/4 infinite model. Period of input sin-wave is $12 \Delta t$, $\beta = 0.65$. Every vector indicates a displacement of anti-plane direction.

られるのではないかと考えた。また、逸散波はさまざまな曲率半径をもった波動の集合体であるが、この半径は無限境界上で計算することができないので、初めから最も出現率の高いと思われる半径に固定した。すなわ

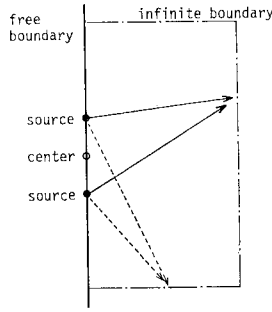


Fig. 9 Wave propagations diagram from couple sources.

ち、Fig. 9 のような 2 つの点を同時に加振したとき、無限境界上の方向余弦の計算は式 (16) をそのまま用いた。また、逸散波を円筒波とみなしたときの円の半径および方向余弦の初期値は、逸散波が 2 つの加振点を焦点とする楕円状に広がるとして、この楕円の曲率半径および法線の無限境界面に対する方向余弦を採用した。

Fig. 10 は Fig. 7 のモデルの O' 点を加振したときのシミュレーション結果であり、入力および物性は Fig. 8 のときと同じである。SH 波は自由表面で鏡面反射するから、Fig. 7 の O' 点を加振することは x 軸に対して O' 点と対称な点を同時に加振することと同義であり、Fig. 9 のように複双震源を与えることに相当する。ただし、無限境界に複数の波動が入射したときは、誤差が増幅されやすいので、領域を多少大きめにとる必要がある。Fig. 10 の結果でも、自由表面と無限境界の接点付近に多少の乱れがみられる。

4. FEM 振動解析結果

以前、著者らは面外方向の変位 (SH 波, Love 波) について、境界領域とともに内側領域も差分法を用いて解析を行ったが⁹⁾、今回は内側領域に不均一性を与えて FEM で行った。モデルの形状は Fig. 11 に示すように高さ 4 m, 幅 18 m の堤体と水平成層の地盤を考えた。FEM 解析を行う内側領域は 34 m × 16 m で、波動解析を行う帯状の境界領域は左右に 8 m, 下方に 4 m の幅にとった。したがって、解析領域全体で 46 m × 18 m の

領域に堤体部分を加えたものとなる。境界領域を側方に厚くしたのは側面無限境界での乱れを防ぐためである。地盤の上下層の境界面は深さ 18 m の位置に設定し、解析領域の底面無限境界と一致させている。Table 1 にモデルの物性と Love 波の基本モードの特性値を示す。差分法の計算を行う境界領域は均一で (せん断波速度 80 m/s), 節点間隔 Δx = Δy = 2 m, 計算の時間間隔 Δt = 0.01 s としている。無次元化波速度は β = 0.4 となり、差分の安定条件 (β² < 1/2) は満足されている。また、逸散波は Fig. 11 の白丸で示した 2 点を焦点とする楕円として広がるとして、無限境界上の曲率半径などの計算を行っている。なお、これらの解析で内部減衰は一切考えなかった。

Fig. 12 に鉛直下方から SH 波が入射した場合の結果を示す。入力には周期 0.3 s の半波長正弦インパルス変位を用いた。ただし、このときの下層の物性は上層と同じにした。

Fig. 13 と Fig. 14 は Love 波を一波長だけ入力したときの結果で、Table 1 に示すように、基本モード

Table 1 Input values of Love waves.

phase velocity (m/s)	group velocity (m/s)	period (sec)
90	71.1	0.457
100	64.4	0.635
120	59.8	0.900
140	84.7	1.244

(basic mode of two layers model)

G₂ = 4000 KN/m²
 ρ₂ = 1.6 t/m³
 C₂ = 50 m/s
 G₁ = 12800 KN/m²
 ρ₁ = 2.0 t/m³
 C₁ = 80 m/s
 G₀ = 51200 KN/m²
 ρ₀ = 2.0 t/m³
 C₀ = 160 m/s

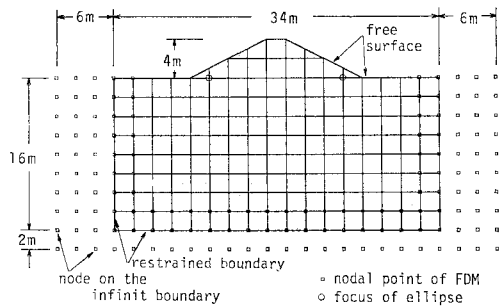


Fig. 11 Analytical model of bank and surrounding soil.

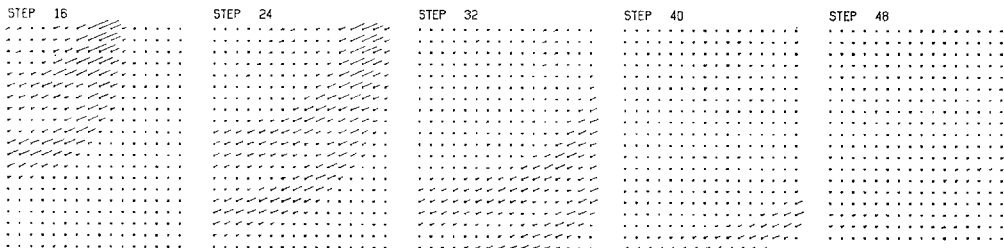


Fig. 10 Simulation of SH-wave from couple sources.

でそれぞれ位相速度 90 m/s と 120 m/s, 周期 0.457 s と 0.900 s のものを用いている。また, Love 波の境界領域内の移動速度は, 位相速度と群速度の平均の値を用いた。これは, もし定常的な波動であれば位相速度に, 孤立的な波動であれば群速度にするのが適当と考えられる。しかし, この計算例では孤立的な波動であるにもかかわらず, さまざまに移動速度を変えてみたところでは

位相速度と群速度の平均ぐらいが最もよいように思われた。なお, 本来ならば上下層の境界面においては, 逸散波の一部は反射するはずであるが, 波動インピーダンスの異なる底面無限境界での円筒波の処理方法は検討していないため, この反射は考慮しなかった。

以上の解析において, 境界領域は弾性波動理論で, 内側領域は FEM で計算するため, 計算方法の違いによ

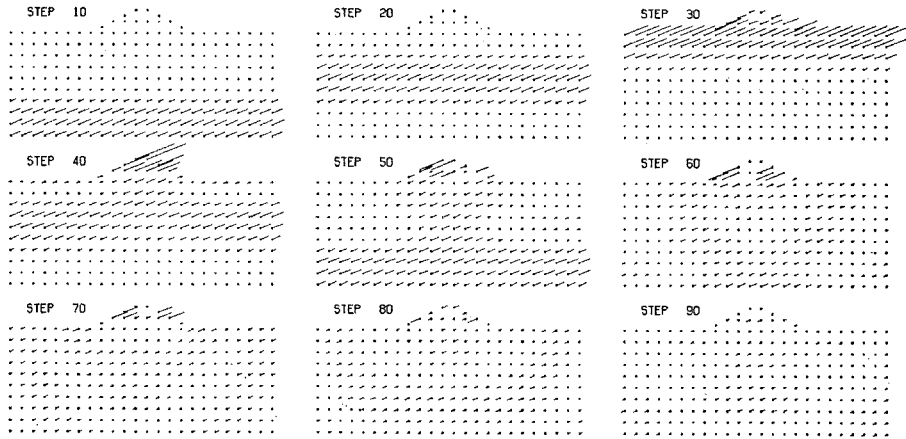


Fig. 12 Response by input SH-wave (wave period $T: 0.3$ s).
A vector indicates a displacement of anti-plane direction.

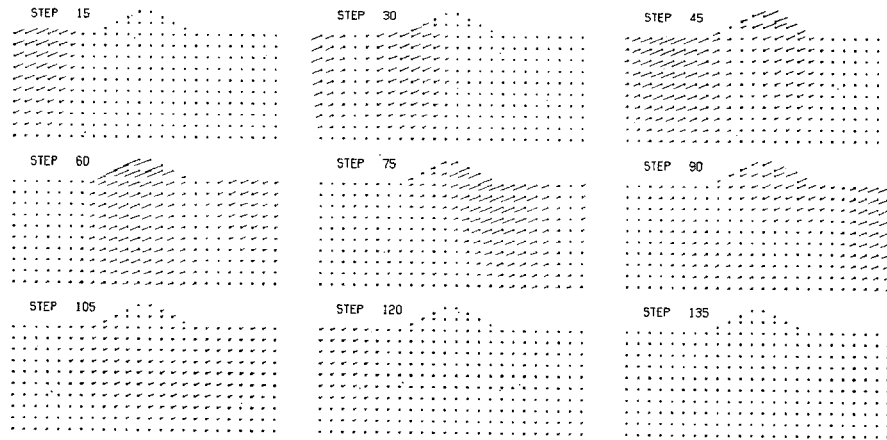


Fig. 13 Response by input Love-wave ($T: 0.457$ s).

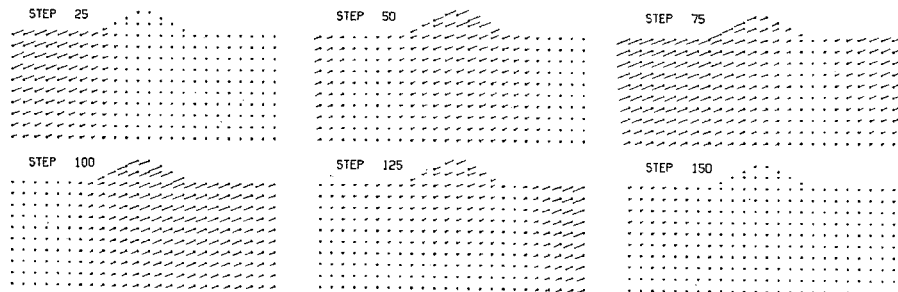


Fig. 14 Response by input Love-wave ($T: 0.900$ s).

る誤差が生じ、計算上の逸散波成分の中には真の逸散波成分のほかにこの誤差が含まれる。Fig. 13 や Fig. 14 のように表面波を入力したとき、この誤差はおもに表面波成分であると考えられる。ところが、提案した無限境界の計算方法では実体波を前提に計算を行っているにもかかわらず乱れはほとんどなかった。

5. 結 語

本解析では解析領域内に層のある場合は行っていない。しかし、内側領域は FEM で計算しているので問題はなく、境界領域は差分法の計算に Alterman⁹⁾ の方法などを用いれば、層のある場合や水平方向に不連続な物性のある場合も逸散波の計算はできる。さらに、解析領域内の地盤が水平方向に不連続な場合も、実体波や表面波の理論解が得られるならば、解析は可能である。

本研究の結果をまとめると以下ようになる。

(1) 地震動による振動解析問題を従来の FEM 振動解析方法と波動的な処理方向と組み合わせることによって合理的な解析方法を考えた。

(2) 解析には地震動や加速度でなく地震波変位を入力として用いている。入力地震波は実体波でも表面波でもよく、入力の違いによる解析結果の精度上の問題はほとんどなかった。

(3) 解析領域は部分的に重複した内側領域と境界領域に分けた。内側領域は FEM で解くため構造物や地盤の形状、物性に完全な任意性が与えられる。境界領域は波動解析するため、周辺地盤に水平成層構造までの任意性が与えられる。

(4) 提案した無限境界の処理方法は、SH 波だけでなく、多少の Love 波成分も吸収する。

謝 辞：清水建設(株)原子力部 中井正一、同研究所 加瀬みき子 の両氏には、執筆にあたり有益な助言や手伝いをしていただいたことを感謝します。

参 考 文 献

- 1) Lysmer, J. and R. Kuhlemeyer : Finite Dynamic Model for Infinite Media, ASCE, Vol. 95, EM 4, pp. 859~877, Aug. 1969.
- 2) Smith, W.D. : A Nonreflecting Plane Boundary for Wave Propagation Problems, J. Comp. Phys., Vol. 15, pp. 492~503, 1974.
- 3) Lysmer, J. and G. Waas : Shear Waves in Plane Infinite Structures, ASCE, Vol. 98, EM 1, pp. 85~105, Feb. 1972.
- 4) Lysmer, J., T. Udaka, C. Tsai and H.B. Seed : FLUSH A Computer Program for Aproximate 3-D Analysis of Soil-Structure Interaction Problems, Report No. EERC 75-30, Univ. of California, Berkeley, 1975.
- 5) Kunar, R.R. and L. Rodriguez-Ovejero : A Model With Non-Reflecting Boundaries for Use in Explicit Soil-Structure Interaction Analysis, Int. J. Earthq. Eng. and Struc. Dynam., Vol. 8, pp. 361~374, 1980.
- 6) 赤尾嘉彦・伯野元彦：有限要素法の波動逸散境界についての一つの試み，土木学会第 15 回地震工学研究発表会概要，pp. 137~140, 1979.
- 7) 赤尾嘉彦・伯野元彦：地盤振動解析における境界処理法，土木学会第 36 回年次講演会概要集第 1 部門，pp. 519~520, 1981.
- 8) Haskell, N.A. : The Dispersion of Surface Waves on Multilayered Media, Bull. Seismol. Soc. Amer., Vol. 43, pp. 17~34, 1953.
- 9) Alterman, Z., Karal : Propagation of Elastic Waves in Layered Media by Finite Difference Methods, Bull. Seismol. Soc. Amer., Vol. 58, pp. 367~398, 1968.

(1982.4.6・受付)