

非定常自由水面問題への境界要素法の一適用例

AN APPLICATION OF BOUNDARY ELEMENT METHOD TO TRANSIENT
FREE SURFACE FLOW PROBLEMS IN POROUS MEDIA

山上 拓 男*・岡 田 洋 志**

By Takuo YAMAGAMI and Hiroshi OKADA

1. ま え が き

近年, FEM と並んで数値解析法としての境界要素法 (BEM) が多くの場で活用されるに至っている. ことに, 参考文献 1), 2), あるいはこれらの訳本^{3), 4)}, さらに田中らの著書⁵⁾が出版され, 系統だった解説と具体的なプログラム例が紹介されたため, この方法は一層身近なものとなり, 実構造物の設計に積極的に取り入れられることが予想される.

BEM はその名が示すとおり, ある物理現象を支配する微分方程式を, 領域の境界上のみで成り立つ関係式 (積分方程式) に変換し, この関係式を FEM と類同な概念で離散化するものである. その結果, 境界上の未知量に関する多元連立方程式を解くことになり, FEM と違って直接的には境界上だけの解が求められる. もちろん必要とあらば, 境界上の解をもとに領域内部の諸量を計算することも容易である. この記述から明らかなように, BEM は解析領域全体を対象とする FEM などの領域型解法に比べ, 入力データ数や演算時間を短縮できるという大きい特長を有している.

一方, 多孔体中の浸透問題では, 自由水面の時間推移を明らかにすべきことが要請されるケースが非常に多い. その場合, 飽和領域だけを対象とする解法においては, 任意時刻の自由水面上のポテンシャルないし流速を用いて, それから微小な時間後の新たな自由水面位置を推定するといった手順の反復で, 自由水面の経時変化を追跡するのが普通である. この際, 従来多用されてきた FEM によれば, 自由水面上のポテンシャルや流速だけを計算したい場合でも, 領域全体のポテンシャルを求めねばならず, 無駄な演算が不可避であった. これに対し, BEM は上述のごとく, 自由水面を含む境界上の未

知量を対象とした境界型解法であることから, 非定常自由水面問題にはきわめて好都合な方法であるといえよう.

これまで浸透問題に BEM が適用された例は決して少なくない. しかしそれらの大半は定常拘束流れの問題かもしくは定常自由水面問題を解析したものである^{6)~17)}, あるいは非定常拘束流れを取り扱ったものである^{18), 19)}. 本文で対象とする自由水面を有する非定常流れを解析した例は著者らの知る限り, わずかに Liggett と Liu の一連の研究^{20)~24)}がみられるにすぎない. Liggett らは非定常自由水面を追跡するのに, かつて Cheng and Li²⁵⁾ が FEM で採用した手法, すなわち Todsen²⁶⁾ が差分分解で用いた手法を巧みに応用している. しかし自由水面を追跡する方法はこれが唯一のものではなく, ほかに FEM と関連して France, et al.²⁷⁾ や Desai²⁸⁾ らが展開し, のちに著者²⁹⁾が改良した方法もある. むしろ, エレメントではあるが幾分複雑な Liggett らの手法に比べ, 著者らの用いた方法がはるかに簡便であるといえよう. 本文はこの方法を BEM と結びつけて, 非定常自由水面問題を解く方策を検討したものである.

2. 基礎式の要約と自由水面追跡法

簡単のためここでは均質・等方性浸透場を対象とする. 多孔体と間隙流体をともに非圧縮性と仮定するとき, 定常, 非定常を問わず流れの支配式は h を全水頭として次の Laplace の式で与えられる.

$$\nabla^2 h = 0 \dots \dots \dots (1)$$

いま, 図-1 にみられるように, 基本境界条件 $h = \bar{h}$ が与えられる境界を Γ_1 , また自然境界条件 $\partial h / \partial n = \bar{q}$ が与えられる境界を Γ_2 とし, さらに, Laplace の

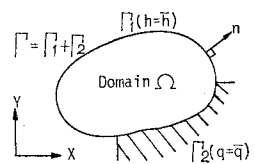


図-1 問題の定義

* 正会員 工博 徳島大学助教授 工学部建設工学科

** 徳島大学大学院修士課程

式に対する基本解（2次元）：

$$h^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \dots\dots\dots(2)$$

を導入する。ここに、 r は単位ポテンシャルを負荷した点から考える点までの距離である。このとき Brebbia のいう重みつき残差法^{1)~4)}であれ Green の公式を用いる方法^{5), 20)}であれ、式(1)を境界上の積分方程式に変換すれば次式が導かれる。

$$C^i h^i + \int_{\Gamma} h q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q h^* d\Gamma \dots\dots\dots(3)$$

ここに、 h^i は境界 Γ 上の任意点 i の全水頭、 C^i は点 i における境界の幾何的性質から定まる定数であるが、数値解析の際の C^i の取り扱いについては文献1)~5)などを参照されたい。なおこの点 i はのちに境界が適当な数の境界要素に分割されたとき、各節点を表わすことになる。また $q^* = \partial h^* / \partial n$ および $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ であり、 Γ_1 上では $h = \bar{h}$ 、 Γ_2 上では $q = \partial h / \partial n = \bar{q}$ であるとみなす。式(3)は境界上の考える点 i における全水頭の値 h^i を、境界 Γ 上の h と q の積分値と関連づけたものである。なお、式(3)で $C^i = 1$ とおいたものは、領域内部の任意点 i の全水頭 h^i と境界上の h と q の積分値とを関連づける式となる。さらに必要ならば、領域内部の任意点の x, y 方向の動水勾配は次式で計算できる。

$$\left. \begin{aligned} i_x &= \int_{\Gamma} q \frac{\partial h^*}{\partial x} d\Gamma - \int_{\Gamma} h \frac{\partial q^*}{\partial x} d\Gamma \\ i_y &= \int_{\Gamma} q \frac{\partial h^*}{\partial y} d\Gamma - \int_{\Gamma} h \frac{\partial q^*}{\partial y} d\Gamma \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

ここで、要素のタイプを線形要素 (linear element) とし (図-2 参照)、境界 Γ を n 個の要素に分割すれば、

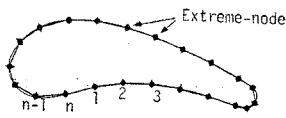


図-2 線形要素による分割

式(3)は次のように離散化される。

$$C^i h^i \cdot \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} h q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} q h^* d\Gamma \dots\dots\dots(5)$$

この式をさらに変形していくと、FEM と同様、最終的に次式で表わされる多元連立方程式に到達する。

$$[A]\{X\} = \{F\} \dots\dots\dots(6)$$

式(6)において、係数行列 $[A]$ は節点総数を n とするとき $(n \times n)$ の次元をもつが、FEM における浸透性行列とは違って対称とはならず、バンド性もたず、またスパースな行列でもない。しかし境界上の未知量だけが対象となるため FEM に比べ解くべき方程式の数が格段に少なくてよい。未知ベクトル $\{X\}$ の要素は、境界 Γ_2 上の節点の全水頭と、境界 Γ_1 上の節点の境界に外向きな法線方向の動水勾配より構成されている。右辺の $\{F\}$ は Γ_1, Γ_2 上で与えられた境界条件より定まる

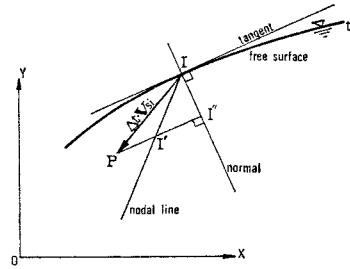


図-3 Nodal line に沿う自由水面の移動

既知ベクトルである。

さて、本文で採用した自由水面追跡法は、筆者の一人が FEM 解析と関連してすでに用いている方法²⁹⁾と本質的に同じである。まずそれを摘記しよう。すなわち図-3 において、微小なタイムステップ dt 間の自由水面の変動は自由水面上の節点を通る適当な数の nodal lines に沿ってなされるものとし、任意時刻 t の自由水面上の任意節点 I に着目する。 I 点のダルシー流速としての合速度を V_{di} 、有効間隙率を β とすれば、間隙を流れる水粒子の真の流速 V_{si} は次式で与えられる。

$$V_{si} = V_{di} / \beta \dots\dots\dots(7)$$

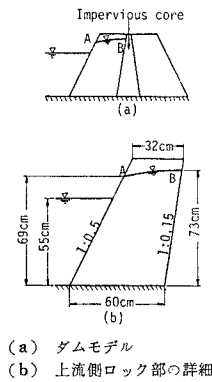
この V_{si} にタイムステップ dt を乗じたベクトル $dt \cdot V_{si}$ の先端 P から、 I 点における自由水面への接線に平行な線分を引き、これが nodal line と交わる点 I' を求め、時刻 $t + dt$ での新たな自由水面上の節点とする。他の nodal lines についても同様な手順で新たな節点を定め、これらを滑らかな曲線 (ここでは3次スプライン関数) で連ねたものが時刻 $t + dt$ の自由水面を表わす。

以上の FEM で採用された手法に対し、BEM では式(6)を解けばただちに自由水面上の法線方向の動水勾配が求まるから、これに透水係数を掛け、さらに β で割ってやると、結局図-3 の I' 点が直接求められたことになる。これより I' 点を定め、あとは上述の FEM と同じ手順を経ればよい。なお、式(6)を解くとき、解析領域は時刻 t のものを、また境界条件としての外水位は時刻 $t + dt$ の状態を用いることも FEM と同じである。

3. 角の部分の精度改善

前述したように、非定常自由水面問題では自由水面上の流速が重要な役割を果たす。したがって、BEM をこのような問題に導入しようとするれば、なによりも自由水面を構成する境界上で精度の高い流速が求められなければならない。ところが、BEM では角 (corner) の部分で式(6)を解いて得られる自由水面に垂直な方向の動水勾配、つまり流速は非常に精度が悪くなる。それは角の部分で法線方向が唯一に定まらないからである。いまの場合、角の部分とは浸出点とか自由水面と不透水面 (た

たとえば粘土コア)との交点などである。そこで、線形要素のもとに、こうした自由水面上の角の部分の流速を簡便かつ精度良く評価する方策をさぐるべく、Brebbia の示唆に従い、図-4 に示すモデルを用いて、2, 3 の数値実験を試みた。ここに、Brebbia の示唆とは角の近傍できわめて接近した位置に 2 節点を設け、適切な境界条件を与えると解の悪化を防ぐことができるとするものである³⁾。



(a) ダムモデル
(b) 上流側ロック部の詳細
図-4 不透水性コアを有するダムモデル

すなわち図-4(a)は貯水池水位低下時のロックフィルダム内自由水面を模式的に示したもので、この場合上述した角の点とは A, B 2 点である。通常 FEM でこの問題を解くときには、これら 2 点 A, B では境界条件として既知水頭が与えられる。同じ条件を BEM で与えたとすれば、明らかにその結果として求められるこれら 2 点の流速は非常に精度が悪い。したがってこの難点を解消するために角の点 A, B の近傍できわめて接近した位置に 2 節点を設けるのであるが、この場合、2 節点を設ける方法にいくつかの可能性が考えられよう。たとえば B 点に関していえば、B 点の近傍で 2 節点をいずれも自由水面側に設けるか、あるいはコアとシェルの境界線上に設けるかなどである。また境界条件の与え方についても 2 つの方法が考えられる。

そこで、どのような箇所に 2 節点を設け、かつどのような境界条件を与えれば最も効率良く自由水面問題にこの手法を持ち込むことができるかを明らかにしなければならぬ。そのため、非定常自由水面解析への導入を前提としたとき、十分と思われる次の 4 ケースについて比較計算を行った：

Case 1: 2 点 A, B の近傍に付加的な節点を設けない場合で、要素分割を図-5(a)に示す。境界条件は FEM

と同様 A, B 点ともに水頭既知とする (点 A で $\bar{h}=69.0$ cm, 点 B で $\bar{h}=73.0$ cm)。

Case 2: 図-5(b)にみられるように、浸出点(A点)に接近して自由水面上(節点 24)と流出面上(節点 25)に 2 節点を設け、前者に対して境界条件 $\bar{h}=69.05$ cm, 後者について $\bar{h}=68.9$ cm を与える。また B 点の近傍では自由水面上(節点 15)と不透水境界上(節点 14)に 2 節点を設け、境界条件は前者に $\bar{h}=73.0$ cm, 後者に $\bar{q}=0$ を指定する。

Case 3, 4: 図-5(c)に示すように、点 A, B の近傍でいずれも自由水面上に接近した 2 節点を設ける。そして浸出点(点 A)側では境界条件として両ケースいずれも図中にみられるように、節点 24 で $\bar{h}=69.05$ cm, 節点 25 で $\bar{h}=69.0$ cm を与える。他方、点 B 側では、Case 3 では節点 14 で $\bar{h}=73.0$ cm, 節点 15 でもやはり $\bar{h}=73.0$ cm を、また Case 4 では節点 14 で $\bar{q}=0$, 節点 15 で $\bar{h}=73.0$ cm を指定する。

以上の 4 ケースについて解析した結果、特に自由水面 \overline{AB} に沿う法線方向の動水勾配を図示したのが図-6 である。図で縦軸は動水勾配の値、横軸は自由水面に沿う節点位置を表わしている。これらの図から明らかに、Case 1, 2 では浸出点近傍で自由水面に沿う動水勾配が不自然な変化をみせており、非定常解析に持ち込むことは好ましくない。これに対し、Case 3, 4 はこうした不自然さが改善され、全体としてかなり滑らかな変化を示している。よって、非常に単純ではあるがこれらの比較計算から、非定常自由水面問題には Case 3, 4 いずれかの方法を採用すれば、角の部分に起因する精度の悪化を防ぐことができると予想されよう。

本研究では格別深い理由なしに Case 4 の方法を用いた。そして、時々刻々の新たな浸出点は、たとえば図-5(c)でいえば、節点 23 と 24 より計算される自由水面の位置を外挿して決定することになっている。同様に、自由水面上のいま一つの端点も、節点 16 と 15 の外挿で決定している。なお、Case 3 に基づく検討結果は別の機会に発表の予定である。

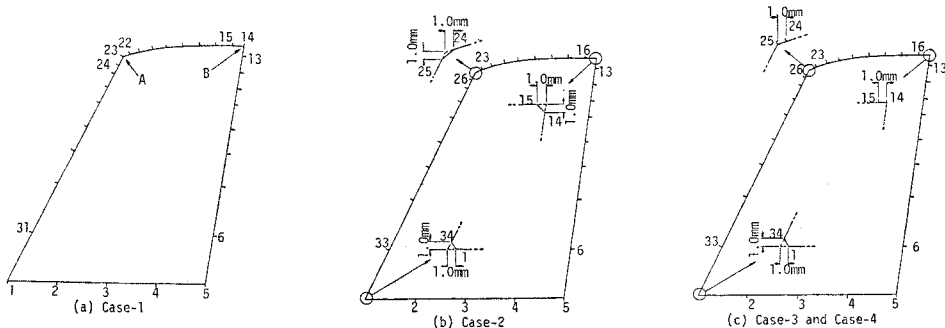
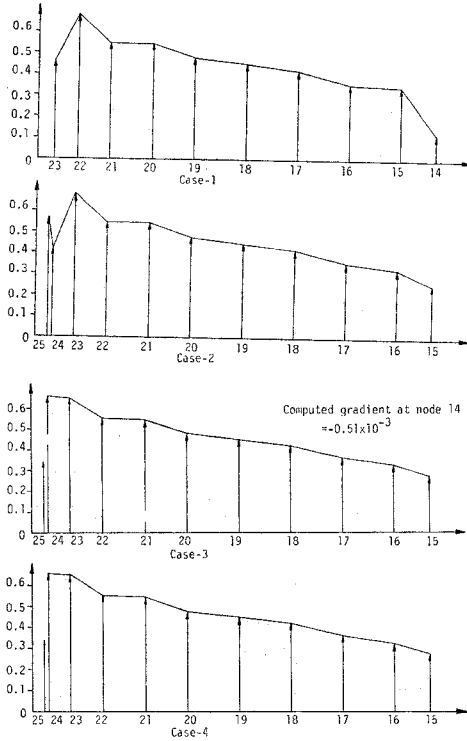


図-5 各ケースにおける要素分割図



(縦軸は動水勾配、横軸は自由水面に沿う節点位置)
 図-6 自由水面に沿う法線方向の動水勾配

4. 適用例と精度の検証

はじめに採用した問題は、著者の一人が FEM 解析取り上げている喜撰山ロックフィルダム中の流れである²⁹⁾。この問題は貯水池水位降下量が6時間で26mな条件のもとに、上流側ロック部の有効間隙率を $\beta=3$ として、透水性を2, 3 変化させ自由水面を追跡したものである。図-7 に外水位と経過時間の関係を示す。図-8 は初期要素分割状況を示すもので、要素数節点数49となっている。図-8(a)の詳細図にみ

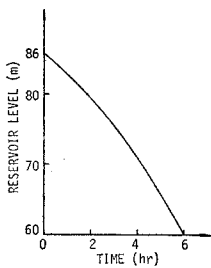
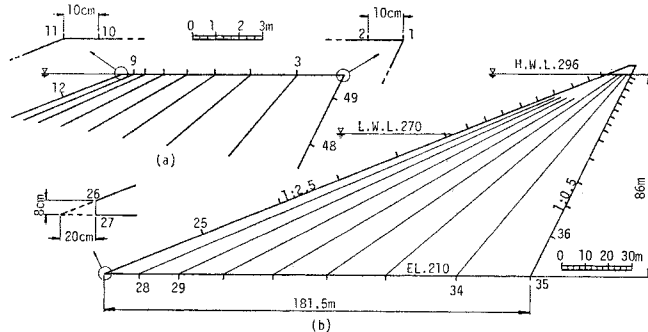


図-7 外水位と経過時間の関係

られるように、自由水面の両端近傍でそれぞれ非常に接近した位置に2つの節点(節点1と2, および10と11)が設けられている点に注意されたい。節点1, 2間, および10, 11間の距離はともに10cmである。自由水面の変動に伴って要素分割が自動的に修正されるのであるが、その際、前述したように自由水面上の要素分割はあらかじめ規定された適当な数の Nodal lines 上で行われる。この様子が図に示されており、いまの場合、不透水境界面と流出面を含めて合計11本の Nodal lines が設けられていることになる。このうち、節点2と10を通るものはそれぞれ節点1と11を通る Nodal line と平行に設定されており、その水平方向の間隔が上述したようにおのおの10cmとなっているのである。自由水面上で与えるべき境界条件は、前節 Case 4 に従い、節点1で法線方向の動水勾配 q を零とする以外はすべて全水頭既知としている。

以上の諸条件のもとに、2つの透水係数すなわち $k=0.01 \text{ cm/s}$ および $k=0.1 \text{ cm/s}$ に対して解析した結果の自由水面を、図-9, 10 に、経過時間ならびにその時々貯水池水位とともに示した。図にはまた FEM による計算結果も併記している。これらの図から、一般的にみて、BEM による自由水面の降下速度が FEM に比べ、幾分遅くなっているといえる。この現象は流出面側において特に顕著であるが、こうした事実は非常に好ましいことである点を強調しておきたい。すなわち、この種の問題の飽和領域のみを対象とした FEM 解析では、従来、自由水面、なかんずく浸出点の降下が実際現象に比すみややかであることが一つの大きい難点として経験されていたのである。

次の解析例は、やはり過去に FEM 解析で取り上げられている問題であって、図-11 に示す諸寸法の模型水槽において、外水位が急激に降下する際の自由水面を追跡したものである²⁹⁾。図-11 に初期要素分割と Nodal lines を、また図-12 に解析結果を示した。ただし、FEM 解析との比較の便宜上図-12 は図-11 と左右逆



(a) 上部詳細図 (b) 全体図
 図-8 初期要素分割と Nodal lines

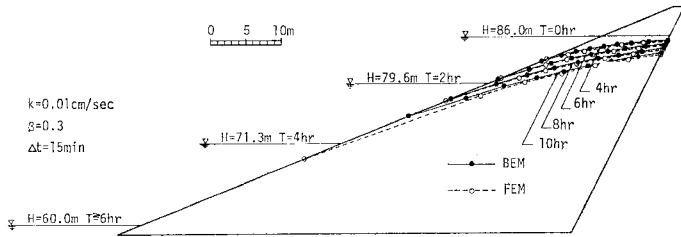


図-9 解析結果

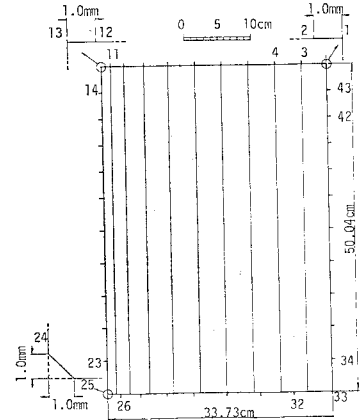


図-11 初期要素分割と Nodal lines

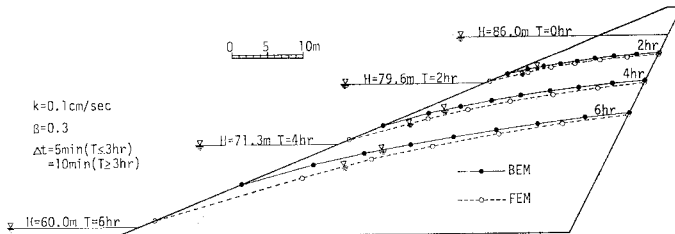


図-10 解析結果

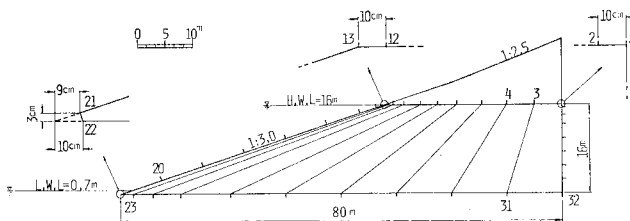


図-13 初期要素分割と Nodal lines (駒田³¹⁾の問題)

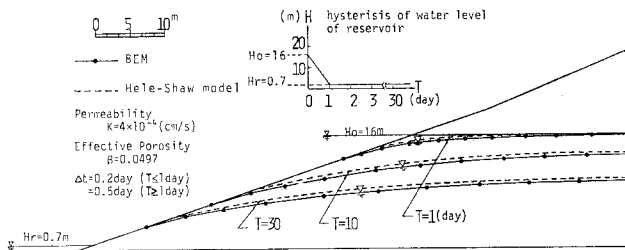


図-14 解析結果 (Hele-Shaw モデルとの比較)

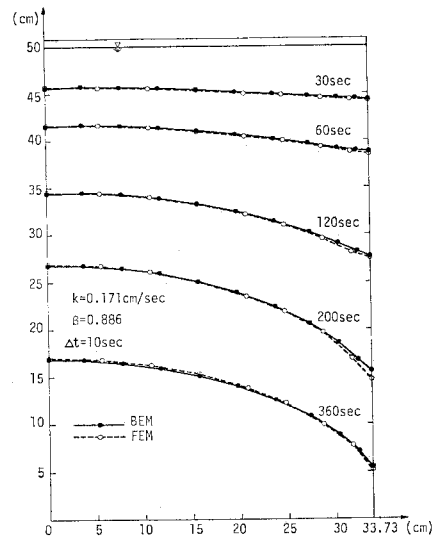


図-12 解析結果

にプロットされている。図-11 にみられるように、角の部分の精度改善のために設けられる Nodal line 間の距離はここでは 1.0 mm とした。図-12 に示したように、この場合は FEM とほぼ完全に一致した自由水面挙動が得られている。以上 2 つの例から BEM の精度は FEM に劣ることはない結論できる。なお、図-12 の問題は Szabo and McCaig³⁰⁾ の実験データも得られており、これと FEM の結果はかなりよい一致をみていることを付記しておく。

最後に、駒田³¹⁾が行った Hele-Shaw モデル実験結果との比較例を示す。図-13, 14 は初期要素分割と解析結果であるが、この場合も両者の一致度はきわめて良好

であって、非定常自由水面問題に BEM を持ち込む妥当性が確かめられたといえよう。

5. 結 言

近時、その実用性がしだいに認識されはじめた BEM を用いて、多孔体中の非定常自由水面問題を簡便に解く方を検討した。すなわち、はじめに基礎式と自由水面の追跡法を要約し、次いで自由水面上で精度の高い流速を得るための要素分割法と境界条件の与え方を述べ、最後に計算例を通して精度の検証を行った。紙数の制約上本文に記すことのできなかった事項も含め、この研究を

通じて得た結論の要点をまとめると以下のようになる。

(1) 非定常自由水面解析に必要な自由水面上の流速(動水勾配)を簡便かつ精度よく求めるには、自由水面上の両端近傍で接近した2節点を設け、適切な境界条件を与えることである(本文3. Case 3, 4 および 図-5(c), (d) 参照)。その際、接近した2節点の間隔は、解析領域が数十mから数百mのオーダーであるとき、10cm程度に、また解析領域が数十cmから数mのオーダーであるとき、1mm程度にとればよいことが経験された。

(2) 精度上 BEM は FEM に劣ることはないといえる。ただし計算の安定上、非定常解析に用いるべきタイムステップの大きさは FEM のそれに比べ幾分小さく設定することが好ましい。

(3) 本文の計算例で要した CPU time は、図-9 の場合 ACOS-900 (大阪大学) で 2 分 12 秒 (節点数 49, 反復回数 40 回)、図-10 の場合 ACOS-900 で 2 分 48 秒 (節点数 49, 反復回数 54 回)、図-12 の場合 FACOM 230-28 (徳島大学) で 24 分 41 秒 (節点数 43, 反復回数 36 回)、図-14 の場合 FACOM 230-28 で 43 分 28 秒 (節点数 39, 反復回数 63 回) であった。ただし、連立方程式の解法は Gauss の消去法である。

(4) BEM は FEM に比べ非均質・異方性の問題を解くうえで多くの労力を必要とする。しかし入力データ数と計算機の記憶容量が格段に少なくてもよい。したがって、こうした BEM の特徴を生かし、等方均質場の問題をたとえば Micro-Computer のごとき小型計算機で処理する方向¹⁾に指向すれば、一層その威力を發揮するものと思われる。

参 考 文 献

- Brebbia, C.A.: The boundary element method for engineers, Pentech Press, 1978.
- Brebbia, C.A. and S. Walker: Boundary element techniques in engineering, Newness-Butterworths, 1980.
- 神谷・田中・田中共訳: 境界要素法入門, 培風館, 昭和55年.
- 神谷・田中・田中共訳: 境界要素法の基礎と応用, 培風館, 昭和56年.
- 田中・田中: 境界要素法—基礎と応用, 丸善, 昭和57年.
- Niwa, Y., S. Kobayashi and T. Fukui: An Application of the integral equation method to seepage problems, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 24, pp. 479-486, Proc. 24th Japan National Congr. Appl. Mech., Univ. of Tokyo Press, 1974.
- 丹羽義次・小林昭一・福井卓雄: 積分方程式による浸透流の解析, 第4回岩の力学シンポジウム, pp. 67~72, 昭和48年.
- Niwa, Y., S. Kobayashi and T. Fukui: Applications of integral equation method to some geomechanical problems, Proc. 2nd Inter. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics, ASCE, Vol. 1, pp. 120~131, 1976.
- Liu, P. L-F. and J.A. Liggett: An efficient numerical method of two-dimensional steady groundwater problems, Water Resour. Res., Vol. 14, No. 3, pp. 385~390, 1978.
- Volker, R.E. and I.R. Young: Comparison of boundary integral and finite element methods for free surface flows in porous media, Proc. 3rd Inter. Conf. in Australia on F.E.M., pp. 629~644, 1979.
- 渡辺 忠・吉武美孝: 境界要素法によるコア・フィルタ一系の浸透流解析, 農業土木学会論文集, 第90号, pp. 55~62, 1980.
- Lafe, O.E., J.S. Montes, et al.: Singularities in Darcy flow through Porous Media, J. of Hydraulics Div., ASCE, Vol. 106, HY 6, pp. 977~997, 1980.
- Gómez, S., J.A. Corona and E. Alarcón: The B.I.E. M. applied to flow through porous media, Finite Element in Water Resources, Proc. 3rd Inter. Conf. on Finite Elements in Water Resources, pp. 2.3~2.14, 1980.
- Lafe, O.E., J.A. Liggett and P.L-F. Liu: BIEM solutions to combinations of leaky, layered, confined, unconfined, nonisotropic aquifers, Water Resour. Res., Vol. 17, No. 5, pp. 1431~1444, 1981.
- Hunt, B. and L.T. Isaacs: Integral equation formulation for ground-water flow, J. of Hydraulics Div., ASCE, Vol. 107, HY 10, pp. 1197~1209, 1981.
- Chang, C.S.: Boundary element method in seepage analysis with a free surface, Implementation of Computer Procedures and Stress-Strain Laws in Geotechnical Engineering, Proc. Symposium held at Chicago, Illinois, Vol. II, pp. 421~430, 1981.
- Baker, R.: Use of micro-computers for the solution of seepage problems by the boundary element method, Implementation of Computer Procedures and Stress-Strain Laws in Geotechnical Engineering, Proc. Symposium held at Chicago, Illinois, Vol. II, pp. 463~475, 1981.
- Liggett, J.A. and P.L-F. Liu: Unsteady flow in confined aquifers- A comparison of two boundary integral methods, Water Resour. Res., Vol. 15, No. 4, pp. 861~866, 1979.
- Banerjee, P.K., R. Butterfield and G.R. Tomlin: Boundary element methods for two-dimensional problems of transient ground water flow, Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech., Vol. 5, pp. 15~31, 1981.
- Liggett, J.A.: Location of free surface in porous media, J. of Hydraulics Div., ASCE, Vol. 103, HY 4, pp. 353~365, 1977.
- Liu, P. L-F. and J.A. Liggett: Boundary integral solutions to groundwater problems, Proc. 1st Int. Conf. on Applied Numerical Modelling, pp. 559~569, 1977.
- Liu, P. L-F. and J.A. Liggett: Boundary solutions to two problems in porous media, J. of Hydraulics Div., ASCE, Vol. 105, HY 3, pp. 171~183, 1979.
- Lennon, G.P., P. L-F. Liu and J.A. Liggett: Boundary integral equation solution to axisymmetric potential flows, 2. Recharge and well problems in porous media, Water Resour. Res., Vol. 15, No. 5, pp. 1107~1115, 1979.
- Lennon, G.P., P. L-F. Liu and J.A. Liggett: Boundary integral solutions to three-dimensional unconfined Darcy's flow, Water Resour. Res., Vol. 16,

- No. 4, pp. 651~658, 1980.
- 25) Cheng, R.T.S. and C.Y. Li : On the solution of transient free-surface flow problems in porous media by the finite element method, *J. of Hydrology*, Vol. 20, pp. 49~63, 1973.
- 26) Todsén, M. : On the solution of transient free-surface flow problems in porous media by finite difference methods, *J. of Hydrology*, Vol. 12, pp. 177~210, 1971.
- 27) France, P.W., et al. : Numerical analysis of free surface seepage problems, *J. of Irrig. and Drain. Div.*, ASCE, Vol. 97, IR 1, pp. 165~179, 1971.
- 28) Desai, C.S. : Seepage analysis of earth banks under drawdown, *J. of Soil Mech. and Found. Div.*, ASCE, Vol. 98, SM 11, pp. 1143~1162, 1972.
- 29) 山上拓男 : 有限要素法による非定常浸透流解析に関する一考察, 土木学会論文報告集, 第 263 号, pp. 85~95, 1977.
- 30) Szabo, B.A. and I.W. McCaig : A mathematical model for transient free surface flow in nonhomogeneous or anisotropic porous media, *Water Resour. Bulletin*, Vol. 4, No. 3, pp. 5~18, 1968.
- 31) 駒田広也・金沢紀一 : フィルダムの貯水池水位急降下時の非定常浸透流解析および安定解析, 土木学会論文報告集, 第 240 号, pp. 51~62, 1975.

(1982.10.22・受付)
