

水文事象の頻度分析への MEP 導入について

ON INTRODUCTION OF MEP IN HYDROLOGIC FREQUENCY ANALYSIS

寒 川 典 昭*・荒 木 正 夫**

By Noriaki SOUGAWA and Masao ARAKI

1. ま え が き

水工計画を策定するうえで基本的な資料は、降水量・河川流量であり、治水・利水計画では、これらの資料に基づいて再現期間を計算したり、逆に再現期間を指定してそれに応じた水文量を算定することが要求される。そのためには、対象とする水文量の母集団の確率分布を決定し、その母集団がもつ母数を推定しなければならないが、文水資料はしばしば小標本であるため、いかなる母集団を採用すべきかという問題に多くの不確定さが存在する。

本論文では、このような問題に対処するために不確定さの尺度であるエントロピーの概念を導入して、最大エントロピー原理 (Maximum entropy principle; 以下 MEP と記す) から確率密度関数を決定する方法を議論し、降水頻度分析を対象としてその妥当性を検討しようとするものである。

(1) 従来の研究とその検討

従来、水文事象の頻度分析のために研究されてきた分布形は多数存在するが、基本的には、(i) 正規分布を前提とした分布、(ii) ガンマ分布を前提とした分布、および (iii) 極値分布に大別される。(i)、(ii) はさらに対数変換の有無、母数の数、母数の値により、(iii) は母集団分布の種類により、詳細に分類されている。また、これらの分布関数に含まれる母数の推定法としては、積率法・最尤法を基礎として多くの研究成果が発表されている¹⁾。

ところが、一方対象とする母集団の分布関数の採用については、単に経験に基づいて確率紙上へのプロットから決定されているにすぎず、そこには理論的な根拠、あるいは思想的な妥当性は存在していないようである。な

るほど、極値分布は標本の大きさが $n \rightarrow \infty$ のときの極値に対する漸近分布であるが、あらかじめ母集団の分布を仮定せねばならず、やはり経験則の域を出ないであろう。

一方、Sonuga²⁾ は MEP を用いて確率密度関数を決定する方法を提案した。この方法は、MEP を置くことにより分布形の採用に理論的な妥当性をなした点で高く評価されるが、解法が複雑で彼の算定法を採用するかわり 3 次以上のモーメントを制約条件に加えたいという欠点を有している。

(2) 本研究の目的と概要

本研究では、対象とする水文量の母集団の分布形をあらかじめ仮定することなく、あるいは、経験によって決定することなく、与えられた任意次数のモーメントの制約と確率の規格化条件のもとで MEP を置くことにより確率分布を決定(このようにして決定された分布を MEP 分布という)し、その分布が存在する条件を示す。ついで、いくつかの既知の母集団を MEP 分布で適合させ、制約条件として与えるモーメントの数と適合度との関係を考察することにより、制約条件として必要なモーメントの数を求める。一方、データから得られるモーメントの精度とそれに含まれる誤差が MEP 分布に及ぼす影響について評価する。最後に、本研究の方法を年最大日降水量を対象として適用し、本法の妥当性を検証するとともに、他の水文量に対しても同様に高い適用性を有していることを示唆する。

2. MEP 分布の算定^{注 1)}

(1) MEP による確率密度関数の決定

a) 定 式 化

注 1) 本章は、水文事象の頻度分析に MEP を導入することの妥当性について触れながら、文献 2), 5), 6), 7), 9) を系統的にまとめたものである。

* 正会員 工修 信州大学助手 工学部土木工学科

** 正会員 工博 信州大学教授 工学部土木工学科

連続変数 x に対する確率密度関数を $p(x)$ とすると、エントロピーは次式で与えられる³⁾。

$$H = - \int p(x) \ln p(x) dx \dots\dots\dots (1)$$

一方、確率密度関数が具備すべき条件と関数 $g_r(x)$ の期待値は、以下のように表現される。

$$\int p(x) dx = 1 \dots\dots\dots (2)$$

$$\int g_r(x) p(x) dx = E[g_r(x)], \quad r=1, 2, \dots, N \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $E[\cdot]$ は期待値記号である。

さて、式 (2), (3) を制約条件として式 (1) を最大にする $p(x)$ を求めることは、確率の規格化条件と $g_r(x)$ の期待値によって与えられる情報以外はできるだけ一様となる $p(x)$ を決定していることになる。換言すれば、このことは、われわれが知り得る情報は積極的に取り入れ、それ以外は x ができるだけランダムに発生するような $p(x)$ を評価していることである。われわれは、水文事象の分布関数の決定にこのような立場をとることが自然であり、妥当であると考える。

そこで、上記の問題をラグランジュの未定乗数法で解くと、ラグランジュ関数は、

$$L = H + (\lambda_0 - 1) \left\{ 1 - \int p(x) dx \right\} + \sum_{r=1}^N \lambda_r \left\{ E[g_r(x)] - \int g_r(x) p(x) dx \right\}$$

となり、

$$\frac{\partial L}{\partial p(x)} = -\{1 + \ln p(x)\} - (\lambda_0 - 1) - \sum_{r=1}^N \lambda_r g_r(x) = 0$$

より、 $p(x)$ の最大エントロピー推定値 $\hat{p}(x)$ は次のようになる。

$$\hat{p}(x) = \exp \left\{ -\lambda_0 - \sum_{r=1}^N \lambda_r g_r(x) \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 λ_r はラグランジュの未定乗数である。

一般に統計学においてよく知られている分布形のいくつかは、適切な $g_r(x)$ を与えることによって式 (4) で表現される。たとえば、式 (3) を

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx = \sigma^2 \dots\dots\dots (5)$$

の形で与えると、式 (4) は平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布、すなわち、

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

となり⁴⁾、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x-u}{\alpha} \right) \hat{p}(x) dx = r \dots\dots\dots (7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\left(\frac{x-u}{\alpha} \right) \right\} \hat{p}(x) dx = 1 \dots\dots\dots (8)$$

の形で与えると、式 (4) はグンベル分布、すなわち、

$$\hat{p}(x) = \alpha^{-1} \exp \left[-\left(\frac{x-u}{\alpha} \right) - \exp \left\{ -\left(\frac{x-u}{\alpha} \right) \right\} \right] \dots\dots\dots (9)$$

となる⁵⁾。ここに、 $r (=0.5772)$ はオイラー一定数であり、 u, α は母数である。さらに、指数分布やコーシー分布等についても導くことが可能である⁶⁾。

さて、本論文では x として水水量を取り扱っており、その水水量のもつ情報を任意次数のモーメント、すなわち、

$$g_r(x) = x^r, \quad r=1, 2, \dots, N \dots\dots\dots (10)$$

の形で表わし、式 (3) の右辺を

$$E[g_r(x)] = \mu_r, \quad r=1, 2, \dots, N \dots\dots\dots (11)$$

と表現する⁷⁾。また、 x の存在区間を $[0, \infty)$ とする。

ここに、 μ_r は原点のまわりの r 次のモーメントである。したがって、式 (4) に含まれる λ_r は、

$$\begin{aligned} \mu_r \int_0^{\infty} \exp \left(-\sum_{r=1}^N \lambda_r x^r \right) dx \\ = \int_0^{\infty} x^r \exp \left(-\sum_{r=1}^N \lambda_r x^r \right) dx, \quad r=1, 2, \dots, N \end{aligned} \dots\dots\dots (12)$$

なる非線形方程式を解くことにより決定され、 λ_0 は次式から計算される。

$$\lambda_0 = \ln \left\{ \int_0^{\infty} \exp \left(-\sum_{r=1}^N \lambda_r x^r \right) dx \right\} \dots\dots\dots (13)$$

b) ラグランジュ乗数の評価法

われわれは、式 (12) を λ_r に関して解くために、Wragg & Dowson⁸⁾ の方法を採用する。

まず、 λ_r の近似値として α_r を与え、残差を ϵ_r とおくと、次式が成立する。

$$\lambda_r = \alpha_r + \epsilon_r \dots\dots\dots (14)$$

そこで、上式を式 (12) に代入して、 ϵ_r に関してテラー展開し ϵ_r^2 以上を無視して整理すると、

$$\sum_{j=1}^N (C_{i+j} - \mu_i C_j) \epsilon_j = C_i - \mu_i C_0, \quad i=1, 2, \dots, N \dots\dots\dots (15)$$

が得られる。ここで、

$$C_s = \int_0^{\infty} x^s \exp \left(-\sum_{r=1}^N \alpha_r x^r \right) dx, \quad s=0, 1, \dots, 2N \dots\dots\dots (16)$$

である。したがって、

$$\left. \begin{aligned} p_{ij} &= C_{i+j} - \mu_i C_j \\ q_i &= C_i - \mu_i C_0, \quad i, j=1, 2, \dots, N \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

とおくと、式 (15) は

$$\sum_{j=1}^N p_{ij} \epsilon_j = q_i, \quad i=1, 2, \dots, N \dots\dots\dots (18)$$

となり、上式は ϵ_j に関する N 元連立方程式である。

このようにして、初期値 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$ を与え、残差について式 (18) を解く計算を $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N\}$ が十分小さくなるまで繰り返すことにより、解 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$

のよりよい近似値を得ることができる。なお、経験的にいえば、 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\} = \{0, 0, \dots, 0\}$ とした場合、収束性がよく、 $N=4$ の場合、 $\epsilon_j \leq 10^{-8} (j=1, 2, 3, 4)$ で収束したとみなすと、モーメントの与え方によって変動するが、繰り返し回数は以後に取り上げた例で5~40回程度である。

(2) 解の存在条件

式(4)で与えられる最大エントロピー分布は、いつも存在するとはかぎらない。すなわち、 $N-1$ 個のモーメント $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N-1}\}$ に対する最大エントロピー分布が存在して、そのラグランジュ乗数が $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N-1}\}$ で与えられれば、 μ_N が次の2つの条件を満たすときのみ、 $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N\}$ に関する最大エントロピー分布が存在する⁹⁾。

$$\mu_N \leq \mu_{N, \max} = \int_0^\infty x^N \exp\left(-\sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i x^i\right) dx \dots (19)$$

$$\mu_N = \mu_{2i} > \mu_{2i, \min}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & \mu_1 & \dots & \mu_{i-1} & \mu_i \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_i & \mu_{i+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \mu_i & \mu_{i+1} & \dots & \mu_{2i-1} & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \mu_1 & \dots & \mu_{i-1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_i \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mu_{i-1} & \mu_i & \dots & \mu_{2(i-1)} \end{vmatrix}^{-1} \dots (20)$$

ここで、式(19)は、 $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}\}$ が既知のときにのみ評価され、式(20)は、 N が偶数のときにのみ評価されるということに注意を要する。

いま、 $N=2$ を考えると、 $\mu_{2, \max} = 2(\mu_1)^2$ 、 $\mu_{2, \min} = (\mu_1)^2$ となり、MEP 分布は

$$(\mu_1)^2 < \mu_2 \leq 2(\mu_1)^2 \dots (21)$$

のときに存在し、分散を σ^2 とすると上式は次のように書き換えられる。

$$0 < \sigma/\mu_1 \leq 1 \dots (22)$$

Sonuga¹⁰⁾ の提案した2モーメント適合による MEP 分布は、この条件下で議論されていることになる。

(3) モーメントの基準化

確率変数 x の平均が1となるような変数変換、すなわち、

$$y = x/\mu_1 \dots (23)$$

を考えると、 y の密度関数 $q(y)$ は

$$q(y) = J\left(\frac{x}{y}\right) p(x) \dots (24)$$

となる。ここに、 $J(\cdot)$ はヤコビアンを表現している。したがって、 x に関する r 次のモーメントは

$$\begin{aligned} \mu_r &= \int_0^\infty x^r p(x) dx = (\mu_1)^r \int_0^\infty y^r q(y) dy \\ &= (\mu_1)^r m_r, \quad r=1, 2, \dots, N \dots (25) \end{aligned}$$

となり、 y に関する r 次のモーメント m_r は、上式から

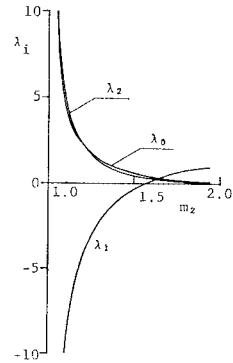


図-1 m_2 と λ_0, λ_1 および λ_2 の関係

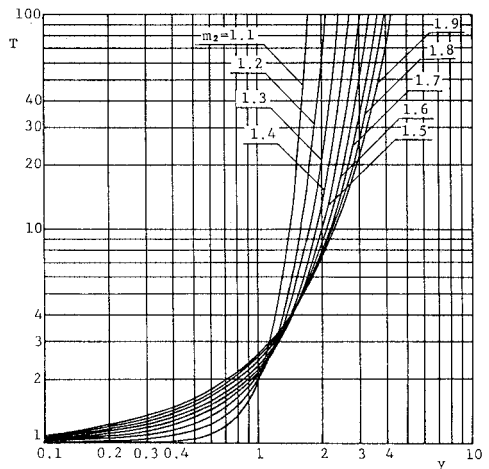


図-2 m_2 をパラメータとした y と確率年との関係

$$m_r = \mu_r / (\mu_1)^r, \quad r=1, 2, \dots, N \dots (26)$$

と評価される。ここで、 $m_0 = m_1 = 1$ であるため、 m_r を基準化されたモーメントとよぶことにする。 m_r を用いると、 $N=2$ の場合 m_2 のみに依存して MEP 分布が定まる。図-1 は、その関係を明示したものであり、 λ_0 と λ_2 は m_2 の増大に対して同じような減衰傾向をもつこと、および $m_2 < 1.5$ の区間ではラグランジュ乗数が m_2 の微小変化に対して大きく変動することがわかる。また m_2 をパラメータとした y と確率年 (= T) との関係を明示したのが図-2 であり、2モーメント適合 (l 次モーメントまでを用いて MEP 分布を求めることを l モーメント適合とよぶ) の確率年は、この図から y を指定することにより、容易に読み取ることができる。

3. 適合度の検討と MEP 分布の感度

本章では、いくつかの既知の分布を母集団とみなして、前章の理論による適合度を検討し、さらにモーメントの変動に伴う MEP 分布の感度を評価する。

(1) モーメントの数と適合度

母集団として、ガンマ分布とベータ分布を採用する。パラメーター α, β をもつガンマ分布 ($=G(\alpha, \beta)$) は、密度関数

$$p(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} \exp(-x/\beta),$$

$$\alpha > 0, \beta > 0, x > 0 \dots\dots(27)$$

より定義され、原点のまわりの r 次のモーメントは次式で与えられる。

$$\mu_r = (\alpha+r)(\alpha+r-1)\dots(\alpha+1)\beta^r, r=1, 2, \dots, N$$

$$\dots\dots(28)$$

同様に、パラメーター r, δ をもつベータ分布 ($=B(r, \delta)$) では、式(27), (28)は次の2式で置き換えられる。

$$p(x) = \frac{(r+\delta+1)!}{r!\delta!} x^r (1-x)^{\delta},$$

$$\alpha > -1, \beta > -1, 0 \leq x \leq 1 \dots(29)$$

$$\mu_r = \frac{(r+\delta+1)!(r+r)!}{(r+\delta+r+1)!r!}, r=1, 2, \dots, N \dots(30)$$

そこで、前章の方法に従って、式(28)から得られるモーメントを制約条件として式(27)を適合させた一例が図-3であり、同様に、式(30)を制約条件として式(29)を適合させた一例が図-4である注2)。ここで、 $G(3, 1)$ の場合、3モーメント適合と5モーメント適合は式(19)の制約条件を満たさないため存在しなかった。

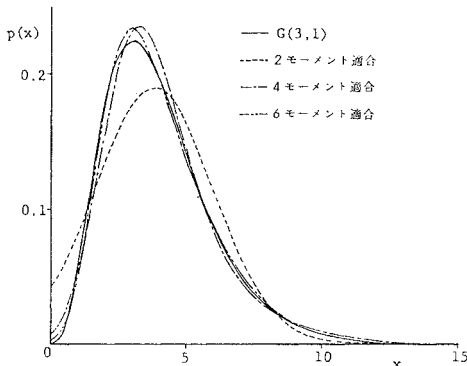


図-3 $G(3, 1)$ の最大エントロピー適合

表-1 $G(3, 1)$ と $B(2, 2)$ に対する MEP 分布のモーメント数とラグランジュ乗数

分布形	モーメントの数	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
$G(3, 1)$	2	1.77	-3.15	1.66				
	4	3.43	-10.1	9.72	-3.31	0.413		
	6	4.54	-17.3	24.9	-17.2	6.51	-1.24	0.0929
$B(2, 2)$	2	3.29	-6.70	3.37				
	3	3.03	-5.63	2.19	0.382			
	4	4.67	-16.0	21.8	-13.8	3.46		
	5	4.51	-14.6	17.8	-9.07	0.924	0.502	

注 2) 文献7),9)に同種の例があるが、ここでは水文事象の頻度分析によく用いられるガンマ分布と、対称形を示すベータ分布について例を追加した。

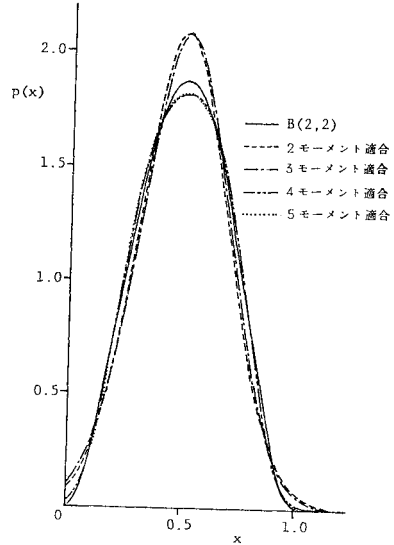


図-4 $B(2, 2)$ の最大エントロピー適合

これらの図から、4次モーメントまでを制約条件とした MEP 分布で、ほぼ母集団の形が記述されていることがわかる。また、表-1 は、図-3, 図-4 で示した MEP 分布のラグランジュ乗数であり、最高次数の λ の値がすべて正値をとっているが、このことは、MEP 分布が式(2)の制約条件を満たすための必要条件である。

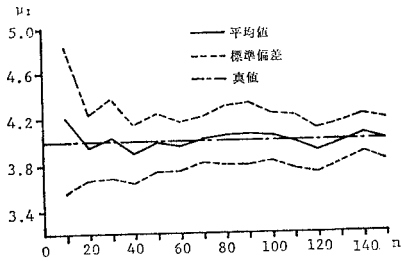
(2) モーメントの安定性と MEP 分布の感度

さて、一般に実現値から得られるモーメントは、母集団のモーメントに一致せず、モーメントの次数が大きくなるに従って、真値からのずれが大きくなることが予想される。当然、それは MEP 分布にひずみを生じさせることになる。

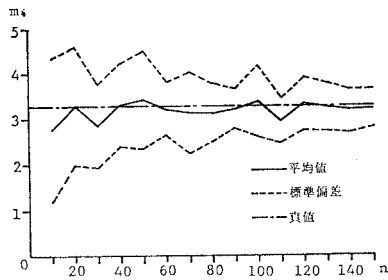
そこで、まず $G(1, 1), G(2, 1), G(3, 1), B(1, 1)$ および $B(2, 2)$ を母集団として個数 $n(n=10, 20, \dots, 150)$ のデータを 20 回発生させてモーメントの安定性を評価した。図-5, 図-6 は、一例として(1)で採用した非対称分布の $G(3, 1)$ と対称分布の $B(2, 2)$ について、基準化しない平均値の大きさと変動をみるための1次モーメントの安定性と、とがり度に関係する基準化された4次モーメントの安定性を示したものである。他の母集団の場合も同じ傾向を示し、モーメントの次数が小さいほど、真値に対する相対的な変動が小さく、データ数の増加とともに、平均値が母集団のモーメントに近づき、標準偏差が小さくなっていく様子がうかがわれる。

次に、4モーメント適合が母集団の形をよく記述できるため、その最高次数モーメントである m_4 の変動が MEP 分布に及ぼす影響を分析する。

ここでは、 $G(3, 1)$ を母集団として、3次モーメント

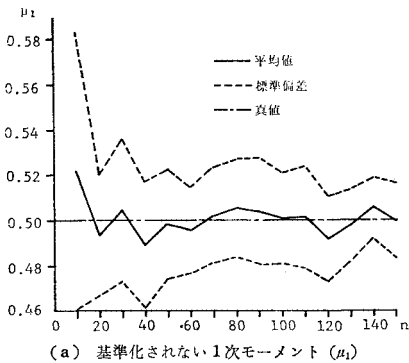


(a) 標準化されない1次モーメント (μ_1)

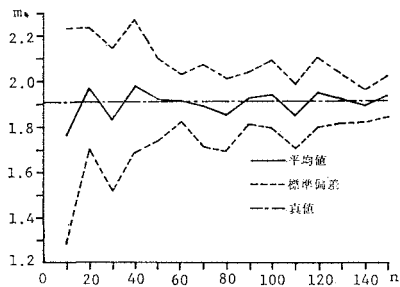


(b) 標準化された4次モーメント (m_4)

図-5 データ数の増加に伴う $G(3, 1)$ のモーメントの安定性



(a) 標準化されない1次モーメント (μ_1)



(b) 標準化された4次モーメント (m_4)

図-6 データ数の増加に伴う $B(2, 2)$ のモーメントの安定性

までは真のモーメントを採用し、 m_4 のみを MEP 分布が存在する区間 ($3.25 \leq m_4 \leq 4.50$ 程度) で変化させて、MEP 分布を同定した。表-2 は、そのときのラグランジュ乗数の値であり、 m_4 の増加に従って、 $\lambda_0, \lambda_2, \lambda_4$ は減少し、 λ_1, λ_3 は増加していることがわかる。表-2 の結果から、MEP 分布を求めて図化したのが 図-7 である。 $3.25 \leq m_4 \leq 4.50$ の区間では、図-3 の 2 モー

表-2 $G(3, 1)$ における m_4 の変動と MEP 分布のラグランジュ乗数との関係

m_4	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
3.25	4.24	-13.9	15.1	-6.13	0.901
3.28	3.43	-10.1	9.69	-3.30	0.410
3.30	3.14	-8.73	7.89	-2.40	0.264
3.50	2.41	-5.61	4.13	-0.771	0.0450
4.00	2.09	-4.39	2.89	-0.361	0.0130
4.50	1.98	-3.96	2.46	-0.228	0.0058

・: $G(3, 1)$ の m_4 の値

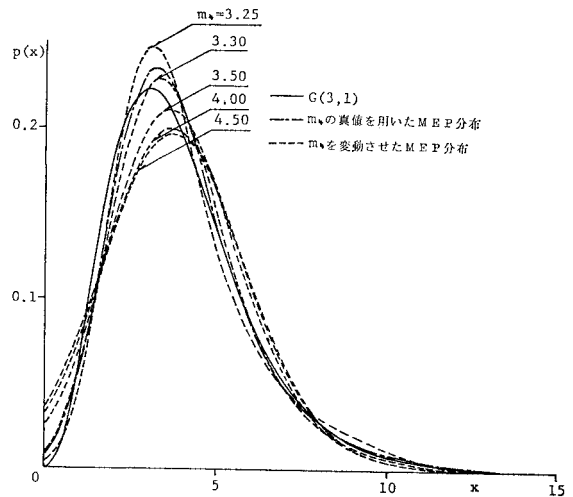


図-7 $G(3, 1)$ における m_4 の変動と MEP 分布

メント適合より、よい適合性を示しており、 m_4 の変動に伴う MEP 分布の感度は、比較的鈍いことがわかる。

以上より、MEP 分布は、それが存在する範囲においてデータ数が 60 個の場合に m_4 がもつ標準偏差程度の変動まで母集団をよく記述できることが明らかにされた。

4. 実測資料への適用と考察

解析資料としては、まず長野県内 22 か所の雨量観測所が記録した年最大日降水量を用いた。これらの観測所のデータは、ほとんど 40 年たらずであり、一方 3.(2) の結果から、データ数が 40 個程度の場合 2 次モーメントまで安定することが知られている。そこで、データから標準化された 2 次モーメントを計算すると表-3 の m_2 のようになり、一方式 (21) は m_2 に対して、 $1 < m_2 \leq 2$ と書き換えられるので、すべての観測所で式 (21) の条件を満たしているため、2 モーメント適合を行った。表-3 の λ_i は、この結果を示したものであり、 $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ の符号は、古谷以外はすべて正、負、正となっている。ここで、 λ_2 が正であることは 3.(1) で述べたとおりであり、 λ_0, λ_1 がともに正になることは分布形が $x=0$ の点で、正、負となることは $x>0$ の点でピークをもつことを示している。図-8 は表-3 の結果を北

牧, 北山, やぶ原について図化したものであり, 比較的よく頻度図を説明している.

次に, 4モーメント適合を考える. 同様に, 3.(2)の結果から, 3次, 4次モーメントが安定してくるためには, データ数が60個程度必要であろうと思われるが,

表-3 長野県における年最大日降水量のモーメントと MEP 分布のラグランジュ乗数

(a) 信野川流域					
	北 牧	古 谷	長久保新町	鹿教湯	賛 川
μ_1 (mm)	70.6	89.7	70.3	78.5	99.4
m_2	1.125	1.746	1.122	1.117	1.064
λ_0	3.77	0.195	3.87	4.03	7.35
λ_1	-7.79	0.586	-8.00	-8.38	-15.6
λ_2	3.91	0.119	4.01	4.20	7.81

(b) 天竜川流域					
	上 高地	奈 川	高 瀬	鬼無里	小 赤 沢
μ_1 (mm)	127.0	97.5	70.4	73.4	102.7
m_2	1.101	1.064	1.112	1.105	1.150
λ_0	4.67	7.35	4.21	4.49	3.13
λ_1	-9.80	-15.6	-8.78	-9.41	-6.33
λ_2	4.90	7.81	4.40	4.71	3.19

(c) 木曾川流域						
	北 山	伊 那 里	大 鹿	片桐松川	大 野	鈴 ヶ 平
μ_1 (mm)	76.1	105.3	99.0	124.1	131.2	122.7
m_2	1.085	1.280	1.148	1.095	1.145	1.149
λ_0	5.54	1.53	3.17	4.91	3.24	3.17
λ_1	-11.7	-2.59	-6.43	-10.3	-6.59	-6.43
λ_2	5.86	1.40	3.24	5.17	3.31	3.24

(c) 木曾川流域						
	やぶ原	福 島	三 浦	王 滝	西野川	三留野
μ_1 (mm)	105.2	98.7	180.7	124.9	119.6	136.0
m_2	1.091	1.072	1.056	1.089	1.073	1.136
λ_0	5.18	6.54	8.40	5.30	6.45	3.46
λ_1	-10.9	-13.9	-17.9	-11.2	-13.7	-7.09
λ_2	5.46	6.93	8.93	5.59	6.84	3.56

前述のどの観測所にもそれだけのデータ数を有していない. そこで, 大阪における1898年から1969年の72年分の年最大日降水量データを用いて, 2モーメント適合と4モーメント適合を行った. 表-4は, そのときのモーメントとラグランジュ乗数を, 図-9は, MEP分布と頻度図を示したものであり, 2モーメント適合から4モーメント適合になるに従って, 頻度図に対する適合度

表-4 大阪における年最大日降水量のモーメントと MEP 分布のラグランジュ乗数

(a) モーメント				
	μ_1	m_2	m_3	m_4
	95.8	1.14	1.51	2.33

(b) ラグランジュ乗数					
モーメントの数	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
2	3.34	-6.80	3.42		
4	11.5	-35.8	36.2	-14.1	1.93

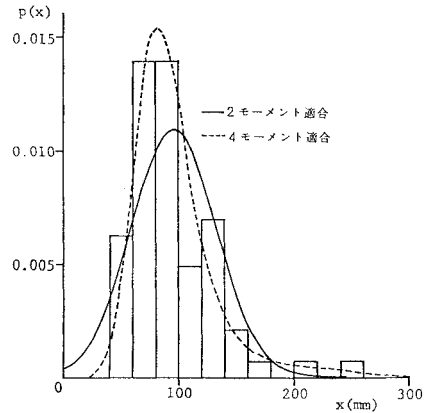


図-9 大阪における年最大日降水量の MEP 分布

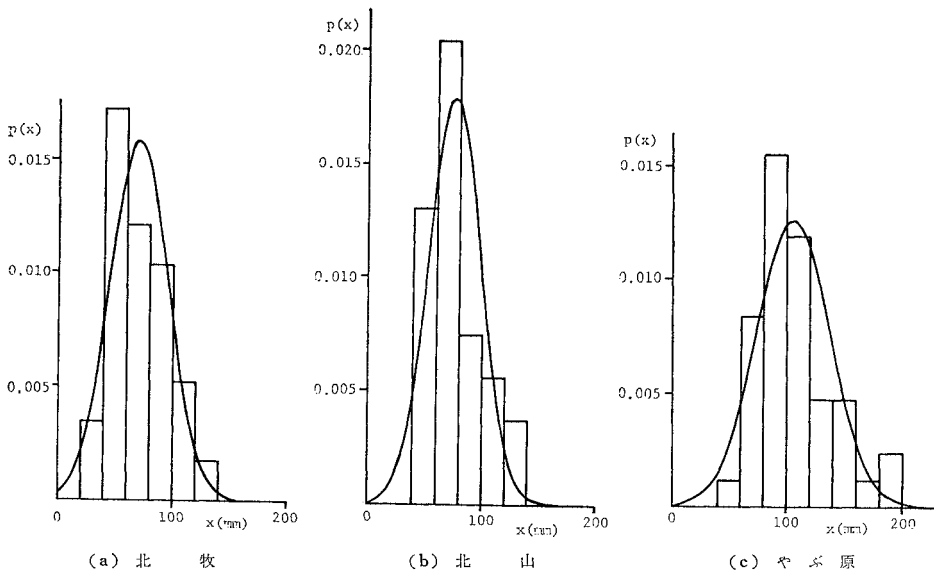
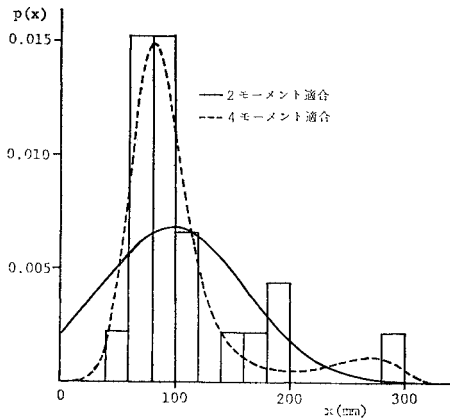


図-8 北牧, 北山, やぶ原における年最大日降水量の MEP 分布

表一五 伊那里における年最大日降水量のモーメントと MEP 分布のラグランジュ乗数

(a) モーメント					
μ_1	m_2	m_3	m_4		
105	1.28	2.13	4.33		
(b) ラグランジュ乗数					
モーメントの数	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
4	11.6	-40.3	44.8	-18.8	2.70



図一〇 伊那里における年最大日降水量の MEP 分布

が大きく改善されることがわかる。さらに、この4モーメント適合のMEP分布は、他の水文事象の頻度分布にも高い適合性を有することが期待される。なお、参考までに、データ数は少ないが前述表一三の天竜川流域伊那里について4モーメント適合を行った結果を表一五と図一〇に示した。

5. 結 論

本稿では、水文事象の頻度分析にMEPの導入を図るために、その妥当性を議論し、MEP分布の諸性質を検討し、実測データへの適用を図った。その成果を要約すると以下ようになる。

(1) MEP分布は、与えられた情報以外ではできるだけ一様になる分布であり、水文事象の頻度分析にこのような分布を導入することは、自然であり、妥当であることを議論した。

(2) MEP分布に含まれるラグランジュ乗数は、Wragg & Dowsonの方法に従って計算され、2モーメント適合の場合の基準化されたモーメントとラグランジュ乗数の関係、および基準化された変数(y)と確率年($=T$)との関係を図示した。

(3) ガンマ分布とベータ分布を母集団としてMEP分布の適合性を検討した結果、4次モーメントまでを制約条件に入れると十分よい精度の適合が得られることがわかった。

(4) ガンマ分布とベータ分布を母集団としてデータ数とモーメントの安定性との関係を検討して、モーメントの次数が小さいほど、真値に対する相対的な変動が小さく、データ数の増加とともに、平均が母集団のモーメントに近づき、標準偏差が小さくなっていく様子を示すことができた。

(5) 4次モーメントの変動と、それがMEP分布に及ぼす影響を図・表で示した。このことから、4次モーメントの変動に対してMEP分布の感度は鈍く、データ数が60個の場合に4次モーメントがもつ標準偏差の変動程度までは、母集団をよく記述できることが明らかになった。

(6) MEP分布を年最大日降水量の実測データに適用することができ、ここで取り上げたすべての観測所のデータは、2モーメント適合が可能であることがわかった。また、大阪における一例であるが、4モーメント適合は頻度図をよく説明できた。

今後、 $g_r(x)$ としていかなる関数をとることが適切であるかを検討するとともに、他の水文事象にこの分布を適用することにより、適用性、および適用の限界性を議論していきたいと考えている。

最後に、本研究を遂行するにあたり終始ご懇切なご指導をいただいた京都大学防災研究所付属水資源研究センター 池淵周一教授、信州大学工学部 富所五郎講師、ならびに討議に熱心に参加された前信州大学学生 甲田和彦、小山金利両君に感謝の意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) たとえば、神田 徹・藤田陸博：水文学—確率論的手法とその応用—、技報堂出版、pp. 13~63, 1982年。
- 2) Sonuga, J.O.: Principle of maximum entropy in hydrologic frequency analysis, Journal of Hydrology, Vol. 17, pp. 177~191, 1972.
- 3) たとえば、笠原芳郎：情報理論と通信方式、共立出版、p. 150, 1965年。
- 4) 高埴琢馬・池淵周一：エントロピー的にみた降雨・流出変換特性とそのモデル化、京都大学防災研究所年報、第23号、B-2, pp. 193~209, 1980年4月。
- 5) Jowitt, P.W.: The extreme-value type-1 distribution and the principle of maximum entropy, Journal of Hydrology, Vol. 42, pp. 23~38, 1979.
- 6) Compenhout, J.M. and T.M. Cover: Maximum entropy and conditional probability, IEEE Transactions on Information Theory, Vol. IT-27, No. 4, pp. 483~489, July, 1981.
- 7) Wragg, A. and D.C. Dowson: Fitting continuous probability density function over $[0, \infty)$ using information ideas, IEEE Transactions on Information Theory, Vol. IT-16, pp. 226~230, March, 1970.
- 8) 前出 7)
- 9) Einbu, J.M.: On the existence of a class of maximum-entropy probability density function, IEEE Transactions on Information Theory, Vol. IT-23, No. 6, pp. 772~775, Nov., 1977.
- 10) 前出 2)