

## 立体構造物における接線幾何剛性マトリックスの定式化

A FORMULATION OF TANGENT GEOMETRIC STIFFNESS  
MATRIX FOR SPACE STRUCTURE

後 藤 茂 夫\*

By Shigeo GOTO

## 1. ま え が き

薄肉断面棒部材など、単一部材を対象とする有限変位理論は、すでに数多くの研究がなされており、高次非線形項の評価など、解式表現の高精度化に顕著な成果が得られている<sup>1)~3), 6)</sup>。

しかしながら、立体構造全体系としての幾何学的非線形性を考慮した有限変位解析に関する研究は比較的少なく、骨組構造については、変形後の部材の状態を有限な回転を厳密に記述する回転行列を導入して表わし、部材剛性および部材端変位の関数となる非線形剛性行列、接線剛性行列を利用した前田・林の研究<sup>4)</sup>、微小項を省略することなく変形後のつり合い条件を正しく表現する陰形式の増分つり合い方程式を用いた吉田・増田・森本・広沢の研究<sup>5)</sup>、また立体薄板構造に関しては、吉田・増田・松田の弾塑性大変位解析法<sup>7)</sup>などがある。

著者は、さきに平面骨組および柔ケーブル構造に対して既知平衡状態(先行状態)の要素力をパラメーターとする接線幾何剛性を導入、変位をパラメーターとする非線形剛性マトリックスを必要としない接線剛性法による大変形解析法を示し、その収束性・精度について十分な成果を得ている<sup>4), 6)</sup>。

本論文は、この接線剛性法の立体構造系への適用のため、構造物の幾何学的非線形挙動の本質的な要因である要素変形(要素座標系に関する要素端変位)と節点変位の適合条件の非線形性に起因する接線幾何剛性マトリックスを、要素固有の挙動に関する要素剛性マトリックスから完全に分離して、非線形剛性マトリックスを介さずに直接定式化することを試みたものである。

導かれた接線幾何剛性マトリックスは、先行要素力(先行要素座標系に関する節点力)と先行状態における要素の節点間寸法とによって構成される単純明解なもの

\* 正会員 工博 日本構造技術(株)取締役社長

となり、従来の要素固有の挙動による影響を含めての非線形剛性マトリックスのような対象要素の限定という制約がなくなり、たとえば、4節点要素では、平面あるいは曲面の四辺形板要素でも、三角錐立体要素であってもよく、要素の節点数のみが対象とする要素を規定することになる。

## 2. 序 論

立体構造物の一構成要素に着目し、その先行つり合い状態の要素座標系に関する節点力ベクトルを  $U$ 、また剛体変位を拘束する静定な支点条件を想定、その可動方向の独立な節点力からなる要素力ベクトルを  $S$  とすれば、つり合い条件として次式が成立する。

$$JS = U \dots \dots \dots (1)$$

いま、先行要素座標系に関する節点力の増加  $\Delta U$  により対応する節点変位  $\Delta u$  が発生、変形後の同様な想定支点条件に関する要素力が  $S + \Delta S$ 、対応する要素変形(想定支点条件の可動方向変位)が  $\Delta s$  となって、再び平衡状態となったものとすれば、その間の全ポテンシャルエネルギーの増加は次のようになる。

$$\Pi = \int_0^{\Delta s} \Delta S^T d\Delta s + \Delta s^T S - \Delta u^T (U + \Delta U) \dots (2)$$

平衡状態では  $\Pi$  は極値となるので、変位ベクトルでの微分により

$$\frac{\partial \Delta s^T}{\partial \Delta u} (S + \Delta S) = U + \Delta U \dots \dots \dots (3)$$

のように変形後における要素力と荷重のつり合い条件式が得られ、つり合い条件における座標変換マトリックス  $J$  の変化量を  $\Delta J$  とすれば

$$\partial \Delta s^T / \partial \Delta u = J + \Delta J \dots \dots \dots (4)$$

$$J \Delta S + \Delta J (S + \Delta S) = \Delta U \dots \dots \dots (5)$$

また、有限増分の記号  $\Delta$  に対して、変分量に記号  $\delta$  を用いれば

$$J\delta S + \delta JS = \delta U \dots \dots \dots (6)$$

となり、左辺第1項に対しては、要素剛性方程式に起因する剛性マトリックス  $K_0$ 、第2項に対しては、接線幾何剛性マトリックス  $K_G$  を用いて、式(7)のように接線剛性方程式へと変換される。

$$(K_0 + K_G)\delta u \equiv K_T \delta u = \delta U \dots \dots \dots (7)$$

$K_G$  は、式(4)~(7)より

$$\begin{aligned} K_G &= \frac{\partial(\delta JS)^T}{\partial \delta u} = \frac{\partial(\Delta JS)^T}{\partial \Delta u} \Bigg|_{\Delta u \rightarrow 0} \\ &= \frac{\partial(JS + \Delta JS)^T}{\partial \Delta u} \Bigg|_{\Delta u \rightarrow 0} = \frac{\partial}{\partial \Delta u} \left( \frac{\partial \Delta s^T}{\partial \Delta u} S \right)^T \Bigg|_{\Delta u \rightarrow 0} \\ &= \frac{\partial}{\partial \Delta u} \left\{ \frac{\partial}{\partial \Delta u} (\Delta s^T S) \right\}^T \Bigg|_{\Delta u \rightarrow 0} \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

が得られ、文献10)における接線剛性マトリックスの幾何剛性  $[K_{G(e)}]$  と同様な表示となる。すなわち、変位ベクトルを

$$\Delta u = [\Delta u_1 \ \Delta u_2 \ \dots \ \Delta u_n]^T \dots \dots \dots (9)$$

とおけば、 $K_G$  の  $i$  行  $j$  列要素は、式(10)によって求めることができる。

$$K_{Gij} = \frac{\partial^2(\sum \Delta s_k S_k)}{\partial \Delta u_i \partial \Delta u_j} \Bigg|_{\Delta u_1, \Delta u_2, \dots, \Delta u_n \rightarrow 0} \dots \dots \dots (10)$$

$\Delta s^T S = \sum \Delta s_k S_k$  は、先行要素力と要素変形増分によって要素に蓄えられるひずみエネルギーであり、 $S_k$  を既知定数として取り扱い、また要素変形  $\Delta s_k$  は、変位の関数(適合条件)として2次の項まで忠実に展開表示しておくことが必要である。

こうして得られるマトリックス  $K_G$  は、変位に関する非線形項は一切含まず、先行状態における節点力と節点間距離とによってのみ構成される単純明解なものとなり、要素剛性から分離された適合条件の幾何学的非線形性に起因する接線幾何剛性の厳密な表現となる。

なお、前記の各式について、共通座標系への座標変換さらに全体構造系へと拡張されたものとすれば、接線剛性法における反復公式は、反復回数を  $r$  として

$$\Delta u_{r+1} = \Delta u_r + K_T^{-1}(J_r, S_r) \cdot (U + \Delta U - J_r S_r) \dots \dots \dots (11)$$

であり、 $\Delta u_r \rightarrow \Delta s_r \rightarrow S_r$  の算出過程が適合条件および要素剛性方程式と矛盾のないものであれば、数学的なNewton-Raphson法と等価となり、きわめて安定した収束性を示すものとなる。

### 3. 任意のベクトルのまわりの座標系の回転

取り扱う座標系は、すべて直交座標右手系とし、基準座標系の諸ベクトルを  $\omega$  で代表させ、基準座標系を  $\omega$  系とよぶ。 $\omega$  系で表わされた回転軸となるベクトル  $r$  を

$$r = [r_1 \ r_2 \ r_3]^T, \quad r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} \dots \dots (12)$$

とおき、回転角は右ねじ進行方向とベクトルの向きを一

致させたときの回転を正とし、ベクトルの絶対値  $r$  を回転角の大きさとする。

$\omega$  系とベクトル  $r$  の方向を第3軸とする任意の座標系  $\omega_r$  とを  $r$  のまわりに  $r$  だけ回転させて生じる座標系を  $\omega'$ 、 $\omega_r'$  とすれば、式(13)が成立する。

$$\omega_r = a\omega, \quad \omega_r' = a\omega', \quad \omega_r' = b\omega_r \dots \dots \dots (13)$$

ここで、 $a$  は、その第3行が  $r^T/r$  となり、他の行が任意の単位ベクトルとなる直交マトリックスであり、 $b$  は式(14)のようになる。

$$b = \begin{bmatrix} \cos r & \sin r & \\ -\sin r & \cos r & \\ & & 1 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (14)$$

したがって、 $\omega$  系から  $\omega'$  系への座標変換マトリックスを  $\Phi$  とすれば

$$\omega' = a^T b a \omega, \quad \therefore \Phi = a^T b a \dots \dots \dots (15)$$

となり、結局  $\Phi$  の各要素は、 $a$  の直交条件より、すべて確定し、式(16)あるいは(17)のように表わされる<sup>11)</sup>。

$$\Phi = r r^T (1 - \cos r) / r^2 + e \cos r - r \times e (\sin r) / r \dots \dots \dots (16)$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{bmatrix} r_1^2 & r_1 r_2 & r_1 r_3 \\ r_2 r_1 & r_2^2 & r_2 r_3 \\ r_3 r_1 & r_3 r_2 & r_3^2 \end{bmatrix} \frac{1 - \cos r}{r^2} \\ &+ \begin{bmatrix} \cos r & & \\ & \cos r & \\ & & \cos r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix} \\ &\cdot \frac{\sin r}{r} \dots \dots \dots (17) \end{aligned}$$

なお  $e$  は、3次の単位マトリックス、 $r \times$  は  $r$  による外積を表わす。

また、特に第1軸の軌跡が平面となるような座標系の回転において、回転後の第1軸の  $\omega$  系に対する方向余弦を  $\alpha, \beta, \gamma$  とすれば、この場合の回転軸ベクトル  $r'$  および座標変換マトリックス  $\Phi'$  は、式(18)、(19)のようになる。

$$r' = [0 \ -r \ \beta]^T (\cos^{-1} \alpha) / \sqrt{1 - \alpha^2} \dots \dots \dots (18)$$

$$\Phi' = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & r \\ -\beta & 1 - \beta^2 / (1 + \alpha) & -\beta r / (1 + \alpha) \\ -r & -\beta r / (1 + \alpha) & 1 - r^2 / (1 + \alpha) \end{bmatrix} \dots \dots \dots (19)$$

### 4. 多節点要素

#### (1) 要素座標系

節点数3個以上の多節点要素において、同一直線上にない3節点0, 1, 2を選び、0を原点、直線01を  $x$  軸、3節点で決まる平面を  $xy$  平面とする右手系直交座標 ( $x, y, z$ ) を要素座標系として設定する(図-1)。

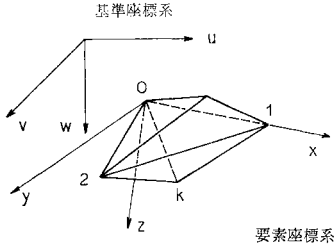


図-1 要素座標系

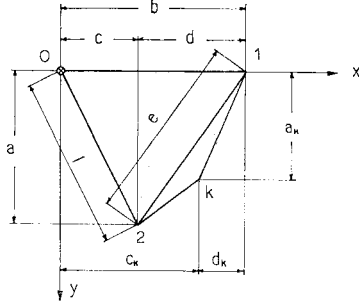


図-2 要素の基本寸法

基準座標系  $(u \ v \ w)$  に関する要素節点の座標ベクトルを  $u_i$  とし

$$u_{ij} = u_i - u_j, \quad i, j = 0, 1, \dots, n \quad (20)$$

とおけば、基準座標系に関する  $x, y, z$  各軸の方向余弦ベクトルは

$$\alpha_x = u_{10}/b \quad (21)$$

$$\alpha_y = u_{20}/a - cu_{10}/ab \quad (22)$$

$$\alpha_z = u_{10} \times u_{20}/ab \quad (23)$$

のように表わすことができる。すなわち、

$$u_{ij} = [u_{ij} \ v_{ij} \ w_{ij}]^T \quad (24)$$

とおいて要素座標系を基準座標系に変換する座標変換マトリックスを  $\alpha$  とすれば、式 (25) のようになる。

$$\alpha = [\alpha_x \ \alpha_y \ \alpha_z] \\ = \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} au_{10} & bu_{20} - cu_{10} & v_{10}w_{20} - v_{20}w_{10} \\ av_{10} & bv_{20} - cv_{10} & w_{10}u_{20} - w_{20}u_{10} \\ aw_{10} & bw_{20} - cw_{10} & u_{10}v_{20} - u_{20}v_{10} \end{bmatrix} \quad (25)$$

(2) 適合条件と接線幾何剛性マトリックス

要素座標系に関する節点  $i$  の節点力を  $U_i, V_i, W_i$ , 節点モーメントを  $X_i, Y_i, Z_i$  とし

$$\left. \begin{aligned} U &= [U_0^T \ U_1^T \ \dots \ U_n^T]^T \\ U_i &= [U_i \ V_i \ W_i \ X_i^T]^T \\ X_i &= [X_i \ Y_i \ Z_i]^T \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

とおき、また、これらの節点力のうちの独立な節点力からなる要素力ベクトルを式 (27) のように定める。

$$S = [X_0^T \ U_1 \ X_1^T \ U_2 \ V_2 \ X_2^T \ U_3^T \ U_4^T \ \dots \ U_n^T]^T \quad (27)$$

表-1 要素の仮想支点条件

節点	x 方向	y 方向	z 方向
0	拘束	拘束	拘束
1	可動	拘束	拘束
2	可動	可動	拘束
$k=3 \sim n$	可動	可動	可動

すなわち、このことは、要素の剛体変位を拘束する静定な仮想支点条件を表-1のように設定したことになり、基本寸法の変化量  $\Delta b, \Delta c, \Delta a, \Delta c_k, \Delta a_k, \Delta f_k$  は、要素力  $U_1, U_2, V_2, U_k, V_k, W_k$  に対応する要素変形となる。

ここで  $\Delta f_k$  は、節点  $k (\geq 3)$  の  $z$  座標値  $f_k$  の変化量である。

変形前後の要素座標系を基準座標系へと変換する座標変換マトリックスをそれぞれ  $\alpha_0, \alpha$  とすれば、変形前要素座標系を変形後要素座標系へと変換するマトリックスは  $\alpha^T \alpha_0$  となり、その回転ベクトル  $r$  は

$$r r^T (1 - \cos r) / r^2 + e \cos r - r \times e (\sin r) / r = \alpha^T \alpha_0 \quad (28)$$

より求めることができる。すなわち  $\alpha^T \alpha_0$  の要素を

$$\alpha^T \alpha_0 = \begin{bmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{bmatrix} \quad (29)$$

とおけば、式 (30), (31) が得られる。

$$4 \sin^2 r = (\zeta_2 - \eta_3)^2 + (\xi_3 - \zeta_1)^2 + (\eta_1 - \xi_2)^2 \quad (30)$$

$$r = \frac{r}{2 \sin r} \begin{bmatrix} \zeta_2 - \eta_3 \\ \xi_3 - \zeta_1 \\ \eta_1 - \xi_2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

また、節点  $i$  の変形前 (先行状態) における基本寸法  $c_i, a_i, f_i$  が変形後において  $c_i + \Delta c_i, a_i + \Delta a_i, f_i + \Delta f_i$  となるものとして、これらによるベクトルを  $a_i + \Delta a_i$ , さらに、基準座標系に関する回転変位ベクトルを  $\Delta x_i$ , 変形後の要素座標系に関する剛体回転成分を除いた回転変位ベクトルを  $\Delta \theta_i$  とすれば、厳密な適合条件式として、式 (32), (33) が得られる。

$$\Delta a_i = \alpha^T (u_{i0} + \Delta u_{i0}) - \alpha_0 u_{i0} = \alpha^T (u_{i0} + \Delta u_{i0}) - a_i \quad (32)$$

$$\Delta \theta_i = \alpha^T (\Delta x_i - \alpha_0 r) = \alpha^T \Delta x_i - r \quad (33)$$

先行状態の要素座標系を基準座標系と考えると

$$\alpha^T \alpha_0 = \alpha^T = [\alpha_x \ \alpha_y \ \alpha_z]^T \quad (34)$$

とおけば、式 (32) は、 $i=1, 2, \dots, n$  として

$$\begin{bmatrix} \Delta c_i \\ \Delta a_i \\ \Delta f_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x^T \\ \alpha_y^T \\ \alpha_z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_i + \Delta u_{i0} \\ a_i + \Delta v_{i0} \\ f_i + \Delta w_{i0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_i \\ a_i \\ f_i \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$[c_i \ a_i \ f_i] = [b \ 0 \ 0], \quad [c_2 \ a_2 \ f_2] = [c \ a \ 0] \quad (36)$$

となり、 $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$  は、以下のようになる。

$$\alpha_x = \frac{1}{b + \Delta b} \begin{bmatrix} b + \Delta u_{10} \\ \Delta v_{10} \\ \Delta w_{10} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (37)$$

$$\alpha_y = \frac{1}{a + \Delta a} \begin{bmatrix} c + \Delta u_{20} \\ a + \Delta v_{20} \\ \Delta w_{20} \end{bmatrix} \\ - \frac{c + \Delta c}{(a + \Delta a)(b + \Delta b)} \begin{bmatrix} b + \Delta u_{10} \\ \Delta v_{10} \\ \Delta w_{10} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (38)$$

$$\alpha_z = \frac{1}{(a + \Delta a)(b + \Delta b)} \\ \cdot \begin{bmatrix} \Delta v_{10} \Delta w_{20} - (a + \Delta v_{20}) \Delta w_{10} \\ (c + \Delta u_{20}) \Delta w_{10} - (b + \Delta u_{10}) \Delta w_{20} \\ (b + \Delta u_{10})(a + \Delta v_{20}) - (c + \Delta u_{20}) \Delta v_{10} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (39)$$

先行状態の要素座標系に関する接線幾何剛性マトリックスの定式化のため、各適合条件式を変位の2次の項までを展開表示すれば、式(40)~(49)が得られる。

$$\Delta b = \Delta u_{10} + (\Delta v_{10}^2 + \Delta w_{10}^2)/2b \dots \dots \dots (40)$$

$$\Delta c = \Delta u_{20} + a(b - \Delta u_{10}) \Delta v_{10}/b^2 - c(\Delta v_{10}^2 + \Delta w_{10}^2)/2b^2 \\ + (\Delta v_{10} \Delta v_{20} + \Delta w_{10} \Delta w_{20})/b \dots \dots \dots (41)$$

$$\Delta a = \Delta v_{20} - c(b - \Delta u_{10}) \Delta v_{10}/b^2 - \Delta u_{20} \Delta v_{10}/b \\ - a \Delta v_{10}^2/2b^2 + \Delta \omega^2/2ab^2 \dots \dots \dots (42)$$

$$\alpha_x = \frac{1}{2b^2} \begin{bmatrix} 2b^2 - \Delta v_{10}^2 - \Delta w_{10}^2 \\ 2(b - \Delta u_{10}) \Delta v_{10} \\ 2(b - \Delta u_{10}) \Delta w_{10} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (43)$$

$$\alpha_y = \frac{1}{2a^2b^2} \begin{bmatrix} -2a^2(b - \Delta u_{10}) \Delta v_{10} + 2a \Delta w_{10} \Delta \omega \\ 2a^2b^2 - a^2v_{10}^2 - \Delta \omega^2 \\ -2(ab + c \Delta v_{10} - b \Delta v_{20}) \Delta \omega \\ + 2a(c \Delta u_{10} - b \Delta u_{20} - a \Delta v_{10}) \Delta w_{10} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (44)$$

$$\alpha_z = \frac{1}{2a^2b^2} \begin{bmatrix} -2a^2(b - \Delta u_{10}) \Delta w_{10} - 2a \Delta \omega \Delta v_{10} \\ 2(ab + c \Delta v_{10} - b \Delta v_{20}) \Delta \omega \\ - 2a(c \Delta u_{10} - b \Delta u_{20}) \Delta w_{10} \\ 2a^2b^2 - a^2 \Delta w_{10}^2 - \Delta \omega^2 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (45)$$

$$\Delta c_k = \Delta u_{k0} + (b - \Delta u_{10})(a_k \Delta v_{10} + f_k \Delta w_{10})/b^2 \\ - c_k(\Delta v_{10}^2 + \Delta w_{10}^2)/2b^2 \\ + (\Delta v_{10} \Delta v_{k0} + \Delta w_{10} \Delta w_{k0})/b \dots \dots \dots (46)$$

$$\Delta a_k = \Delta v_{k0} - (c_k + \Delta u_{k0}) \Delta v_{10}/b - \Delta \omega(f_k + \Delta w_{k0})/ab \\ + \Delta v_{10}(c_k \Delta u_{10} - f_k \Delta w_{10})/b^2 \\ - f_k(c \Delta v_{10} - b \Delta v_{20}) \Delta \omega/a^2b^2 \\ + f(c \Delta u_{10} - b \Delta u_{20}) \Delta w_{10}/ab^2 \\ + \Delta \omega(2ac_k \Delta w_{10} - a_k \Delta \omega)/2a^2b^2 \dots \dots \dots (47)$$

$$\Delta f_k = \Delta w_{k0} - (c_k + \Delta u_{k0}) \Delta w_{10}/b + (a_k + \Delta v_{k0}) \Delta \omega/ab \\ + (ac_k - a_k c)(a \Delta u_{10} \Delta w_{10} - \Delta \omega \Delta v_{10})/a^2b^2 \\ + a_k(a \Delta u_{20} \Delta w_{10} - \Delta \omega \Delta v_{20})/a^2b \\ - f_k(a^2 \Delta w_{10}^2 + \Delta \omega^2)/2a^2b^2 \dots \dots \dots (48)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \theta_{xi} \\ \Delta \theta_{yi} \\ \Delta \theta_{zi} \end{bmatrix} = \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} ab & a \Delta v_{10} & a \Delta w_{10} \\ -a \Delta v_{10} & ab & -\Delta \omega \\ -a \Delta w_{10} & \Delta \omega & ab \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \zeta_2 & -\eta_3 \\ \zeta_3 & -\zeta_1 \\ \eta_1 & -\zeta_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta x_i + (ab + c \Delta v_{10} - b \Delta v_{20}) \Delta \omega/a^2b^2 \\ + \Delta v_{10} \Delta w_{10}/2b^2 + (\Delta v_{10} \Delta y_i + \Delta w_{10} \Delta z_i)/b \\ - (c \Delta u_{10} - b \Delta u_{20}) \Delta w_{10}/ab^2 \\ \Delta y_i + (b - \Delta u_{10}) \Delta w_{10}/b^2 - \Delta v_{10} \Delta x_i/b \\ + (\Delta v_{10} - 2b \Delta z_i) \Delta \omega/2ab^2 \\ \Delta z_i - (b - \Delta u_{10}) \Delta v_{10}/b^2 - \Delta w_{10} \Delta x_i/b \\ + (\Delta w_{10} + 2b \Delta y_i) \Delta \omega/2ab^2 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (49)$$

ここで、 $k=3, 4, \dots, n, i=0, 1, \dots, n$

$$\Delta \omega = c \Delta w_{10} - b \Delta w_{20} \dots \dots \dots (50)$$

であり、式(49)は、先行要素座標系を基準座標系と考えての式(33)の展開式である。

また、以上より線形の適合条件は

$$\begin{bmatrix} \delta c_i \\ \delta a_i \\ \delta f_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta u_{i0} \\ \delta v_{i0} \\ \delta w_{i0} \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} a(a_i \delta v_{10} + f_i \delta w_{10}) \\ -a c_i \delta v_{10} - f_i(c \delta w_{10} - b \delta w_{20}) \\ -a c_i \delta w_{10} + a_i(c \delta w_{10} - b \delta w_{20}) \end{bmatrix} \dots \dots \dots (51)$$

$$\begin{bmatrix} \delta \theta_{xi} \\ \delta \theta_{yi} \\ \delta \theta_{zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta x_i \\ \delta y_i \\ \delta z_i \end{bmatrix} + \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} c \delta w_{10} - b \delta w_{20} \\ a \delta w_{10} \\ -a \delta v_{10} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (52)$$

となるが、 $S$ および $U$ と対応する配列の微小変形 $\delta s$ と微小変位 $\delta u$ に関して、式(51),(52)を適用、 $\delta u$ の係数マトリックスを $J^T$ とおけば

$$\delta s = J^T \delta u, U = JS \dots \dots \dots (53)$$

が成立し、 $S$ を先行状態の要素力と考えれば、これと要素変形増分 $\Delta s$ によって要素に蓄えられるポテンシャルエネルギーは、式(54)のように表わされる。

$$A = \Delta s^T S = \sum_{i=0}^n [\Delta c_i U_i + \Delta a_i V_i + \Delta f_i W_i \\ + \Delta \theta_{xi} X_i + \Delta \theta_{yi} Y_i + \Delta \theta_{zi} Z_i] \dots \dots \dots (54)$$

要素変形に式(40)~(49)を用いることにすれば、先行要素座標系に関する要素の接線幾何剛性マトリックス $k_G$ の*i*行*j*列要素は、式(55)によって求まり、ここでの $\Delta d_i$ は、 $r=0, 1, \dots, n$ として式(56)のように対応する。

$$k_{Gij} = \partial^2 A / (\partial \Delta d_i \partial \Delta d_j) \dots \dots \dots (55)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta u_r \\ \Delta v_r \\ \Delta w_r \\ \Delta x_r \\ \Delta y_r \\ \Delta z_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta d_{6r+1} \\ \Delta d_{6r+2} \\ \Delta d_{6r+3} \\ \Delta d_{6r+4} \\ \Delta d_{6r+5} \\ \Delta d_{6r+6} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (56)$$

式 (55) で明らかなように  $k_G$  は、対称マトリックスとなり、その対称性を考えて非零要素について表示すれば表-2 のようになる。

表-2 の \* で示された各係数は以下のようになる。

$$k_{G_{1,3}} = -k_{G_{1,9}} = \{abW_0 - 2 \sum_3 (aU_r + dV_r) f_r\} / ab^2 \dots\dots\dots (57)$$

$$k_{G_{2,2}} = -\{bU_0 - \sum_2 (d_r U_r - a_r V_r)\} / b^2 \dots\dots\dots (58)$$

$$k_{G_{2,3}} = [abdW_0 - \sum_2 \{a(aa_r + dd_r)W_r - ad f_r U_r - (4e^2 - a^2) f_r V_r\}] / 2 a^2 b^2 \dots\dots\dots (59)$$

$$k_{G_{2,6}} = \{bU_0 + \sum_2 (c_r U_r + a_r V_r)\} / b^2 \dots\dots\dots (60)$$

$$k_{G_{2,9}} = [abcW_0 + \sum_2 \{a(aa_r - cd_r)W_r - ac f_r U_r + (3a^2 - 4cd) f_r V_r\}] / 2 a^2 b^2 \dots\dots\dots (61)$$

$$k_{G_{2,15}} = \{-abW_0 + \sum_2 (ad_r W_r - af_r U_r + 4df_r V_r)\} / 2 a^2 b \dots\dots\dots (62)$$

$$k_{G_{3,3}} = [-a^2 b U_0 - abdV_0 + \sum_3 \{(ad_r - a_r d) \cdot (aU_r + dV_r) - e^2 f_r W_r\}] / a^2 b^2 \dots\dots\dots (63)$$

$$k_{G_{3,7}} = \{abW_1 - \sum_3 (2cV_r - aU_r) f_r\} / ab^2 \dots\dots\dots (64)$$

$$k_{G_{3,8}} = [abdW_1 + \sum_2 \{a(aa_r - c_r d)W_r + ad f_r U_r + (3a^2 - 4cd) f_r V_r\}] / 2 a^2 b^2 \dots\dots\dots (65)$$

$$k_{G_{3,9}} = (U_0 - U_1) / 2b - (cV_0 + dV_1) / 2ab + \sum_3 [a(a_r d - ad_r + ac_r - a_r c)U_r + \{ab(d_r - d) + 2(ac_r - a_r c)d\}V_r + 2(a^2 - cd) f_r W_r] / 2a^2 b^2 \dots\dots\dots (66)$$

$$k_{G_{3,13}} = -k_{G_{9,13}} = (aW_2 + 2 \sum_3 f_r V_r) / ab \dots\dots\dots (67)$$

$$k_{G_{3,14}} = k_{G_{3,13}} d/a, k_{G_{9,14}} = k_{G_{3,13}} c/a \dots\dots\dots (68)$$

$$k_{G_{3,15}} = (2bV_0 - Z) / 2ab + \sum_3 \{a_r (aU_r + dV_r) + df_r W_r\} / a^2 b \dots\dots\dots (69)$$

$$k_{G_{8,8}} = \{bU_1 - \sum_2 (c_r U_r + a_r V_r)\} / b^2 \dots\dots\dots (70)$$

$$k_{G_{8,9}} = [abcW_1 - \sum_2 \{a(aa_r + cc_r)W_r - ac f_r U_r + (4l^2 - a^2) f_r V_r\}] / 2 a^2 b^2 \dots\dots\dots (71)$$

$$k_{G_{8,15}} = \{-abW_1 + \sum_2 (ac_r W_r + 4cf_r V_r - af_r U_r)\} / 2 a^2 b \dots\dots\dots (72)$$

$$k_{G_{9,9}} = [ab(aU_1 - cV_1) + \sum_3 \{(a_r c - ac_r) \cdot (aU_r - cV_r) - l^2 f_r W_r\}] / a^2 b^2 \dots\dots\dots (73)$$

$$k_{G_{9,15}} = (2bV_1 - Z) / 2ab - \sum_3 \{a_r (aU_r - cV_r) - cf_r W_r\} / a^2 b \dots\dots\dots (74)$$

$$k_{G_{14,15}} = -(aW_2 + 2 \sum_3 f_r V_r) / a^2 \dots\dots\dots (75)$$

$$k_{G_{15,15}} = \{aV_2 - \sum_3 (a_r V_r + f_r W_r)\} / a^2 \dots\dots\dots (76)$$

$$k_{G_{3,6i+6}} = -(aX_i + dY_i) / ab \dots\dots\dots (77)$$

$$k_{G_{9,6i+6}} = -(aX_i - cY_i) / ab \dots\dots\dots (78)$$

$$k_{G_{3,6k+3}} = -(aU_k + dV_k) / ab \dots\dots\dots (79)$$

$$k_{G_{9,6k+3}} = (aU_k - cV_k) / ab \dots\dots\dots (80)$$

ここに、 $\sum_j = \sum_{r=j}^n$ 、 $Z = \sum_0 Z_r$  である。

なお、本文での要素力、要素変形の設定により、各節点の相対有限変位挙動は均等ではなく、4節点要素の場合では、たとえば、節点0, 2, 3を固定し、節点1を可動として外力を作用させれば、要素剛性方程式にかかわらず、要素座標系は変化し、有限変位挙動となるのに対し

表-2 多節点要素の接線幾何剛性係数

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	6k+1	.....	6k+6			
1	$\frac{V_0}{b}$	*	0	0	0	0	$-\frac{V_0}{b}$	*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
2	*	*	$\frac{Y_0}{b}$	$-\frac{X_0}{b}$	0	$\frac{V_1}{b}$	*	*	$\frac{Y_1}{b}$	$-\frac{X_1}{b}$	0	$\frac{V_2}{b}$	$-\frac{U_2}{b}$	*	$\frac{Y_2}{b}$	$-\frac{X_2}{b}$	0	$\frac{V_k}{b}$	$-\frac{U_k}{b}$	0	$\frac{Y_k}{b}$	$-\frac{X_k}{b}$	
3	*	*	$\frac{Z_0}{b}$	$\frac{dZ_0}{ab}$	*	*	*	*	$\frac{Z_1}{b}$	$\frac{dZ_1}{ab}$	*	*	*	*	$\frac{Z_2}{b}$	$\frac{dZ_2}{ab}$	*	$\frac{W_k}{b}$	$\frac{dW_k}{ab}$	*	$\frac{Z_k}{b}$	$\frac{dZ_k}{ab}$	
						4	$-\frac{Y_0}{b}$	$-\frac{Z_0}{b}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
						5	$\frac{X_0}{b}$	$\frac{cZ_0}{ab}$	0	0	0	0	0	0	$-\frac{Z_0}{a}$	0	0	0	0	0	0	0	0
						6	0	*	0	0	0	0	0	$\frac{Y_0}{a}$	0	0	0	0	0	0	0	0	
						7	$-\frac{V_1}{b}$	*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
						8	*	*	$-\frac{Y_1}{b}$	$\frac{X_1}{b}$	0	$-\frac{V_2}{b}$	$\frac{U_2}{b}$	*	$-\frac{Y_2}{b}$	$\frac{X_2}{b}$	0	$-\frac{V_k}{b}$	$\frac{U_k}{b}$	0	$-\frac{Y_k}{b}$	$\frac{X_k}{b}$	
						9	*	*	$-\frac{Z_1}{b}$	$\frac{cZ_1}{ab}$	*	*	*	*	$-\frac{Z_2}{b}$	$\frac{cZ_2}{ab}$	*	$-\frac{W_k}{b}$	$\frac{cW_k}{ab}$	*	$-\frac{Z_k}{b}$	$\frac{cZ_k}{ab}$	
												11	$-\frac{Z_1}{a}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
												12	$\frac{Y_1}{a}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
																		14	*	0	0	0	
																		15	*	0	$-\frac{Z_2}{a}$	$\frac{Y_2}{a}$	
																				$-\frac{W_k}{a}$	$\frac{V_k}{a}$	0	
																					$-\frac{Z_k}{a}$	$\frac{Y_k}{a}$	

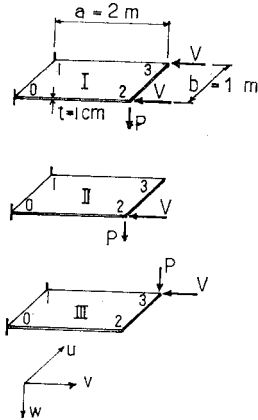


図-3

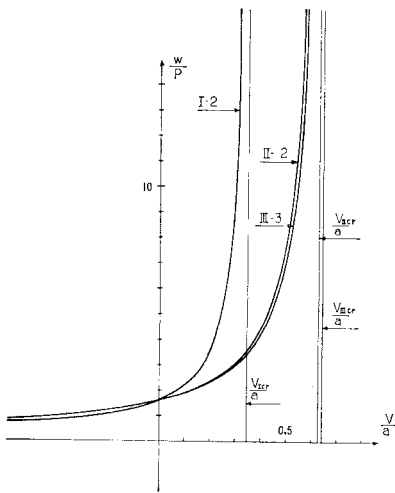


図-4

して、節点3を可動として他を固定した場合には、要素座標系は変化せず、要素剛性方程式で定められた挙動となる。図-4は、長方形要素の0, 1点を固定し、2, 3点の面内力  $V$  を変化させたときの線形解による面外変形を示したもので、要素剛性方程式は微小変形理論による。

すなわち、前述の幾何剛性の影響により、図-3のII, IIIの状態の2および3点のたわみは、 $V$ が大となるにつれ異なった値を示し、線形座屈力  $V_{cr}$  も約2.6%の差となるが、全体解析の場合には、力学モデルの要素分割精度に応じて、その影響は急激に減少するので、実用上はまったく問題とはならなくなる（なお、図-4の座標軸の単位は  $t/m$ ,  $E=21 \times 10^6 t/m^2$ ,  $\nu=0.25$  とした）。

### 5. 2 節点要素

直線または曲線棒部材など、両端2節点の連結によっ

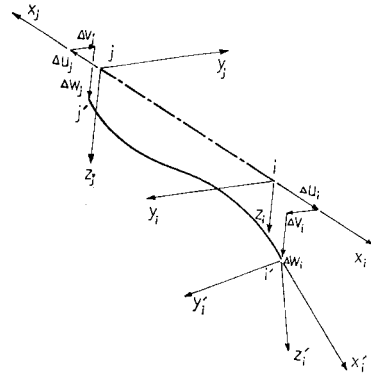


図-5

て構造物の構成要素となるもので、多節点要素のように節点の位置のみで要素座標系を設定することはできないが、2節点の相対有限変位挙動を均等化することが可能である。

#### (1) 要素座標系と適合条件

先行状態における要素の両端において、弦  $ij$  をそれぞれ第1軸とし、第1, 第2軸は逆向き、第3軸を同一方向とする2組の座標系  $\omega_i, \omega_j$  が先行要素座標系として定義されており、この座標系を要素端において要素に固定したと考えた場合の節点変位に伴って回転する座標系を要素端座標系とよび、その変形後の状態を  $\omega'_i, \omega'_j$  とする。

$$\omega_i = [x_i \ y_i \ z_i]^T, \quad \omega_j = [x_j \ y_j \ z_j]^T \dots (81)$$

$$\omega'_i = [x'_i \ y'_i \ z'_i]^T, \quad \omega'_j = [x'_j \ y'_j \ z'_j]^T \dots (82)$$

変形後の要素端座標系  $\omega'_i, \omega'_j$  は、もはや要素座標系の定義を満足せず、これらの座標系との対比において、要素変形を的確に表示するための変形後の新しい要素座標系の定義が必要となる（要素座標系として、一端に固定された座標系を定義し、剛体変位を拘束する仮想静定系として、一端固定の片持構造系を用いれば、変形後の要素座標系も自動的に定まり便利であるが、2節点の相対有限変位挙動が均等でなくなる）。

いま、先行状態における独立な要素力として

$N, T$ : 弦  $ij$  に関する引張力、ねじりモーメント  
 $M_{yi}, M_{yj}, M_{zi}, M_{zj}$ :  $y_i \sim z_j$  軸に関するモーメント

を定め、 $i$  端の要素座標系に関する移動変位ベクトル  $\Delta u_i$  および回転変位ベクトル  $\Delta x_i$  を

$$\Delta u_i = [\Delta u_i \ \Delta v_i \ \Delta w_i]^T, \quad \Delta x_i = [\Delta x_i \ \Delta y_i \ \Delta z_i]^T \dots (83)$$

とする。 $\omega_i$  から  $\omega'_i$  への回転は、その回転角を絶対値とする回転軸ベクトルが  $\Delta x_i$  となるので式 (16) より

$$\Phi_i = \frac{\Delta x_i \Delta x_i^T}{\Delta x_i^T \Delta x_i} (1 - \cos |\Delta x_i|) + e \cos |\Delta x_i| - \Delta x_i \times e \frac{\sin |\Delta x_i|}{|\Delta x_i|} \dots (84)$$

として座標変換マトリックス  $\Phi_i$  を求めることができる。

したがって、変形後の弦  $ij$  の  $\omega_i, \omega_i'$  系に関する方向余弦ベクトルを  $\alpha_i, \alpha_i'$  とすれば、弦長とその変化量を  $l, \Delta l$  として、

$$\alpha_i' = \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{bmatrix} = \Phi_i \alpha_i = \frac{\Phi_i}{l + \Delta l} \begin{bmatrix} l + \Delta u_i + \Delta u_j \\ \Delta v_i + \Delta v_j \\ \Delta w_i - \Delta w_j \end{bmatrix} \dots (85)$$

となり、この  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  を用いて、 $\omega_i'$  の第1軸を弦  $ij'$  と一致させる、 $x_i'$  と弦  $ij'$  とに直交する軸のまわりの回転により生じる座標系を  $\omega''$ 、その座標変換マトリックスを  $\Psi_i$  とすれば、式 (86) が得られる。

$$\omega_i'' = \Psi_i \omega_i' = \Psi_i \Phi_i \omega_i \equiv T_i \omega_i \dots (86)$$

なお、 $\Psi_i$  は、式 (19) の  $\Phi'$  を用いればよい。

ここにおいて、変形後の要素座標系を 図-6 のように、 $i'$  および  $j'$  端で第1軸が弦、すなわち  $x_i'', x_j''$  に共通、第3軸が  $z_i''$  と  $z_j''$  の中間方向となる座標系  $\tilde{\omega}_i (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i)$  および  $\tilde{\omega}_j (\tilde{x}_j, \tilde{y}_j, \tilde{z}_j)$  として設定することができる。

$z_i''$  と  $z_j''$  のなす角  $\Delta\varphi$  は

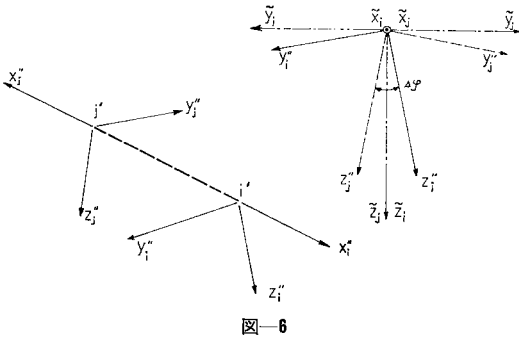


図-6

$$\begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \Delta v \Delta z_i - \Delta w \Delta y_i - (\Delta v^2 + \Delta w^2 + \Delta y_i^2 + \Delta z_i^2)/2 \\ \Delta v - \Delta u \Delta v - \Delta z_i + \Delta w \Delta x_i + \Delta x_i \Delta y_i / 2 \\ \Delta w - \Delta u \Delta w + \Delta y_i - \Delta v \Delta x_i + \Delta x_i \Delta z_i / 2 \end{bmatrix} \dots (93)$$

$$T_i = \begin{bmatrix} 1 & \Delta v & \Delta w \\ -\Delta v & 1 & \Delta x_i \\ -\Delta w & -\Delta x_i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Delta v^2 + \Delta w^2)/2 & \Delta u \Delta v & \Delta u \Delta w \\ -\Delta u \Delta v + \Delta w \Delta x_i & (\Delta v^2 + \Delta x_i^2)/2 & (\Delta v \Delta w - \Delta v \Delta y_i - \Delta w \Delta z_i)/2 \\ -\Delta u \Delta w - \Delta v \Delta x_i & (\Delta v \Delta w + \Delta v \Delta y_i + \Delta w \Delta z_i)/2 & (\Delta w^2 + \Delta x_i^2)/2 \end{bmatrix} \dots (94)$$

$T_j$  は、上式において  $i \rightarrow j, \Delta w \rightarrow -\Delta w$  とする。

$$\sin \Delta\varphi/2 = (\Delta x_i + \Delta x_j)/2 + (\Delta y_i + \Delta y_j) \Delta v/4 + (\Delta z_i - \Delta z_j) \Delta w/4 \dots (95)$$

$$\cos \Delta\varphi/2 = 1 - (\Delta x_i + \Delta x_j)^2/8 \dots (96)$$

ここで

$$\Psi_i^T \varphi^T = \begin{bmatrix} \alpha_i & m_1 & n_1 \\ \beta_i & m_2 & n_2 \\ \gamma_i & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \dots (97)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -\cos \Delta\varphi & \sin \Delta\varphi & \\ & \sin \Delta\varphi & \cos \Delta\varphi & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = T_i \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{bmatrix} T_j^T \dots (87)$$

より得られ、変形前後における要素座標系の関係は、次のようになる。

$$\varphi = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \cos \Delta\varphi/2 & -\sin \Delta\varphi/2 & \\ & \sin \Delta\varphi/2 & \cos \Delta\varphi/2 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \dots (88)$$

$$\tilde{\omega}_i = \varphi \Psi_i \omega_i' = \varphi T_i \omega_i \dots (89)$$

変形後の要素力の算出に必要な剛体回転成分を除いた回転変形ベクトル  $\Delta\theta_i$  (ねじれ角および弦に対するたわみ角) は、変形後の要素座標系  $\tilde{\omega}_i$  から変形後の要素端座標系  $\omega_i'$  への変換マトリックス  $\Psi_i^T \varphi^T$  より得られる回転ベクトルに等しく、式 (28)~(31) において、 $\alpha^T \alpha_0$  の代わりに  $\Psi_i^T \varphi$  を用いて  $r$  を求めれば、これが  $\Delta\theta_i$  となる。

## (2) 適合条件式の展開と接線幾何剛性マトリックス

ここでは、

$$\begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} \Delta \bar{u} \\ \Delta \bar{v} \\ \Delta \bar{w} \end{bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} \Delta u_i + \Delta u_j \\ \Delta v_i + \Delta v_j \\ \Delta w_i - \Delta w_j \end{bmatrix} \dots (90)$$

とき、適合条件式および各座標変換マトリックスについて変位の2次の項までを展開表示する。

$$\Delta l = \Delta \bar{u} + (\Delta \bar{v}^2 + \Delta \bar{w}^2)/2l \dots (91)$$

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} 1 & \Delta z & -\Delta y \\ -\Delta z & 1 & \Delta x \\ \Delta y & -\Delta x & 1 \end{bmatrix}_i - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta y^2 + \Delta z^2 & -\Delta x \Delta y & -\Delta x \Delta z \\ -\Delta x \Delta y & \Delta x^2 + \Delta z^2 & -\Delta y \Delta z \\ -\Delta x \Delta z & -\Delta y \Delta z & \Delta x^2 + \Delta y^2 \end{bmatrix}_i \dots (92)$$

とおけば、

$$m_1 = \Delta z_i - \Delta v + \Delta u \Delta v - (\Delta x_i - \Delta x_j) \Delta w/2 + \Delta x_j \Delta y_i/2 \dots (98)$$

$$m_2 = 1 - (\Delta x_i + \Delta x_j)^2/8 - (\Delta v - \Delta z_i)^2/2 \dots (99)$$

$$m_3 = -(\Delta x_i + \Delta x_j)/2 - (\Delta y_i + \Delta y_j) \Delta v/4 - (\Delta z_i - \Delta z_j) \Delta w/4 - (\Delta v - \Delta z_i) \cdot (\Delta w + \Delta y_i)/2 \dots (100)$$

$$n_1 = -\Delta y_i - \Delta w + \Delta u \Delta w + (\Delta x_i - \Delta x_j) \Delta v/2$$

表-3 2 節点要素の幾何剛性マトリックス

0	-V/l	-W <sub>i</sub> /l	0	0	0	0	-V/l	W <sub>i</sub> /l	0	0	0
-V/l	N/l	0	W <sub>i</sub>	T/2 l	0	-V/l	N/l	0	W <sub>j</sub>	T/2 l	0
-W <sub>i</sub> /l	0	N/l	-V <sub>i</sub>	0	T/2 l	W <sub>j</sub> /l	0	-N/l	V <sub>j</sub>	0	-T/2 l
0	W <sub>i</sub>	-V <sub>i</sub>	0	-M <sub>zi</sub> /4	M <sub>y<sub>i</sub></sub> /4	0	W <sub>i</sub>	V <sub>i</sub>	0	M <sub>z<sub>j</sub></sub> /4	-M <sub>y<sub>j</sub></sub> /4
0	T/2 l	0	-M <sub>zi</sub> /4	0	0	0	T/2 l	0	M <sub>zi</sub> /4	0	0
0	0	T/2 l	M <sub>y<sub>i</sub></sub> /4	0	0	0	0	-T/2 l	-M <sub>y<sub>i</sub></sub> /4	0	0
0	-V/l	W <sub>j</sub> /l	0	0	0	0	-V/l	-W <sub>j</sub> /l	0	0	0
-V/l	N/l	0	W <sub>i</sub>	T/2 l	0	-V/l	N/l	0	W <sub>j</sub>	T/2 l	0
W <sub>i</sub> /l	0	-N/l	V <sub>i</sub>	0	-T/2 l	-W <sub>j</sub> /l	0	N/l	-V <sub>j</sub>	0	T/2 l
0	W <sub>j</sub>	V <sub>j</sub>	0	M <sub>zi</sub> /4	-M <sub>y<sub>i</sub></sub> /4	0	W <sub>j</sub>	-V <sub>j</sub>	0	-M <sub>z<sub>j</sub></sub> /4	M <sub>y<sub>j</sub></sub> /4
0	T/2 l	0	M <sub>z<sub>j</sub></sub> /4	0	0	0	T/2 l	0	-M <sub>z<sub>j</sub></sub> /4	0	0
0	0	-T/2 l	-M <sub>y<sub>j</sub></sub> /4	0	0	0	0	T/2 l	M <sub>y<sub>j</sub></sub> /4	0	0

$$+ \Delta x_j \Delta z_j / 2 \dots \dots \dots (101)$$

$$n_2 = (\Delta x_i + \Delta x_j) / 2 + (\Delta y_i + \Delta y_j) \Delta v / 4 + (\Delta z_i - \Delta z_j) \Delta w / 4 - (\Delta v - \Delta z_i) \cdot (\Delta w + \Delta y_i) / 2 \dots \dots \dots (102)$$

$$n_3 = 1 - (\Delta x_i + \Delta x_j)^2 / 8 - (\Delta w + \Delta y_i)^2 / 2 \dots \dots (103)$$

となり、結局、要素端 i の要素回転変形の 2 次までの展開式が次のように求められる。

$$\begin{bmatrix} \Delta \theta_{xi} \\ \Delta \theta_{yi} \\ \Delta \theta_{zi} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2(\Delta x_i + \Delta x_j) + \Delta v(\Delta y_i + \Delta y_j) + \Delta w(\Delta z_i - \Delta z_j) \\ 4(\Delta w + \Delta y_i - \Delta u \Delta w) - 2 \Delta v \Delta x_i - (\Delta v - \Delta z_i)(\Delta x_i - \Delta x_j) \\ 4(\Delta z_i - \Delta v + \Delta u \Delta v) - 2 \Delta w \Delta x_i - (\Delta w + \Delta y_i)(\Delta x_i - \Delta x_j) \end{bmatrix} \dots \dots \dots (104)$$

したがって、先行要素力と要素変形増分によるポテンシャルエネルギー

$$A = \Delta l N + (\Delta \theta_{xi} + \Delta \theta_{xj}) T + \Delta \theta_{yi} M_{yi} + \Delta \theta_{yj} M_{yj} + \Delta \theta_{zi} M_{zi} + \Delta \theta_{zj} M_{zj} \dots \dots (105)$$

に式 (91), (104) を代入し、変位に関しての 2 回の微分により、先行状態の要素座標系に関する接線幾何剛性係数が得られることになる。すなわち

$$V = V_i = V_j = -(M_{zi} + M_{zj}) / l \dots \dots \dots (106)$$

$$W_i = -W_j = (M_{yi} - M_{yj}) / l \dots \dots \dots (107)$$

$$\bar{V}_i = (M_{zj} + 3 M_{zi}) / 4 l, \bar{V}_j = (M_{zi} + 3 M_{zj}) / 4 l \dots \dots \dots (108)$$

$$\bar{W}_i = (M_{yj} - 3 M_{yi}) / 4 l, \bar{W}_j = (M_{yi} - 3 M_{yj}) / 4 l \dots \dots \dots (109)$$

とおき、先行要素座標系に関する微小変位ベクトルを  $[\delta u_i \ \delta v_i \ \delta w_i \ \delta x_i \ \delta y_i \ \delta z_i \ \delta u_j \ \delta v_j \ \delta w_j \ \delta x_j \ \delta y_j \ \delta z_j]^T$  と配列する場合の接線幾何剛性マトリックスは、表-3 のようになる。

6. 計算例

図-7 のような、互いに直交する、長さ 10 m の 3 部材よりなる立体骨組（各部材中央に中間節点を有する 7 節点構造）について計算を行った。

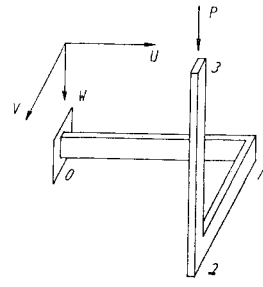


図-7

表-4 P=1 t

n	Δu	Δv	Δw	N	ΔF <sub>max</sub>	ΔM <sub>max</sub>
1	0.340 1	1.993 0	2.106 5	1528.75	2.101.598	9.922 92
2	0.330 2	1.771 6	2.270 8	-0.979 5	0.207 82	0.017 59
3	0.392 7	2.311 0	2.887 8	165.67	178.443	0.415 24
4	0.391 6	2.294 1	2.905 3	-0.964 9	0.010 66	0.000 50
5	0.390 4	2.292 8	2.901 7	-0.964 9	0	0

表-5 P=2 t

n	Δu	Δv	Δw	N	ΔF <sub>max</sub>	ΔM <sub>max</sub>
1	0.680 3	3.986 1	4.213 1	5 945.08	8 166.859	70.176
2	0.618 6	3.041 3	4.696 3	-1.854 2	1.275 66	0.236 98
3	0.836 0	4.977 0	7.864 9	3 438.46	3 569.889	29.165
4	0.795 3	4.512 3	8.077 1	-1.554 4	0.230 96	0.039 74
5	0.816 8	4.481 7	7.854 9	9.422 2	16.430	0.138 72
6	0.817 4	4.479 4	7.855 1	-1.572 3	0.000 71	0.000 39
7	0.820 7	4.478 6	7.854 2	-1.568 6	0.003 91	0.000 90
8	0.820 7	4.478 6	7.854 2	-1.572 5	0	0

表-6 P=3 t

n	Δu	Δv	Δw	N	ΔF <sub>max</sub>	ΔM <sub>max</sub>
1	1.020 4	5.979 1	6.319 6	12 817.35	17 609.915	214.137
2	0.846 1	3.816 3	7.037 5	-2.569 6	3.542 48	3.588 09
3	1.213 5	7.182 1	14.862 0	17 154.93	17 156.199	295.275
4	0.942 4	4.602 6	14.823 8	-1.197 3	4.515 84	2.214 82
5	0.975 7	5.060 0	13.512 0	287.51	512.129	5.348 35
6	0.973 3	4.994 7	13.492 2	-1.407 3	0.076 40	0.014 73
7	1.105 2	4.977 0	13.498 8	6.549 1	7.953 18	0.089 93
8	1.105 6	4.976 1	13.499 2	-1.404 1	0.000 10	0.000 47
9	1.105 7	4.976 0	13.499 2	-1.404 1	0.000 01	0.000 08
10	1.105 7	4.976 0	13.499 2	-1.404 1	0	0



各部材とも 120 cm×30 cm, 板厚 1 cm の鋼構造薄肉長方形断面で, 要素剛性は微小変位理論によるものを用いている。

表-4, 5, 6 は,  $P=1, 2, 3t$  をそれぞれ一時に載荷した場合の解の収束状況を, 反復回数  $n$ , 自由端の変位  $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ , 自由端の軸方向力  $N$ , 節点不平衡力の最大

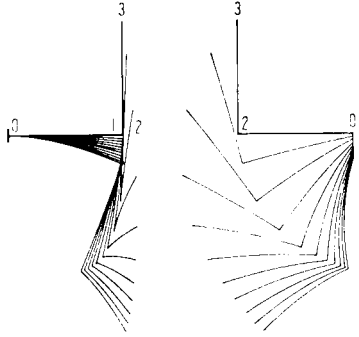


図-8

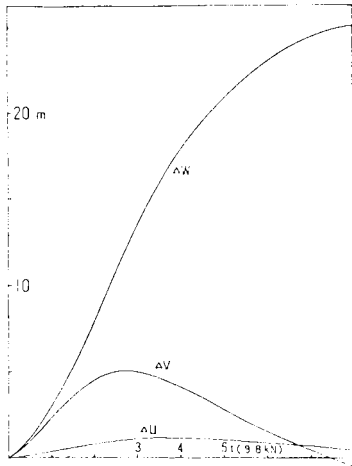


図-9

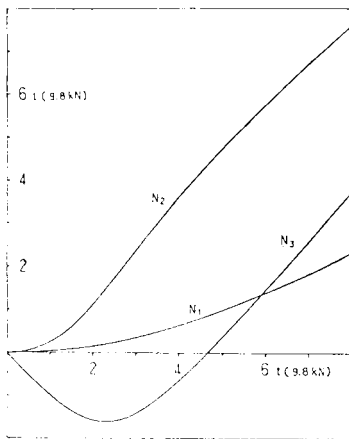


図-10

合力, 合モーメント  $\delta F_{max}, \delta M_{max}$  について示したもので, 単位は, m, t, t-m である。

図-8 は,  $P$  を 1t から 10t まで 1t (9.8 kN) ずつ逐次載荷した場合の変形を  $uw$  平面 (左),  $vw$  平面 (右) にそれぞれ投影した場合の図であり, 図-9 は, この間の自由端の変位, 図-10 は, 3部材の自由端に近い部分の軸方向力の推移を示したものである。

## 7. 結 言

接線剛性法の立体構造系への拡張のため, 1 節点 6 自由度の多節点要素および 2 節点要素について, 先行状態の要素座標系に関する 3 次元接線幾何剛性マトリックスの定式化を行った。

すなわち, 要素に剛体変位を拘束する静定な支点条件を想定したときの節点の可動変位と対応する節点力を要素変形と要素力と定め, 先行要素力と要素変形増分によるポテンシャルエネルギーの変位での微分演算により, 先行要素力と節点間寸法のみ関数として単純明解な接線幾何剛性係数を得ている。

本論文での方法により得られる接線幾何剛性係数は, 構成要素自体の性質 (要素変形と要素力との関係) とは完全に無関係であり, 節点数が同じ要素であれば, どのような要素にでも共通に用いることができ, 立体ブロック材などの数値積分による要素剛性と組み合わせての大変形解析など, 種々の応用が考えられる。

## 付録 A 3 節点要素の接線幾何剛性マトリックス

4 節点要素の場合の接線幾何剛性マトリックスを 6 行 6 列のサブマトリックスを用いて

$$k_G = \begin{bmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{30} & k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (a)$$

と表わすものとすれば, 3 節点要素の場合には,

$$a_3=0 \quad c_3=b \quad d_3=0 \quad f_3=0 \quad U_1=U_1+U_3$$

とにおいて

$$k_G = \begin{bmatrix} k_{00} & k_{01}+k_{03} & k_{02} \\ k_{10}+k_{30} & k_{11}+k_{13}+k_{31} & k_{12}+k_{32} \\ k_{20} & k_{21}+k_{23} & k_{22} \end{bmatrix} \dots\dots (b)$$

あるいは

$$a_3=a \quad c_3=c \quad d_3=d \quad f_3=0 \quad U_2=U_2+U_3$$

とにおいて

$$k_G = \begin{bmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02}+k_{03} \\ k_{01} & k_{11} & k_{12}+k_{13} \\ k_{20}+k_{30} & k_{21}+k_{31} & k_{22}+k_{23}+k_{32} \end{bmatrix} \dots\dots (c)$$

表一7 3 節点要素の接線幾何剛性係数

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	$\frac{V_0}{b}$	$\frac{W_0}{b}$	0	0	0	0	$-\frac{V_0}{b}$	$-\frac{W_0}{b}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	*	*	$\frac{Y_0}{b}$	$-\frac{X_0}{b}$	0	$\frac{V_1}{b}$	*	*	$\frac{Y_1}{b}$	$-\frac{X_1}{b}$	0	$\frac{V_2}{b}$	$-\frac{U_2}{b}$	*	$\frac{Y_2}{b}$	$-\frac{X_2}{b}$	0
3		*	$\frac{Z_0}{b}$	$\frac{dZ_0}{ab}$	*	$\frac{W_1}{b}$	*	*	$\frac{Z_1}{b}$	$\frac{dZ_1}{ab}$	*	$\frac{W_2}{b}$	$\frac{dW_2}{ab}$	*	$\frac{Z_2}{b}$	$\frac{dZ_2}{ab}$	*
						4	$-\frac{Y_0}{b}$	$-\frac{Z_0}{b}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
						5	$\frac{X_0}{b}$	$\frac{cZ_0}{ab}$	0	0	0	0	0	0	$-\frac{Z_0}{a}$	0	0
						6	0	*	0	0	0	0	0	$\frac{Y_0}{a}$	0	0	
						7	$-\frac{V_1}{b}$	$-\frac{W_1}{b}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
						8	*	*	$-\frac{Y_1}{b}$	$\frac{X_1}{b}$	0	$-\frac{V_2}{b}$	$\frac{U_2}{b}$	*	$-\frac{Y_2}{b}$	$\frac{X_2}{b}$	0
						9	*	$-\frac{Z_1}{b}$	$\frac{cZ_1}{ab}$	*	$-\frac{W_2}{b}$	$\frac{cW_2}{ab}$	*	$-\frac{Z_2}{b}$	$\frac{cZ_2}{ab}$	*	
												11	$-\frac{Z_1}{a}$	0	0	0	
												12	$\frac{Y_1}{a}$	0	0	0	
												14	$-\frac{W_2}{a}$	0	0	0	
												15	$\frac{V_2}{a}$	0	$-\frac{Z_2}{a}$	$\frac{Y_2}{a}$	

として求めることができる。もちろん式 (b), (c) は、結局同じものとなる。表一4 に3 節点要素の場合の先行要素座標系に関する接線幾何剛性係数について表示する。

表一7 において \* で示された係数は、以下のとおりである。

$$\begin{aligned}
 k_{G_{2,2}} &= -(bU_0 - dU_2 + aV_2)/b^2 \\
 k_{G_{2,3}} &= (bdW_0 - e^2W_2)/2ab^2 \\
 k_{G_{2,8}} &= (bU_0 + cU_2 + aV_2)/b^2 \\
 k_{G_{2,9}} &= \{bcW_0 + (a^2 - cd)W_2\}/2ab^2 \\
 k_{G_{2,15}} &= (dW_2 - bW_0)/2ab \\
 k_{G_{3,3}} &= -(aU_0 + dV_0)/ab \\
 k_{G_{3,6}} &= -(aX_0 + dY_0)/ab \\
 k_{G_{3,8}} &= \{bdW_1 + (a^2 - cd)W_2\}/2ab^2 \\
 k_{G_{3,9}} &= (aU_0 - aU_1 - cV_0 - dV_1)/2ab \\
 k_{G_{3,12}} &= -(aX_1 + dY_1)/ab \\
 k_{G_{3,15}} &= (2bV_0 - Z)/2ab \\
 k_{G_{3,18}} &= -(aX_2 + dY_2)/ab \\
 k_{G_{0,9}} &= (aX_0 - cY_0)/ab \\
 k_{G_{8,8}} &= (bU_1 - cU_2 - aV_2)/b^2 \\
 k_{G_{8,9}} &= (bcW_1 - l^2W_2)/2ab^2 \\
 k_{G_{8,15}} &= (cW_2 - bW_1)/2ab \\
 k_{G_{9,9}} &= (aU_1 - cV_1)/ab \\
 k_{G_{9,12}} &= (aX_1 - cY_1)/ab \\
 k_{G_{9,15}} &= (2bV_1 + Z)/2ab \\
 k_{G_{9,18}} &= (aX_2 - cY_2)/ab
 \end{aligned}$$

付録B 接線剛性法について

非線形構造解析において、既知先行状態よりの荷重増分(既知)と変位増分(未知)との関係を微小荷重増分と微小変位増分との関係、すなわち接線剛性方程式を利用して未知変位の近似解を求める。

次に構造物が、近似解のとおりの変形をしたものとして、得られた変位より適合条件を考慮して要素変形(部材変形)、要素力(部材力)さらに、これとつり合っている作用節点力を求め、この状態を新たな既知平衡状態と考える。

新たな平衡状態における作用節点力と本来作用していなければならない節点力(荷重)との差(不平衡力という)の逆向きの成分を新たな荷重増分と考えて前記の過程を繰り返せば、不平衡力はしだいに小さくなり、極限として正しい平衡状態に到達する。

この手法は、要素剛性方程式、適合条件および接線剛性方程式の確立が必要であるが、構造物の大変形挙動を表わす非線形の剛性方程式は不要となり、接線剛性が適合条件を正しく反映したものであれば、数学的な Newton-Raphson 法とまったく等価な反復過程を示すものとなる。

参考文献

- 1) 坂井藤一：薄肉断面部材の弾性安定基礎方程式の統一的誘導，土木学会論文報告集，No. 221, 1974.
- 2) 西野文雄・倉方慶夫・長谷川彰夫・奥村敏恵：軸力と曲げおよびねじりを受ける 藤肉断面部材，土木学会論文報

- 告集, No. 225, 1974.
- 3) 西野文雄・倉方慶夫・後藤芳顕：一軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位理論, 土木学会論文報告集, No. 237, 1975.
  - 4) 後藤・羽根・田中：接線剛性法による骨組構造物の大変形解析, 土木学会論文報告集, No. 238, 1975.
  - 5) 前田幸雄・林 正：立体骨組構造物の有限変位解析, 土木学会論文報告集, No. 253, 1976.
  - 6) 後藤茂夫：柔ケーブル材の接線剛性方程式について, 土木学会論文報告集, No. 270, 1978.
  - 7) 吉田 裕・増田陳紀・松田 隆：薄板で構成される立体構造の弾塑性・大変位離散化要素解析法, 土木学会論文報告集, No. 288, 1979.
  - 8) 平嶋政治・井浦雅司・依田照彦：初期曲率・ねじれ率を有する薄肉空間曲線部材の有限変位理論, 土木学会論文報告集, No. 292, 1979.
  - 9) 吉田 裕・増田陳紀・森本 剛・広沢規行：立体骨組構造の増分つり合い方程式とその解法, 土木学会論文報告集, No. 300, 1980.
  - 10) 阿井正博・西野文雄：離散化系の幾何学的非線形問題での力学的関係と平面骨組への適用, 土木学会論文報告集, No. 304, 1980.
  - 11) 土木学会編：構造力学公式集例題集, pp. 1~5, 1981.
  - 12) 阿井正博・西野文雄：離散化幾何学的非線形系での静定応答に関する数値解析について, 土木学会論文報告集, No. 320, 1982.

(1982.2.23・受付)