

## 選点法による回転殻の固有振動数の解析\*

### CALCULATION OF NATURAL FREQUENCIES OF SHELLS OF REVOLUTION BY THE COLLOCATION METHOD

三 上 隆\*\*・芳 村 仁\*\*\*

By Takashi MIKAMI and Jin YOSHIMURA

#### 1. はじめに

本研究は、回転殻の固有振動問題における固有振動数の一計算法として、選点法による実用的解法を提示するとともに、本手法の数値解析上の特性および任意形状の回転殻注1)への適用可能性について述べたものである。

殻の運動方程式は、空間座標と時間に関する高階微分方程式として与えられる。この高階微分方程式を解析的に解くことは、非常に困難となる場合が多く、通常は何らかの近似的手法に頼らざるを得ない。

FEM は、任意な形状かつ任意な境界条件の解析に適用するため多くの研究がなされ、今日では計算精度や曲面形状の適合性の向上を目指し、種々の曲面要素や曲線要素の開発がなされている<sup>1)~3)</sup>。しかし、上述の利点や、解法の明確さなどの長所を有する半面、要素細分割による大次元行列演算の必要性およびそれに伴う固有値計算上の精度の低下などの問題点もある。また、差分法の適用例がある<sup>4)</sup>。しかし、精度の向上のため格子間隔を小さくする必要があり、固行列の階数が高くなる難点がある。さらに、Holzer 法<sup>5), 6)</sup>や行列級数法<sup>7)</sup>による解析例がある。だが、これらの手法は、低次の方程式系を扱えばよい特長があるが、解法の過程に含まれる数値的不安定性には細心の注意が要求される。また、Rayleigh-Ritz 法や Galerkin 法による場合もあるが、自由の境界を含む問題ではどのような試行関数を用いるかなど問題もあり、また任意な形状として任意な境界条件への適用は容易でない。

さて、選点法による回転殻の自由振動に関する解析は

注1) 本研究では、殻厚や曲率など形状に不連続を有する殻や平面内の閉曲線をその平面の軸まわりに一回転してできる殻、たとえばトロイダル (Toroidal) 殻などは考えない。

\* 本研究の一部は、文献 22) に発表済みである。

\*\* 正会員 工修 北海道大学助手 工学部土木工学科

\*\*\* 正会員 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科

見当たらないようである。板問題に限ると最近の論文としては、たとえば水上・西岡<sup>8)</sup>の Legendre 多項式を用いた解析や、丹羽<sup>9)</sup>の積分方程式法による解析が挙げられる。

本論文は、前記の回転殻に対する近似解法の問題点に考慮を払い、選点法の薄肉回転殻の自由振動問題への適用性を検討したものである。選点法は解法それ自体は目新しいものでないが、回転殻の運動方程式の複雑さ、曲面形状の多様さ、さらには一端で指定できる境界条件(4つの同次境界条件式よりなる)の数の多さ注2)に注目すれば、その汎用解析を試みる時選点法は一つの有効な武器になり得るものと思われる。

本研究では、まず、振動数方程式が運動方程式と境界条件が与えられさえすれば、一定の規則に従って、比較的簡単な手続きで得られるよう定式化を行う。次に、種類の境界条件の円筒殻について、不伸長振動 (Inextensional vibration) も含む固有振動数解析を試み、本手法の数値解析上の特性を明らかにし、そして円錐殻、球殻および双曲殻を解析し、本手法の任意形状の回転殻への適用可能性の検討を行った。

なお、本報告では、単一の形状の殻のみ取り扱ったが形状の異なる殻が組み合わさった問題も、本手法の適用により解析できる<sup>23)</sup>。

#### 2. 殻の運動方程式と境界条件

運動方程式の誘導にあたっては、Novozhilov<sup>10)</sup>の殻理論を基礎とし、殻は等方等質な一様な厚さとした。運動方程式は、緯線方向フーリエ級数展開により、経線方向座標に関する微分方程式と得られる。以下双曲殻について導く。

注2) たとえば、円筒殻の自由端、単純支持および固定に対する条件として、一端で規定できる境界条件は全部で16通りである。

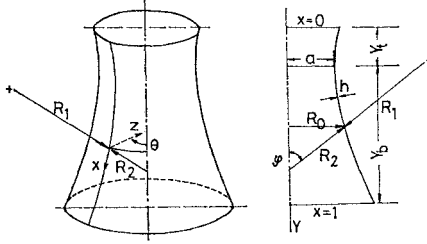


図-1 回転双曲殻

さて、回転双曲殻の幾何学的諸量 (図-1 参照) は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} R_0^2/a^2 - Y^2/c^2 &= 1 \\ R_1 &= -a^2c^2/\sqrt{(a^2\sin^2\varphi - c^2\cos^2\varphi)^3} \\ R_2 &= a^2/\sqrt{a^2\sin^2\varphi - c^2\cos^2\varphi} = R_0/\sin\varphi \\ \tan\varphi &= R_0c^2/(Ya^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1\cdot a\sim d)$$

ここに、 $R_0$  : 曲面上の任意点の半径、 $Y$  : のど厚部からの距離、 $a$  : のど厚半径、 $c$  : 曲率パラメーター、 $R_1$ ,  $R_2$  : 主曲率半径、 $\varphi$  : 経角である。

図-1 に示す座標系において、 $x$  軸方向 (経線方向)、 $\theta$  軸方向 (緯線方向)、 $z$  軸方向 (法線方向) の変位を、それぞれ  $u, v, w$  とし、さらに肉厚断面に生じる合応力および曲げモーメント成分を、それぞれ  $(N_x, N_\theta, N_{x\theta}, N_{\theta x}, Q_x, Q_\theta)$  および  $(M_x, M_\theta, M_{x\theta}, M_{\theta x})$  で表示する。

合応力と曲げモーメントの平衡方程式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} (R_0N_x)' + R_1N_{\theta x} - R_1N_\theta \cos\varphi - R_0Q_x - R_0R_1\rho hu^{**} &= 0 \\ (R_0N_{x\theta})' + R_1N_\theta' + R_1N_{\theta x} \cos\varphi - R_1Q_\theta \sin\varphi - R_0R_1\rho hv^{**} &= 0 \\ R_1N_\theta \sin\varphi + R_0N_x + R_1Q_\theta' + (R_0Q_x)' - R_0R_1\rho hw^{**} &= 0 \\ (R_0M_x)' + R_1M_{\theta x} - R_1M_\theta \cos\varphi - R_0R_1Q_x &= 0 \\ R_1M_\theta' + (R_0M_{x\theta})' + R_1M_{\theta x} \cos\varphi - R_0R_1Q_\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2\cdot a\sim e)$$

ここに、 $( )' = \partial( )/\partial\varphi$ ,  $( )^* = \partial( )/\partial\theta$ ,  $( )^{**} = \partial^2( )/\partial\varphi^2$ ,  $( )^{***} = \partial^3( )/\partial\varphi^3$ ,  $h$  : 肉厚、 $\rho$  : 単位体積当たりの質量、 $t$  : 時間。

ひずみと合応力、曲率と曲げモーメントの関係式は

$$\left. \begin{aligned} N_x &= K(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_\theta), \quad N_\theta = K(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_x) \\ N_{x\theta} &= N_{\theta x} = K(1-\nu)\varepsilon_{x\theta}/2 \\ M_x &= -D(\chi_x + \nu\chi_\theta), \quad M_\theta = -D(\chi_\theta + \nu\chi_x) \\ M_{x\theta} &= M_{\theta x} = -D(1-\nu)\chi_{x\theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3\cdot a\sim f)$$

である。ここに、 $K = Eh/(1-\nu^2)$ ,  $D = Eh^3/\{12(1-\nu^2)\}$ ,  $E$  : 弾性係数、 $\nu$  : ポアソン比。

一方、変位とひずみ、曲率の関係は次の式となる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= (u' - w)/R_1 \\ \varepsilon_\theta &= (u' \cos\varphi + v^* - w \sin\varphi)/R_0 \\ \varepsilon_{x\theta} &= v'/R_1 + (u^* - v \cos\varphi)/R_0 \\ \chi_x &= \{(w' + u)/R_1\}'/R_1 \\ \chi_\theta &= w''/R_2 + v^*/(R_0R_2) + w' \cos\varphi/(R_0R_1) \\ &\quad + u \cos\varphi/(R_0R_1) \\ \chi_{x\theta} &= (w'' + u'')/(R_0R_1) - w' \cos\varphi/R_0^2 \\ &\quad + v'/(R_1R_2) - v \cot\varphi/R_2^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4\cdot a\sim f)$$

ここで、以下の式の展開のため次式で定義される無次元量および演算子を導入する。

$$x = l/L, \quad ( )' = d( )/dx \dots\dots\dots(5\cdot a, b)$$

上式で、 $x$  : 経線に沿う領域  $[0, 1]$  の無次元化座標、 $l$  : 殻の上端からの経線の長さ、 $L$  : 経線の全長である。なお、式 (2)~(4) 中の独立変数  $\varphi$  の新たな変数  $x$  への変換は、経線に沿う  $\varphi$  の変化  $d\varphi$  と線素  $dl$  および  $R_0$  と  $\varphi$  の関係式

$$dl = R_1d\varphi, \quad \partial R_0/\partial\varphi = R_1 \cos\varphi \dots\dots\dots(6\cdot a, b)$$

に基づきなされる。今後、プライム ' は  $x$  に関する微分を表わす。

さて、変位  $u, v$  および  $w$  は、調和振動の前提のもとに、時間変数  $t$  を分離すると次式で表わされる。

$$\left\{ \begin{array}{l} u \\ v \\ w \end{array} \right\} = \sum_n \left\{ \begin{array}{l} hU_n(x) \cos n\theta \\ hV_n(x) \sin n\theta \\ hW_n(x) \cos n\theta \end{array} \right\} e^{i\omega t} \dots\dots(7\cdot a\sim c)$$

ここに、 $n$  : 円周方向波数、 $\omega$  : 固有円振動数、 $(U_n, V_n, W_n)$  : 無次元化変位関数。以後簡単のため  $U_n, V_n, W_n$  は、それぞれ  $U, V, W$  と略記する。

双曲殻の非減衰自由振動の方程式は、以上の諸式より無次元化常微分方程式として次のごとく得られる。

$$\left. \begin{aligned} L_{11}(U) + L_{12}(V) + L_{13}(W) - \lambda^2 U &= 0 \\ L_{21}(U) + L_{22}(V) + L_{23}(W) - \lambda^2 V &= 0 \\ L_{31}(U) + L_{32}(V) + L_{33}(W) - \lambda^2 W &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8\cdot a\sim c)$$

ここに、線形微分演算子  $L_{11}, \dots, L_{33}$  と固有振動数  $\lambda^2$  は次のようなものである。

$$\left. \begin{aligned} L_{11} &= a_1( )'' + a_2( )' + a_3 \\ L_{12} &= a_4( )' + a_5 \\ L_{13} &= a_6( )'' + a_7( )' + a_8( ) + a_9 \\ L_{21} &= a_{10}( )' + a_{11} \\ L_{22} &= a_{12}( )'' + a_{13}( )' + a_{14} \\ L_{23} &= a_{15}( )'' + a_{16}( )' + a_{17} \\ L_{31} &= a_{18}( )'' + a_{19}( )' + a_{20}( ) + a_{21} \\ L_{32} &= a_{22}( )'' + a_{23}( )' + a_{24} \\ L_{33} &= a_{25}( )'' + a_{26}( )' + a_{27}( ) \\ &\quad + a_{28}( ) + a_{29} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9\cdot a\sim i)$$

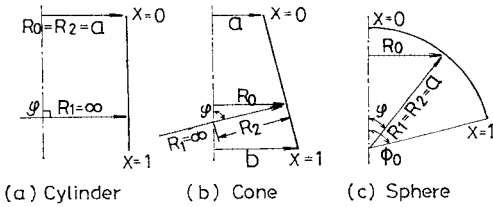


図-2 円筒殻, 円錐殻, 球殻の幾何学的特性

ここで,  $a_1, \dots, a_{29}$  は係数である.

$$\lambda^2 = \rho a^2 \omega^2 (1 - \nu^2) / E \dots \dots \dots (10)$$

式 (8) は双曲殻に対する変数係数の微分方程式で, その係数  $a_1, \dots, a_{29}$  は  $R_0, R_1, R_2, h, a, L, \varphi, \nu$  および  $n$  によって表わされるが, その詳細は省略する<sup>22)</sup>. 他の殻の方程式の係数は, 個々の殻で成立する平衡方程式, 合力および曲げモーメントと変位関係式を用いて導くか, または 図-2 に示す曲面の幾何学的特性を考慮すれば双曲殻の係数より得られる.

さて, 一般によく用いられる同次境界条件は, 次式の適当な組合せで与えられる.

$$\left. \begin{aligned} w=0 \text{ または } T_x=0 \\ \vartheta=0 \text{ または } M_x=0 \\ u=0 \text{ または } N_x=0 \\ v=0 \text{ または } S_{x\theta}=0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11 \cdot a \sim d)$$

ここに,  $\vartheta, T_x$  および  $S_{x\theta}$  はそれぞれ, 経線方向の回転角, 等価せん断力および等価接線力でありそれぞれ次の式で表わされる.

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= (u + \partial w / \partial \varphi) / R_1 \\ T_x &= Q_x + (\partial M_{x\theta} / \partial \theta) / R_0 \\ S_{x\theta} &= N_{x\theta} - M_{x\theta} / R_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12 \cdot a \sim c)$$

ここで,  $N_x, M_x, T_x$  および  $S_{x\theta}$  が零の条件を無次元化変位 ( $U, V, W$ ) で表わすと次のごとく得られる.

$$\left. \begin{aligned} N_x; b_1 U' + b_2 U + b_3 V + b_4 W = 0 \\ M_x; b_5 U' + b_6 U + b_7 V + b_8 W'' + b_9 W' + b_{10} W = 0 \\ S_{x\theta}; b_{11} U + b_{12} V' + b_{13} V + b_{14} W' + b_{15} W = 0 \\ T_x; b_{16} U'' + b_{17} U' + b_{18} U + b_{19} V' + b_{20} V + b_{21} W''' \\ \quad + b_{22} W'' + b_{23} W' + b_{24} W = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13 \cdot a \sim d)$$

ここに,  $b_1, \dots, b_{24}$  は双曲殻に対する係数である<sup>22)</sup>.

### 3. 選点法による自由振動問題の定式化

選点法は微分方程式の近似解に導入される未定係数を求めるための数値的手法であり, 重みつき残差法<sup>11)</sup>あるいは射影法<sup>12)</sup>の一つとして位置づけられている.

選点法を自由振動問題に適用すれば, 一般には未定係数を固有ベクトルとする線形方程式系が得られる. 本論文では, 固有ベクトルを試行関数の未定係数でなく, 領

域内に置かれた選点における解の値 (変位) で与えることにより数値計算の簡易化を図る. また, このような操作は, 後程説明するように計算誤差の混入を防ぐ役割も果たすものと思われる.

#### (1) 選点の選択

選点法による解の精度は, 選点の選択に大きく左右される. 今日では, 任意でなく直交多項式の零点とすることにより解の信頼性がますことは知られている<sup>11)</sup>. ここでは, 選点として区間  $[0, 1]$  で定義される直交多項式すなわち shifted Legendre 多項式  $P_M^*(x)$  と shifted Chebyshev 多項式  $T_M^*(x)$  の零点を採用する. なお, 零点は, 区間の端点近くで密に, 中央部では粗に分布する性質を有している.

さて, 多項式  $P_M^*(x), T_M^*(x)$  およびその零点  $x$  と Legendre 多項式  $P_M(X)$ , Chebyshev 多項式  $T_M(X)$  およびその零点  $X$  は, 次のような関係がある.

$$\left. \begin{aligned} P_M^*(x) &= P_M(1-2x) \\ T_M^*(x) &= T_M(2x-1) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14 \cdot a, b)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} P_M(X) &= \frac{1}{2^M \cdot M!} \frac{d^M}{dX^M} (X^2-1)^M \\ T_M(X) &= \cos(M \cdot \arccos X) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15 \cdot a, b)$$

そして,

$$x_i = (1 + X_i) / 2 \quad (i=1, 2, \dots, M) \dots \dots \dots (16)$$

#### (2) 自由振動問題の定式化

##### a) 定式化のための準備

殻の両端で規定される境界条件の数は 8 つである. この満足すべき境界条件の数を考慮にいれて, 変位関数  $U$  と  $V$  は  $M+1$  次,  $W$  は  $M+3$  次のべき級数で表わす.

$$\left. \begin{aligned} U &= \sum_{i=0}^{M1} c_i x^i, \quad V = \sum_{i=0}^{M1} d_i x^i \\ W &= \sum_{i=0}^{M3} e_i x^i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17 \cdot a \sim c)$$

ここに,  $x$  は変域  $[0, 1]$  であり,  $c_i, d_i$  と  $e_i$  は未知定数で総計  $3M+8$  個である. また,  $M$  を選点数とすると,  $M1=M+1, M3=M+3$  を表わす. 以下では  $Mj$  は次式を意味する.

$$Mj = M + j \quad (j = \text{整数}) \dots \dots \dots (18)$$

式 (17) は, 微分方程式も境界条件も満足しないが, 適用が容易であり特に変数係数の微分方程式や複雑な境界条件のとき好都合となる.

次に, 固有ベクトルを選点の変位で表わすための関係式を求める. 式 (17) で境界点 ( $x_0=0, x_{M1}=1$ ) と選点  $x_j (j=1, 2, \dots, M)$  での値を求めると次式となる.

$$\left. \begin{aligned} U &= Gc, V = Gd \\ W &= Ge_1 + He_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19 \cdot a \sim c)$$

ここに、 $c, d, e_1, e_2$  は試行関数の未定係数を成分とするベクトルで

$$\left. \begin{aligned} c &= \{c_0, c_1, \dots, c_{M_1}\}^T \\ d &= \{d_0, d_1, \dots, d_{M_1}\}^T \\ e_1 &= \{e_0, e_1, \dots, e_{M_1}\}^T \\ e_2 &= \{e_{M_2}, e_{M_3}\}^T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20 \cdot a \sim d)$$

であり、 $U, V, W$  は境界点と選点での値を成分とするベクトルで

$$\left. \begin{aligned} U &= \{U_0, U_1, \dots, U_{M_1}\}^T \\ V &= \{V_0, V_1, \dots, V_{M_1}\}^T \\ W &= \{W_0, W_1, \dots, W_{M_1}\}^T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21 \cdot a \sim c)$$

である。なお式 (21) で、たとえば  $U_j$  とは、 $j$  点すなわち  $x_j$  での  $U$  の値を表わす。

式 (19) の行列  $G$  と  $H$  は、それぞれ  $M_2 \times M_2, M_2 \times 2$  の大きさで、その成分は次式で与えられる。

$$G_{j,i} = x_j^{i-1}, H_{j,i} = x_j^{i-1} l \quad (i, j = 1, 2, \dots, M; l = 1, 2) \dots\dots\dots (22 \cdot a, b)$$

なお、行列  $G$  は補間型数値積分則に関係づけられる<sup>21)</sup>。これについては、付録 1 を参照されたい。

さて、式 (7) に現われる高階導関数は、 $U$  は 3 階、 $V$  は 2 階、 $W$  は 4 階である。このことに留意して、式 (17) を微分し境界点と選点での値を求める。たとえば、 $W$  については次式で与えられる。

$$W^{(r)} = \bar{A}^{(r)} e_1 + \bar{B}^{(r)} e_2 \quad (r = 1 \sim 4) \dots\dots\dots (23)$$

ここに、記号  $(r)$  は  $r$  回微分を表わし、 $W^{(r)}$  は境界点と選点での  $r$  回微分の値を成分とするベクトルで、次式で表わされる。

$$W^{(r)} = \{W_0^{(r)}, W_1^{(r)}, \dots, W_{M_1}^{(r)}\}^T \dots\dots\dots (24)$$

ここに、 $W_i^{(r)}$  は点  $x_i$  での  $W^{(r)}$  の値を表わす。

式 (23) の行列  $\bar{A}^{(r)}$  と  $\bar{B}^{(r)}$  は、それぞれ  $M_2 \times M_2, M_2 \times 2$  の大きさで、その成分は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_{j,i}^{(1)} &= (i-1)x_j^{i-2} \\ \bar{A}_{j,i}^{(2)} &= (i-1)(i-2)x_j^{i-3} \\ \bar{A}_{j,i}^{(3)} &= (i-1)(i-2)(i-3)x_j^{i-4} \\ \bar{A}_{j,i}^{(4)} &= (i-1)(i-2)(i-3)(i-4)x_j^{i-5} \end{aligned} \right\} \quad (j, i = 1, 2, \dots, M_2) \dots\dots\dots (25 \cdot a \sim d)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{B}_{j,i}^{(1)} &= (K+1)x_j^{K-1} \\ \bar{B}_{j,i}^{(2)} &= K(K+1)x_j^{K-2} \\ \bar{B}_{j,i}^{(3)} &= K(K^2-1)x_j^{K-3} \\ \bar{B}_{j,i}^{(4)} &= K(K^2-1)(K-2)x_j^{K-4} \end{aligned} \right\} \quad (K = M+l; l = 1, 2; j = 1, 2, \dots, M_2) \dots\dots\dots (26 \cdot a \sim d)$$

式 (19 \cdot c) を  $e_1$  について解き、式 (23) に代入すると、 $W^{(r)}$  は境界点と選点での変位を成分とするベクトル  $W$  に結びつけられ次のようになる。

$$W^{(r)} = A^{(r)} W + B^{(r)} e_2 \quad (r = 1 \sim 4) \dots\dots\dots (27)$$

ここに、行列  $A^{(r)}$  と  $B^{(r)}$  は、それぞれ  $M_2 \times M_2, M_2 \times 2$  の大きさで、次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} A^{(r)} &= \bar{A}^{(r)} G^{-1} \\ B^{(r)} &= \bar{B}^{(r)} - A^{(r)} H \end{aligned} \right\} \quad (r = 1 \sim 4) \dots\dots\dots (28 \cdot a, b)$$

同様に変位関数  $U$  と  $V$  について、式 (27) に類似なものを求めると次式となる。

$$\left. \begin{aligned} U^{(k)} &= A^{(k)} U \quad (k = 1 \sim 3) \\ V^{(l)} &= A^{(l)} V \quad (l = 1, 2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29 \cdot a, b)$$

ここに、行列  $A^{(k)}$  は式 (28 \cdot a) で与えられ、 $U^{(k)}$  と  $V^{(l)}$  は、それぞれ境界点と選点での  $k, l$  回微分の値を成分とするベクトルで、 $U^{(k)} = \{U_0^{(k)}, U_1^{(k)}, \dots, U_{M_1}^{(k)}\}^T, V^{(l)} = \{V_0^{(l)}, V_1^{(l)}, \dots, V_{M_1}^{(l)}\}^T$  である。

次項では、式 (28) で与えられた行列  $A^{(r)}$  と  $B^{(r)}$  を用い自由振動問題の定式化を試みる。

**b) 振動数方程式の誘導**

すでに述べたが、未知量の総数は  $3M+8$  個である。さて、変位関数 ( $U, V, W$ ) を殻の運動方程式 (8) に代入すると、次式で定義される残差  $R$  が生じる。

$$\left. \begin{aligned} R_U(x) &= L_{11}(U) + L_{12}(V) + L_{13}(W) - \lambda^2 U \\ R_V(x) &= L_{21}(U) + L_{22}(V) + L_{23}(W) - \lambda^2 V \\ R_W(x) &= L_{31}(U) + L_{32}(V) + L_{33}(W) - \lambda^2 W \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30 \cdot a \sim c)$$

$3M$  個の条件は、領域内における  $M$  個の選点で、条件  $R=0$  を課することで得られる。これらの条件は、ディラックのデルタ関数を用いれば次のように表現される。

$$\int_0^1 R_S(x) \delta(x-x_j) dx = R_S(x_j) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, M; S = U, V, W) \dots\dots\dots (31)$$

ここで、 $S=U$  すなわち  $R_U(x_j)=0$  を考えてみる。式 (30 \cdot a) の  $R_U(x)$  に現われる導関数 (式 (9) 参照) に応じ、式 (28) の行列  $A^{(r)}$  と  $B^{(r)}$  を用いと次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{M_2} (a_1 A_{k,i}^{(2)} + a_2 A_{k,i}^{(1)}) U_{i-1} + a_3 U_j \\ & + \sum_{i=1}^{M_2} a_4 A_{k,i}^{(1)} V_{i-1} + a_5 V_j \\ & + \sum_{i=1}^{M_2} (a_6 A_{k,i}^{(3)} + a_7 A_{k,i}^{(2)} + a_8 A_{k,i}^{(1)}) \\ & \times W_{i-1} + a_9 W_j \\ & + \sum_{i=1}^2 (a_6 B_{k,i}^{(3)} + a_7 B_{k,i}^{(2)} + a_8 B_{k,i}^{(1)}) e_{M_1+i} \\ & - \lambda^2 U_j = 0 \quad (k = j+1; j = 1, 2, \dots, M) \end{aligned} \dots\dots\dots (32)$$

ここに、 $A_{k,j}^{(l)}, B_{k,l}^{(l)}$  は、それぞれ行列  $A^{(l)}, B^{(l)}$  の成分を表わす、なお、式 (32) は定数係数として求めた。

同様に、式 (31) の  $S=V, W$  に対しても式 (32) に

類似なものが得られる。ここで、式 (31) から得られる条件を選点における未知ベクトル  $\delta_1$  と他の未知ベクトル  $\delta_2$  に分離し行列表示すると次式となる。

$$\alpha_1 \delta_1 + \alpha_2 \delta_2 - \lambda^2 \delta_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (33)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \{U_1, U_2, \dots, U_M, V_1, V_2, \dots, \\ &\quad V_M, W_1, W_2, \dots, W_M\}^T \\ \delta_2 &= \{U_0, U_{M1}, V_0, V_{M1}, W_0, W_{M1}, \\ &\quad e_{M2}, e_{M3}\}^T \end{aligned}$$

であり、行列  $\alpha_1, \alpha_2$  はそれぞれ、 $3M \times 3M, 3M \times 8$  の大きさで、前出の行列  $A^{(1)}, B^{(1)}$  の成分で構成される。

残り 8 個の条件は、殻の両端で規定される境界条件で与えられる。そのうち、たとえば  $x_0=0$  で  $N_x=0, x_{M1}=1$  で  $M_x=0$  の 2 つの条件を考えてみる。式 (13・a), (13・b) と式 (28) より次のように得られる。

$x_0=0$  で  $N_x=0$  のとき;

$$b_1 \sum_{i=1}^{M2} A_{1,i}^{(1)} U_{i-1} + b_2 U_0 + b_3 V_0 + b_4 W_0 = 0 \quad \dots\dots\dots (34)$$

$x_{M1}=1$  で  $M_x=0$  のとき;

$$\begin{aligned} &b_5 \sum_{i=1}^{M2} A_{M2,i}^{(1)} U_{i-1} + b_6 U_{M1} + b_7 V_{M1} \\ &+ \sum_{i=1}^{M2} (b_8 A_{M2,i}^{(2)} + b_9 A_{M2,i}^{(1)}) W_{i-1} + b_{10} W_{M1} \\ &+ \sum_{i=1}^2 (b_8 B_{M2,i}^{(2)} + b_9 B_{M2,i}^{(1)}) e_{M1+i} = 0 \quad \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

さて、殻の両端で規定される 8 個の条件を、式 (33) に習い行列表示すると次のようになる。

$$\beta_1 \delta_1 + \beta_2 \delta_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (36)$$

ここに、行列  $\beta_1$  と  $\beta_2$  はそれぞれ、 $8 \times 3M, 8 \times 8$  の大きさで、行列  $A^{(1)}, B^{(1)}$  の成分などで構成される。

式 (33) と式 (36) より  $\delta_2$  を消去すれば、殻の自由振動問題は、選点の変位を固有ベクトルとする次の形の固有値問題に帰着する注 3)。

$$\alpha \delta_1 = \lambda^2 \delta_1 \quad \dots\dots\dots (37)$$

ここに、固有行列  $\alpha$  は、大きさ  $3M \times 3M$  の非対称行列で次式で与えられる。

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 \beta_2^{-1} \beta_1 \quad \dots\dots\dots (38)$$

式 (37) は、現象を支配する微分方程式と境界条件が与えられさえすれば、式 (28) で与えられた行列  $A^{(1)}$  と  $B^{(1)}$  により容易に導かれるものであり、汎用解析プロ

グラムの開発が可能である。

#### 4. 数値計算例

##### (1) 円筒殻を例としての精度の検討

解の精度は、おもに選点の選び方と選点数に左右される。本節では、両端固定、両端自由および固定-自由の円筒殻を解析し、厳密解<sup>14)</sup>との比較により本手法の数値解析上の特性を明らかにする。すなわち shifted Legendre 多項式と shifted Chebyshev 多項式の零点を選点(以下、それぞれ L-選点、C-選点と記す)とするときの解の精度および選点数と解の収束性の検討を行い、十分な精度を得るための実用的な選点数を明らかにする。

数値例は  $\nu=0.3, h/a=0.01, L/a=2.16$  とし、固定および自由の条件(以下、それぞれ C, F と記す)は次式を用いた。

$$\left. \begin{aligned} &C; U=V=W=W'=0 \\ &F; N_x=M_x=T_x=S_{x0}=0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (39 \cdot a, b)$$

表-1(a) 両端固定円筒殻の解 ( $10 \omega a \sqrt{\rho/E}$ ) の収束性

M	m=2, n=6		m=3, n=8		m=4, n=7	
	L-選点	C-選点	L-選点	C-選点	L-選点	C-選点
8	2.639	2.643	3.631	3.655	4.922	4.934
9	2.634	2.632	3.613	3.611	4.980	4.997
10	2.634	2.633	3.610	3.609	4.958	4.951
11	2.633	2.633	3.610	3.610	4.961	4.961
12	2.634	2.634	3.610	3.610	4.961	4.961
厳密解	2.634	2.634	3.610	3.610	4.961	4.961

表-1(b) 固定-自由円筒殻の解 ( $10 \omega a \sqrt{\rho/E}$ ) の収束性

M	m=1, n=1		m=4, n=7		m=5, n=6	
	L-選点	C-選点	L-選点	C-選点	L-選点	C-選点
8	2.634	2.635	3.984	3.999	5.711	5.695
9	2.633	2.633	3.973	3.973	5.781	5.804
10	2.633	2.632	3.972	3.972	5.758	5.757
11	2.633	2.633	3.972	3.972	5.761	5.763
12	2.633	2.633	3.972	3.973	5.762	5.762
厳密解	2.633	2.633	3.972	3.972	5.762	5.762

表-1(c) 両端自由円筒殻の解 ( $10 \omega a \sqrt{\rho/E}$ ) の収束性

M	m=3, n=8		m=4, n=7		m=5, n=6	
	L-選点	C-選点	L-選点	C-選点	L-選点	C-選点
8	2.230	2.230	2.931	2.933	4.758	4.772
9	2.230	2.230	2.932	2.932	4.744	4.745
10	2.230	2.230	2.932	2.932	4.744	4.744
11	2.230	2.230	2.932	2.932	4.744	4.744
12	2.230	2.230	2.932	2.932	4.744	4.744
厳密解	2.230	2.230	2.932	2.932	4.744	4.744

注 3) 未定定数を固有ベクトルにとれば、 $AX=\lambda^2 BX$  ( $A, B$  は非対称行列) の形となる。 $B^{-1}$  を前から乗ざると式 (37) のタイプとなるが、 $B$  のサイズが大きくなると  $B^{-1}A$  の作成に誤差が入り固有値などの算出に悪影響を及ぼす危険が増す。 $B^{-1}$  を用いないアルゴリズムも開発されているが、行列の対称性や正値性を前提とするもので、この種の形の固有値問題にはそのまま適用できないようである<sup>15)</sup>。

表-2(a) 両端固定円筒殻の 1~6 次固有振動数  
( $10 \omega \alpha \sqrt{\rho/E}$ ),  $M=11$

n		m					
		1	2	3	4	5	6
2	厳密解	3.664	6.524	8.188	9.006	9.499	9.895
	L-選点	3.663	6.524	8.188	9.006	9.499	9.918
	C-選点	3.663	6.524	8.188	9.006	9.500	9.941
4	厳密解	1.852	3.726	5.551	6.966	8.008	8.824
	L-選点	1.852	3.725	5.551	6.966	8.004	8.877
	C-選点	1.852	3.725	5.552	6.967	8.001	8.924

表-2(b) 固定-自由円筒殻の 1~6 次固有振動数  
( $10 \omega \alpha \sqrt{\rho/E}$ ),  $M=11$

n		m					
		1	2	3	4	5	6
1	厳密解	2.633	6.943	8.743	9.450	9.624	9.877
	L-選点	2.633	6.943	8.743	9.450	9.624	9.877
	C-選点	2.633	6.943	8.743	9.450	9.624	9.877
	E-選点	2.730	7.040	8.720	9.377	9.625	
	FEM(8)	2.639	6.997	8.793	9.528	9.741	10.041
5	厳密解	0.779	1.670	3.381	5.065	6.464	7.564
	L-選点	0.779	1.670	3.381	5.065	6.464	7.569
	C-選点	0.779	1.669	3.381	5.065	6.465	7.558
	E-選点	0.740	1.633	3.424	5.066	6.274	
	FEM(8)	0.783	1.735	3.594	5.472	7.028	8.215

表-2(c) 両端自由円筒殻の 3~7 次固有振動数  
( $10 \omega \alpha \sqrt{\rho/E}$ ),  $M=11$

n		m				
		3	4	5	6	7
2	厳密解	5.721	7.760	8.846	9.314	9.695
	L-選点	5.721	7.760	8.846	9.314	9.695
	C-選点	5.720	7.760	8.846	9.315	9.969
4	厳密解	2.503	4.783	6.509	7.664	8.501
	L-選点	2.503	4.783	6.509	7.666	8.484
	C-選点	2.503	4.783	6.509	7.668	8.476

表-1(a)~(c) に、選点数  $M$  を 8, 9, ..., 12 と変化させた際の固有振動数を、円周方向波数  $n$  と軸方向モード次数  $m$  の種々の組合せに対して示す。低次固有振動数は選点数  $M$  の影響をほとんど受けないが、高次では  $M$  を増す必要がある。また、選点数  $M$  が小さいときは、L-選点による方が、解の精度は幾分良好である。

表-2(a)~(c) に、選点数  $M=11$  による固有振動数を、条件 C-C と C-F はモード次数  $m=6$  まで、条件 F-F は  $m=7$  まで示す。本計算値は高次で厳密解との差が認められるが、ほぼ 1% 以内の相対誤差である。なお、条件 F-F では  $m=1, 2$  の値が抜けている。この値は不伸長振動解に相当するもので、次節で検討する。

表-2(b) には、FEM (リング要素) の 8 等分割と等間隔選点 (表では E-選点と記した) による結果も併記した。FEM 8 分割の固有行列の大きさは、選点数 10,

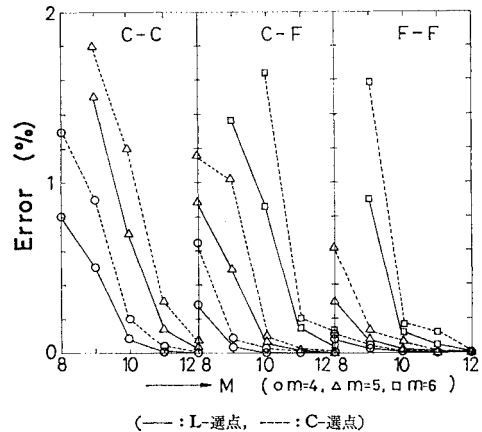


図-3 厳密解に対する相対誤差の最大値

11 のときにほぼ等しいが、厳密解に対する相対誤差は 9% に達する場合もある。一方、等間隔選点による結果も、L, C-選点によるそれに比べてきわめて精度が低下している。表で空白の箇所は、複素固有値で得られたものである。これは、固有行列  $\alpha$  の性質の悪さに起因すると思われ、選点に直交多項式の零点を採用する有効性を示すものと思われる。

図-3 に、円周方向波数  $n=0, 1, \dots, 8$  とし求めた 4~6 次固有振動数の厳密解に対する相対誤差の最大値を、境界条件ごとに図示した。精度は条件 F-F, C-F, C-C の順に悪化している。選点数が小さければ L-選点による方が精度は良好であるが、選点数を増せばいずれの選点を用いても大きな差は生じていない。また、5 ないし 6 次固有振動数を 1% 以内の誤差で求めるには、選点数  $M$  が 10 ないし 11 で十分であることがわかる。

図-3 に示したように解の精度は境界条件によって変化し、条件 F-F が良好であった。これは、固有値とそれに対応する領域内の選点での変位モード値 ( $U, V, W$ ) を決定する本手法において、境界点近傍で密な選点の果たす役割 (境界点近傍の変位モード値に関する情報の不足を是正する役割) が、境界点で変位関数値 ( $U, V, W$ ) が規定されない自由条件に対して効果的に発揮することによるものと思われる。以上のように、本手法による解の誤差は、境界条件が物理量 ( $N_x, M_x, T_x, S_{x\theta}$ ) で指定される時小さく、変位量 ( $U, V, W, W'$ ) で指定される時大きくなる予想される。しかし、本手法の適用によって生じる誤差は、数値例が示すように、実用上は問題とならないと思われる。

なお、ここで得られた数値解析上の特性は、最も基本的な形状の円筒殻 (定数係数の微分方程式) に対して得られたものであるが、本手法を他の形状の殻 (変数係数の微分方程式) に適用する際の一応の目安になるものと思われる。

表-3 両端自由の円筒殻の不伸長振動解  
( $10 \omega a \sqrt{\rho/E}$ ),  $M=11$

m	解 法	n					
		2	3	4	5	6	7
1	式 (40・a)	0.081	0.230	0.440	0.712	1.045	1.438
	選点法	0.081	0.229	0.439	0.709	1.041	1.433
2	式 (40・b)	0.105	0.268	0.485	0.760	1.095	1.480
	選点法	0.109	0.269	0.484	0.756	1.089	1.480

表-4 単純支持-自由の円筒殻の不伸長振動解  
( $10 \omega a \sqrt{\rho/E}$ ),  $M=11$

m	解 法	n					
		2	3	4	5	6	7
1	式 (41)	0.088	0.240	0.452	0.725	1.057	1.451
	選点法	0.089	0.239	0.451	0.722	1.054	1.446

$$\omega^2 = \omega_1^2 \frac{1+6(1-\nu)a^2/(L^2n^2)}{1+3a^2/\{L^2(n^4+n^2)\}} \dots\dots\dots (41)$$

上式で、 $\omega_1^2$  は式 (40・a) で与えられる。

表-4 に、L-選点、選点数  $M=11$  による結果と式 (41) の結果を示す。これによれば、本計算値と Rayleigh 法による値との差はわずかであることがわかる。

以上の数値例が示すように、本計算値は、不伸長変形モードを仮定することなく、一般的な殻理論より得られるものであり本手法の有効性が理解されよう。

(3) 任意形状の回転殻への適用性

本手法の任意形状の回転殻への適用性の検討を目的とし、球殻、円錐殻および双曲殻を取り扱う。以下では、本手法の特長を明らかにするためおもに球殻について詳述することにし、計算は L-選点によった。

a) 球 殻

頂点が閉じた球殻では、特異点となる頂点近傍の扱いに種々の工夫がなされている。たとえば Holzer 法による場合<sup>9)</sup>では、頂点まわりにおける級数解が、リング要素を用いた FEM では<sup>10)</sup>頂点を含む特殊要素が用いられている。また、解析解による場合では、数値計算上の困難さや固有振動数の見落としが指摘されている<sup>10)</sup>。本手法は、頂点で成立する制約条件を一端における境界条件として課するだけで何ら特別な工夫も要せず、また最も留意すべき選点の配置も自動的になされるなど、きわめて直接的な解析が可能である。なお、頂点での制約条件は次式である<sup>11)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} n=0; U=V=W'=M_x'=0 \\ n=1; U+V=W=U'=M_x=0 \\ n \geq 2; U=V=W=W'=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (42 \cdot a \sim c)$$

表-5 に、端部固定、半開角  $\phi_0=5^\circ, 30^\circ, 90^\circ$  に対する基本固有振動数を示す。なお、 $h/a=0.01, \nu=0.3$  である。波数  $n=0, 1, 2$  に対し、種々の選点数で求めたが、いずれの  $M$  に対しても一定値をとっている。本計算値と Holzer 法の解<sup>9)</sup>との差異は、半開角  $\phi_0$  が小さいとき認められるが ( $\phi_0=5^\circ$  のとき 1.5%)、 $\phi_0$  の増加とともにわずかとなる。なお、頂点まわりに級数解を用いた Holzer 法の解は厳密解でないので、両手法の良否を論ずることはできないが、本手法の偏平球殻への適用可能性がうかがわれる。

(2) 円筒殻の不伸長振動

前節で述べたように両端自由な境界条件に対する 1, 2 次固有振動数 ( $\omega_1, \omega_2$ ) は、不伸長振動解に相当する。ここでは、本計算値と不伸長理論<sup>15)</sup>に基づく結果の比較を行う。

条件 F-F に対する不伸長振動解 ( $\omega_1, \omega_2$ ) は、軸方向に一樣な、および直線変化する変形の形式を表わす変位関数の仮定のもとで、Rayleigh 法により次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \omega_1^2 &= A(n^2-n)^2/(n^2+1) \\ \omega_2^2 &= \omega_1^2 \frac{1+24(1-\nu)a^2/(L^2n^2)}{1+12a^2/\{L^2(n^4+n^2)\}} \end{aligned} \right\} \dots (40 \cdot a, b)$$

ここに、 $A=Eh^2/\{12 \rho a^4(1-\nu)\}$

表-3 に、L-選点、選点数  $M=11$  による本計算値と Rayleigh 法の結果を円周方向波数  $n=2 \sim 7$  に対して示す。両者ともよく一致していることがわかる。図-4 に、本手法による変形モードを、波数  $n=2, 4, 6$  に対して示す。軸方向モード次数  $m=1$  では軸方向に一樣なモード (図の下半分に示す) を、 $m=2$  では軸方向に線形に変化するモードを近似的であるが示している。

次は、境界条件が自由-単純支持への適用例である。単純支持の条件は  $N_x=M_x=U=W=0$  とした。Rayleigh 法による解は、軸方向に直線変化する変形モードを仮定すると、次のように得られる。

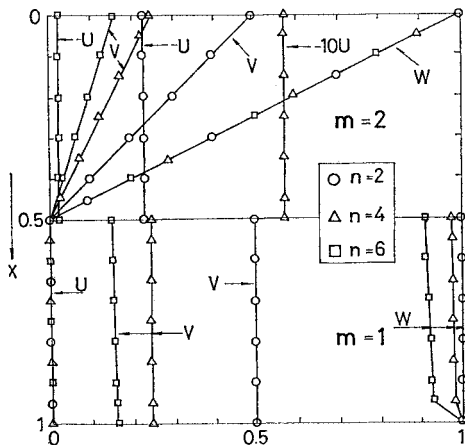
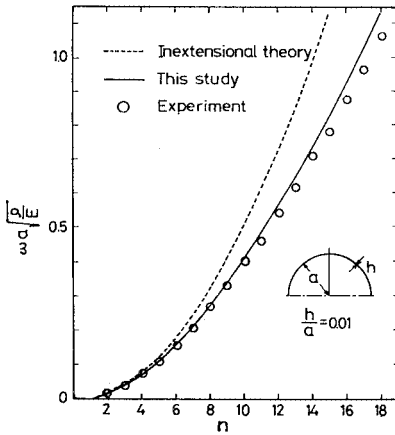


図-4 両端自由の円筒殻のモード (不伸長振動)

表一 球殻の基本固有振動数 ( $\omega a \sqrt{\rho/E}$ )

$\phi_0$	$n$	Holzer 法 <sup>9)</sup>	選点法			
			$M=9$	$M=10$	$M=11$	$M=12$
5°	0	4.312	4.292	4.292	4.292	4.292
	1	8.605	8.506	8.506	8.506	8.506
	2	14.115	13.893	13.893	13.393	13.893
	3	20.616	20.303	20.303	20.303	20.303
30°	0	1.047	1.047	1.047	1.047	1.047
	1	1.052	1.051	1.051	1.051	1.051
	2	1.108	1.106	1.106	1.106	1.106
	3	1.183	1.181	1.181	1.181	1.181
90°	0	0.761	0.765	0.761	0.761	0.761
	1	0.568	0.568	0.568	0.568	0.568
	2	0.901	0.901	0.901	0.901	0.901
	3	0.948	0.948	0.948	0.948	0.948



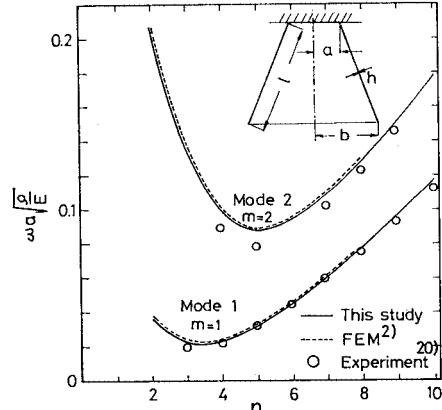
図一五 端部自由な半球殻の基本振動数

図一五に、端部自由の半球殻の基本固有振動数を、選点数  $M=11$  による本計算値と実験値<sup>18)</sup>の比較で示す。波数  $n$  が大きいと両者に差が認められるが、一般にはよく一致する。なお、端部自由の条件に対しては、不伸長理論<sup>15)</sup>による解析が可能であるが、図が示すように、この理論が適用できるのは波数  $n$  が小さいときに限定されそうである。

表一六に、端部の固定および単純支持に対する軸対称振動の結果を5次固有振動数まで示す。 $\phi_0=60^\circ$ ,  $h/a=0.05$ ,  $\nu=0.3$  である。振動数方程式が超越方程式となる場合<sup>19)</sup>には解の見落としがあるが、有限個の自由度で解析する本手法では、十分な選点数(ここでは  $M=11$ )

表一六 球殻の固有振動数 ( $\omega a \sqrt{\rho/E}$ ) (軸対称振動,  $M=11$ )

$m$	単純支持			固定支持		
	FEM <sup>1)</sup>	解析解 <sup>19)</sup>	選点法	FEM <sup>1)</sup>	解析解 <sup>19)</sup>	選点法
1	0.963	0.962	0.960	1.008	1.006	1.006
2	1.338	1.334	1.332	1.395	1.391	1.391
3	1.653	—	1.650	1.702	—	1.696
4	2.131	2.128	2.128	2.387	2.375	2.375
5	3.185	3.176	3.175	3.506	3.486	3.487



図一六 円錐殻の固有振動数

をとれば、それは避けられる。なお、曲線要素による FEM 値<sup>1)</sup>との差はほとんどない。

b) 円錐殻と双曲殻

一端固定、他端自由の円錐殻と双曲殻の結果を示す。諸元は、円錐殻(図一六参照)が  $b/a=2.326$ ,  $h/a=0.0188$ ,  $L/a=3.887$ ,  $\nu=0.3$ , 双曲殻(図一参照)が  $a=25.6$  m,  $Y_t=18.28$  m,  $Y_b=82.3$  m,  $h=12.7 \times 10^{-2}$  m,  $c=63.4$  m,  $\nu=0.15$ ,  $E=0.21 \times 10^6$  kg/cm<sup>2</sup> (20.6 GPa),  $\rho=0.245 \times 10^{-5}$  kg·s<sup>2</sup>/cm<sup>4</sup> (2.4 kN·s<sup>2</sup>/m<sup>4</sup>) である。

図一六に、円錐殻の1, 2次固有振動数を示す。選点数  $M=11$  による本計算値は、1次では FEM 値<sup>2)</sup>と実験値<sup>20)</sup>にほぼ一致し、2次では実験値より高めの値を示すが FEM 値とは十分よく一致している。

表一七に、双曲殻の1~3次振動数  $f$ (Hz) を波数  $n$

表一七 双曲殻の振動数  $f$ (Hz)

$n$	$m$	Holzer 法 <sup>9)</sup>	差分法 <sup>1)</sup>	選点法			
				$M=9$	$M=10$	$M=11$	$M=12$
0	1	7.749	8.150	7.767	7.765	7.765	7.765
	2	11.415	11.380	11.394	11.303	11.279	11.324
	3	11.902	11.826	12.413	12.100	11.877	11.733
1	1	3.288	3.335	3.309	3.309	3.309	3.309
	2	6.741	6.882	6.801	6.801	6.801	6.801
	3	10.521	10.532	10.498	10.497	10.499	10.501
2	1	1.765	1.785	1.777	1.777	1.777	1.777
	2	3.693	3.723	3.699	3.701	3.701	3.701
	3	6.956	6.955	6.963	6.960	6.961	6.961
3	1	1.375	1.393	1.383	1.383	1.383	1.383
	2	1.990	2.015	2.001	2.005	2.004	2.004
	3	4.325	4.335	4.346	4.344	4.346	4.346
4	1	1.181	1.200	1.184	1.186	1.186	1.186
	2	1.448	1.458	1.457	1.457	1.457	1.456
	3	2.778	2.776	2.785	2.785	2.788	2.787
5	1	1.035	1.044	1.035	1.038	1.037	1.036
	2	1.429	1.442	1.436	1.436	1.436	1.435
	3	2.056	2.055	2.063	2.064	2.067	2.066



$=0, 1, \dots, 5$  に対して示す。正負のガウス曲率をもつ双曲殻の曲面形状のため、選点数  $M$  の変化に対する解の収束性がこれまでのものより劣るが、 $M=10, 11$  で一定値と判断される。なお、厳密解が得られていないので正確な精度の評価はできないが、既往の解<sup>9), 5)</sup> とは一部を除きほぼ 1% 以内の誤差で解が求まっている。

本節での数値例が示すように、本計算値は既往の理論値および実験値と十分よく一致した。ただ、ここでは、数値例に限られた形状の殻に対してなされたが、本論文の一つの目的である任意形状回転殻への適用可能性、そして解法の簡便性がある程度明らかになったと思われる。

本研究では、おもに固有振動数の検証、検討を行ったが固有モードについては別の機会に発表する予定である。

### 5. おわりに

本研究では、回転殻の固有振動数の一計算法として選点法による解法を提示し、それを基本的な形状の殻に適用して本手法の妥当性を確かめた。数値計算より得られた結果を、本手法の任意形状回転殻への適用の際の目安として要約すれば、以下のとおりである。

(1) 本手法によると、回転殻の自由振動問題は、一定の規則に従って、比較的簡単な手続きで定式化がなされ、きわめて直接的な解析が可能である。

(2) 不伸長振動をも含めた解析結果は、既往研究の結果とよく一致した。

(3) 本手法による解の誤差は、境界条件が物理量で指定されるとき小さく、変位量で指定されるとき大きくなると予測される。

(4) 解の精度は、選点に直交多項式  $T_M^*(x)$  の零点より、直交多項式  $P_M^*(x)$  の零点を採用する方が、良好である。

(5) 5~6 次固有振動数までを精度よく (円筒殻の厳密解に対して 1% 以内の誤差で) 求めるには、選点数は 10 ないし 11 程度で十分である。

なお、数値計算には、北海道大学大型計算機センターの HITAC M-200H を用いたことを付記する。

#### 付録 1 行列 $G$ と数値積分則との関係

区間  $[0, 1]$  で定義される直交多項式の零点  $x_j$  ( $j=1, 2, \dots, M$ ) と境界点  $x_0=0, x_{M+1}=1$  で作られる行列  $G$  は補間型積分則と以下のように関係づけができる。 $G$  の作成には境界点がかかっているのので、関数  $f(x)$  の値が区間の両端で計算される次の閉じた型の積分を考

える。

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{i=0}^{M+1} w_i f(x_i) \dots\dots\dots (A.1)$$

ここに、 $w_i$  は重みである。重み  $w_i$  は、次式で与えられる誤差  $E$

$$E(f) = \int_0^1 f(x) dx - \sum_{i=0}^{M+1} w_i f(x_i) \dots\dots\dots (A.2)$$

が、 $f(x)=1, x, x^2, \dots, x^{M+1}$  に対して零になるように定められる。すなわち、次式を解くことにより得られる。

$$wG = q \dots\dots\dots (A.3)$$

ここに、行列  $G$  の成分は式 (22.a) で与えられ、行マトリックス  $w$  と  $q$  は次のようである。

$$w = [w_0, w_1, \dots, w_{M+1}] \dots\dots\dots (A.4)$$

$$q = [1/1, 1/2, \dots, 1/M2] \dots\dots\dots (A.5)$$

式 (A.1) の結果は、直交多項式  $\phi_M$  ( $P_M^*$  または  $T_M^*$  を表わす) の零点と境界点に基づき、次に示す  $f(x)$  の補間多項式  $\bar{f}(x)$  の積分結果と同一となる。

$$\bar{f}(x) = \sum_{i=0}^{M+1} \frac{\phi_{M_2}(x)}{(x-x_i)\phi_{M_2}'(x_i)} f(x_i) \dots\dots\dots (A.6)$$

ここに、 $(\ )' = d(\ )/dx$ ,  $\phi_{M_2}(x) = x(x-1)\phi_M(x)$  したがって、重み  $w_i$  は次式で与えられる。

$$w_i = \int_0^1 \frac{\phi_{M_2}(x)}{(x-x_i)\phi_{M_2}'(x_i)} dx \dots\dots\dots (A.7)$$

$(i=0, 1, \dots, M+1)$

以下に結果を示す。

(a)  $\phi_M(x) = P_M^*(x)$  とする場合

$M=1$  のとき;

$$w_0 = w_2 = 1/6, w_1 = 2/3 \dots\dots\dots (A.8)$$

$M \geq 2$  のとき

$$w_0 = w_{M+1} = 0 \dots\dots\dots (A.9)$$

$$w_i = \frac{1}{x_i(1-x_i)\{P_M^*(x_i)\}^2} \quad (i=1, 2, \dots, M) \dots\dots\dots (A.10)$$

となる。特に  $M \geq 2$  では、式 (A.10) で与えられる重みは Gauss-Legendre 積分則の重みの半分に等しい。

(b)  $\phi_M(x) = T_M^*(x)$  とする場合

$M$  が偶数のとき;

$$w_0 = w_{M+1} = 1/\{2(1-M^2)\} \dots\dots\dots (A.11)$$

$$w_i = (-1)^i \frac{\cot \theta_i}{M(1-M^2)} + \bar{w}_i \quad (i=1, 2, \dots, M) \dots\dots\dots (A.12)$$

$M$  が奇数のとき;

$$w_0 = w_{M+1} = 1/\{2(4-M^2)\} \dots\dots\dots (A.13)$$

$$w_i = (-1)^i \frac{\operatorname{cosec} \theta_i}{M(4-M^2)} + \bar{w}_i \quad (i=1, 2, \dots, M) \dots\dots\dots (A.14)$$

となる。ここで、

$$\theta_i = (2i-1)\pi/(2M) \dots\dots\dots (A.15)$$

$$\bar{w}_i = \frac{1}{M} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{[M/2]} \frac{\cos 2k\theta_i}{1-4k^2} \right\} \dots\dots\dots (A \cdot 16)$$

である。特に  $M \geq 2$  では、 $w_0$  と  $w_{M_1}$  は常に負となり、 $\bar{w}_i$  は Fejér の公式<sup>21)</sup>の重みの半分に等しい。

式 (A・3) から得られる重みは、式 (A・8)～(A・14) で与えた結果と同一となる。この関係は、選点に関するデータのチェックや行列  $G$  の逆行列の精度の検討に役立つものである。

#### 参 考 文 献

- 1) Navaratan, D.H. : Natural Vibrations of Deep Spherical Shells, AIAA J, Vol. 4, No. 11, pp. 2056~2058, 1966.
- 2) Sen, S.K. and P.L. Gould : Free Vibration of Shells of Revolution Using FEM, Proc. of ASCE, Vol. 100, No. EM 2, pp. 283~303, Apr., 1974.
- 3) Altman, W. et al. : Vibration of Thin Cylindrical Shells Based on a Mixed Finite Element Formulation, Computers & Structures, Vol. 8, No. 2, pp. 217~221, 1978.
- 4) Hashish, M.G. and S.H. Abu-Sitta : Free Vibration of Hyperbolic Cooling Tower, Proc. of ASCE, Vol. 97, No. EM 2, pp. 253~269, Apr., 1971.
- 5) Carter, R.L. et al. : Free Vibrations of Hyperboloidal Shells of Revolution, Proc. of ASCE, Vol. 95, No. EM 5, pp. 1033~1052, 1969.
- 6) Zarghamee, M.S. and A.R. Robinson : A Numerical Method for Analysis of Free Vibrations of Spherical Shells, AIAA J, Vol. 5, No. 7, pp. 1256~1261, 1967.
- 7) Tottenhan, H. and K. Shimizu : Analysis of the Free Vibration of Cantilever Cylindrical Thin Elastic Shells by the Matrix Progression Method, Int. J. Mech. Sci., Vol. 14, pp. 293~310, 1972.
- 8) 水上隆男・西岡 隆 : Legendre 多項式を用いた折板構造の一振動解析, 土木学会論文報告集, No. 277, pp. 1~14, 1978.
- 9) 丹羽義次・小林昭一・北原道弘 : 積分方程式法による平板の固有値問題の解析, 土木学会論文報告集, No. 304, pp. 1~16, 1980.
- 10) Novozhilov, V.V. : The Theory of Thin Shells, P. Noordhoff, 1959.
- 11) Finlayson, B.A. : The Method of Weighted Residual and Variational Principles, Academic Press, 1972.
- 12) Prenter, P.M. : Splines and Variational Methods, John Wiley & Son, 1975.
- 13) 山田嘉昭・佐藤俊雄 : 有限要素法における最近の固有値問題解法, 生産研究, Vol. 26, No. 6, pp. 25~33, 1974.
- 14) Warburton, G.B. and J. Higgs : Natural Frequencies of Thin Cantilever Cylindrical Shells, J. Sound. and Vib., Vol. 11, No. 3, pp. 335~338, 1970.
- 15) Love, A.E.H. : The Mathematical Theory of Elasticity, 4th ed., Cambridge Univ. Press, 1959.
- 16) Cohen, G.A. : Computer Analysis of Asymmetric Free Vibrations of Ring-Stiffened Orthotropic Shells of Revolution, AIAA J, Vol. 3, No. 12, pp. 2305~2312, 1965.
- 17) Greebaum, K. : Comments "Numerical Analysis of Unsymmetrical Bending of Shells of Revolution", AIAA J, Vol. 2, No. 3, pp. 590~591, 1964.
- 18) Hwang, C. : Some Experiments on the Vibrations of a Hemispherical Shell, J. Appl. Mech., Vol. 33, No. 4, pp. 817~824, 1966.
- 19) Kalnins, A. : Effect of Bending on Vibrations of Spherical Shells, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 36, pp. 74~81, 1964.
- 20) Weingarten, V.I. : Free Vibrations of Conical Shells, Proc. of ASCE, Vol. 91, No. EM4, pp. 69~87, 1965.
- 21) Davis, P.J. and Rabinowitz (森 正武訳) : 計算機による数値積分法, 日本コンピュータ協会, 1980年.
- 22) Mikami, T. and J. Yoshimura : Free Vibration of Shells of Revolution by the Collocation Method, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 30, pp. 323~334, Univ. of Tokyo Press, 1981.
- 23) 三上 隆・芳村 仁 : 選点法による球形キャップを有する円筒殻の自由振動解析, 第37回土木学会年次学術講演会講演概要集, 第1部, pp. 325~326, 1982.

(1982.9.16・受付)