

不規則関数論に基づく道路橋の空間領域での信頼性解析

RELIABILITY ANALYSIS OF HIGHWAY BRIDGE SUBJECTED TO
VEHICULAR LOADS USING THEORY OF RANDOM FUNCTIONS

高岡 宣善*・白 木 渡**・松 保 重 之***

By Nobuyoshi TAKAOKA, Wataru SHIRAKI

and Shigeyuki MATSUHO

1. ま え が き

構造物に作用する荷重は、通常、構造物の耐用期間中時間的にも空間的にも不規則に変動する不規則関数であると考えられる。したがって、構造物の信頼性のより正しい評価は、不規則関数論の助けを借りることによって可能となる。本論文で取り扱う道路橋においても、たとえば活荷重は自動車作用する時間および位置によって時間的にも空間的にも不規則に変動するものと考えられる。したがって、道路橋の安全性を定量的に評価し、より合理的に解析していくためには、不規則関数論を用いた信頼性解析が行われる必要がある。

上述のように、道路橋に作用する荷重は、時間的にも空間的にも不規則関数と考えられるので、道路橋の信頼性解析は時間領域および空間領域においてなされなければならない。しかし、時間的および空間的不規則変動を同時に考慮した信頼性解析はきわめて難しいと考えられる。そこで、よく用いられる解析法として、まず任意の固定された時点において空間領域における信頼性解析を行い、その後その解析結果をもとに時間領域での信頼性解析を行う方法がある。本論文は、道路橋の時間領域での信頼性解析を行う前段階として、空間領域のみにおける道路橋の信頼性解析を不規則関数論を用いて行おうとするものである。

道路橋に作用する活荷重を統計的に取り扱った研究は、これまでも数多く行われている^{1)~14)}。これらの中には、道路橋に作用する活荷重を空間的に変動する不規則関数であると考えて解析しているものもあるが、その活荷重によって引き起こされる荷重作用までも不規則関数として解析しているものはほとんどない。また、荷重

作用を不規則関数として解析している研究^{12), 13)}においても、道路橋の信頼性の評価を不規則関数論に基づいて行っているものではなく、活荷重によって引き起こされる荷重作用の確率特性値を不規則変数の理論によって論じている。

以上のような観点から、本論文では、単純支持された道路橋に不規則関数としてモデル化した自動車荷重が作用する場合を考え、荷重によって断面内に引き起こされる荷重作用の空間的な確率特性を不規則関数の相関理論を用いて解析的に求め、その結果をもとに道路橋の空間領域での信頼性解析を行った。まず、道路橋の安全性に支配的な影響を及ぼす活荷重は、道路橋に自動車ほぼ満載された交通渋滞状態の活荷重であると考え、その場合の活荷重は橋軸に沿って連続的に分布する不規則分布荷重（不規則関数）であるとみなしてモデル化し、その空間的な確率特性値（平均、分散、自己相関関数）をシミュレーション手法を用いて求めた。次に、求められた活荷重の確率特性値を用いて、道路橋の信頼性を評価するうえで重要な荷重作用、すなわち活荷重による曲げモーメントの空間的な確率特性値を不規則関数の相関理論を用いて解析的に求めた。このようにして求めた曲げモーメントがスパン全長にわたって許容レベルを一度も超過しない確率として道路橋の信頼度の評価を行った。以上示した解析手順に従って、単純支持された1車線道路橋について数値計算を行い、本論文で示す不規則関数論に基づく道路橋の信頼性解析の有効性を示した。

2. シミュレーション手法による道路橋活荷重のモデル化

道路橋の信頼度を評価するためには、荷重によって引き起こされる荷重作用の確率特性を知る必要がある。本論文では、このような確率特性値を、活荷重の確率特性が既知であるとして不規則関数論によって解析的に求め

* 正会員 工博 鳥取大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 工博 鳥取大学助教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工修 舞鶴工業高等専門学校助手 土木工学科

る。その際用いる活荷重の確率特性値は、実際の観測データを用いて評価すべきであるが、道路橋活荷重を橋軸に沿った不規則関数として取り扱った場合の荷重の確率特性に関するデータは現在のところ皆無に等しい状態であるので、本論文では活荷重の確率特性値をシミュレーション手法によって求めることにする。ただし、簡単のために1車線道路を対象とする。

(1) 車両のモデル化

文献10)を参考にして以下のように電子計算機内で発生させる車両をモデル化する。交通流を構成する車種は建設省が行っている全国交通情勢調査¹⁵⁾に従って、(a)乗用車(貨客車を含む)、(b)小型貨物車(軽貨物車を含む)、(c)大型貨物車(普通貨物車、バス、特殊車を含む)の3つに分類した。各車種はFig.1に示すような簡単なモデルとした。ただし、 L は車両占有長、 W は車両重量である。簡単のために車両占有長は確定量とし、車両重量はFig.2に示すように最大重量、最小重量、平均重量および分散によって規定された正規分布に従うものとした。各車種の交通流における混入率は道路の諸条件により変化すると考えられるが、本研究では全国交通情勢調査¹⁵⁾における一般市街地のデータを用いることとし、車種(a)、(b)および(c)の混入率をそれぞれ64.0%、20.0%および16.0%とした。

(2) シミュレーションの方法

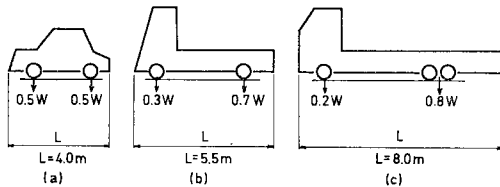


Fig. 1 Traffic Composition.

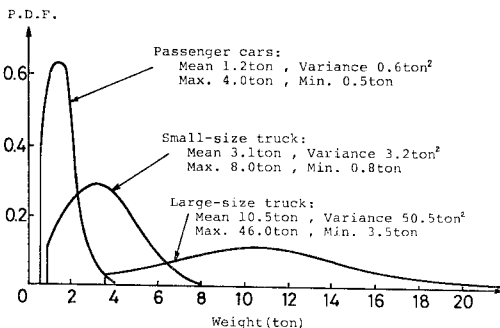


Fig. 2 Probability Density Functions for Weight of Vehicles. [1t=9.8kN]

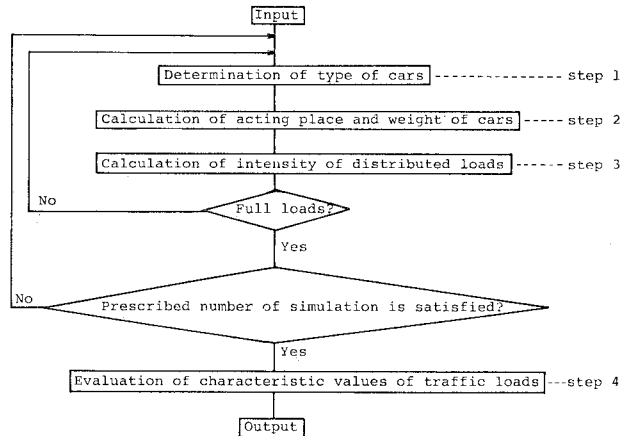


Fig. 3 Flow Chart of Simulation for Traffic Load.

シミュレーションは、Fig. 3のフローチャートに示す計算手順に従って行った。

まず、ステップ1で各車種の車両混入率を満たすように車種を決定する。具体的には、モンテカルロ法により電子計算機内で0から1までの一様乱数を発生させ、この乱数の値を車両混入率の累積値に対応させて車種を決定した。

次に、ステップ1で決定した車の載荷位置および車両重量を決定する。これが、Fig. 3のステップ2である。載荷位置を決定する際、車両間隔は簡単のため一律に50cmとした。この車両間隔は渋滞時を想定していることを考えれば妥当な値だろうと思われる。また、車両重量は前述したように正規分布に従うものとしたが、その最大値および最小値を規定しているために、その全確率(正規分布の最小値から最大値まで積分した面積)が1にはならない。そのため、分布の全確率が1となるように正規分布の確率密度を一樣にひずませて車両重量 W の確率密度 $f_W(W)$ を次のように定めた。

$$f_W(W) = \frac{k}{\sqrt{2\pi}D_W} \exp\left\{-\frac{(W-\bar{W})^2}{2D_W}\right\} \quad (W_{min} \leq W \leq W_{max}) \dots\dots(1)$$

$$k = \frac{1}{\phi\left(\frac{W_{max}-\bar{W}}{\sqrt{D_W}}\right) - \phi\left(\frac{W_{min}-\bar{W}}{\sqrt{D_W}}\right)} \dots\dots(2)$$

ただし、 W_{max} と W_{min} はそれぞれ車両重量 W の最大値と最小値であり、 \bar{W} と D_W はそれぞれ車両重量 W の平均と分散である。また、式(2)の中に現われる $\phi(\cdot)$ は、

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \dots\dots(3)$$

で与えられる正規確率積分である。また、車両重量は本来、その最大値と最小値の間の連続な値をとるが、本論文では簡単のため車両重量のとり得る値は最大値と最小

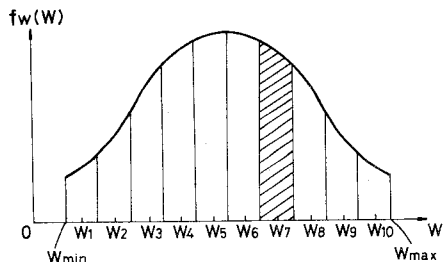


Fig. 4 Probability Allocation to Discrete Value of Vehicle Weight.

値の間の10個の離散値 $W_i (i=1, \dots, 10)$ とした (Fig. 4 参照). さらに, たとえば, 離散値 W_7 の発生する確率 p_7 は, Fig. 4 で斜線を施した部分の面積となるように定めた. このように車両重量の離散値 W_i とその W_i のとり得る確率 $p_i (i=1, \dots, 10)$ との関係が規定されると, ステップ1で車種を決定したのと同様な方法で, 車両重量を電子計算機内で発生させた乱数に対応させて車両重量を決定することができる.

このようにステップ1とステップ2で車種および車両重量が決まれば, 次はステップ2で決定した車両重量を分布荷重に変換する. これが, Fig. 3のステップ3である. 変換方法としては, 決定された重量を Fig. 1の前後輪軸重比に分割し, そのそれぞれを車両占有長の半分に等分布荷重として載せるという方法をとった.

上述のようにして所要の標本記録長に車が満載されると, 1回のシミュレーションが終了し, さらにシミュレーションを定められた回数だけ繰り返していくのである. 本論文では, シミュレーション回数は10万回とした. ただし, 擬似乱数の一様性および Fig. 4に示す分布への近似の度合については検証済みである.

所要のシミュレーション回数を終えたなら, 最後にシミュレーションによって得られた結果に統計処理を施してやる. これが, Fig. 3のステップ4である. 統計処理としてはアンサンブル的な処理を施した. すなわち, 次式に従って分布不規則荷重 $\tilde{q}(x)$ の期待値 $\bar{q}(x)$, 分散 $D_q(x)$ および自己相関関数 $K_q(x_1, x_2)$ を求めた¹⁶⁾. ただし, $\tilde{q}(x)$ の x は橋軸方向の座標であり, また, $\tilde{q}(x)$ の上付き記号 (\sim) は不規則変量を示すものとする.

$$\bar{q}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_i(x) \dots\dots\dots (4)$$

$$K_q(x_1, x_2) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \{q_i(x_1) - \bar{q}(x_1)\} \cdot \{q_i(x_2) - \bar{q}(x_2)\} \dots\dots (5)$$

$$D_q(x) = K_q(x, x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \{q_i(x) - \bar{q}(x)\}^2 \dots\dots (6)$$

上式中, $q_i(x)$ は i 番目の標本関数であり, N は標本

関数の個数すなわちシミュレーションの回数で, 本論文の場合 $N=10^5$ である.

(3) 活荷重の確率特性値の決定

前節において説明したシミュレーション方法によって道路橋活荷重の確率特性値を求めた結果を以下に示す.

Fig. 5 はシミュレーションによって得られた分布不規則荷重の期待値 $\bar{q}(x)$ と分散 $D_q(x)$ を示したものである. この図より, 分布不規則荷重の期待値 $\bar{q}(x)$ と分散 $D_q(x)$ はともに助変数 x にかかわらずほぼ一定値, すなわち $\bar{q}(x) = 0.712$ (t/m) [6.98 (kN/m)], $D_q(x) = 0.662$ (t/m)² [6.36 × 10 (kN/m)²] となることがわかる. また, Fig. 6 はシミュレーションによって得られた分布不規則荷重の自己相関関数 $K_q(x_1, x_2)$ の値を助変数

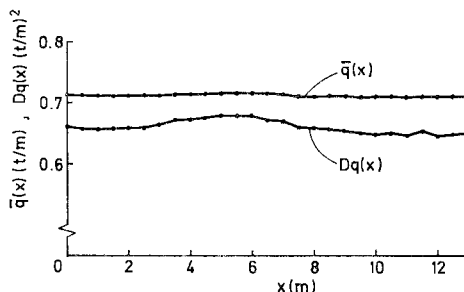


Fig. 5 Mean Value $\bar{q}(x)$ and Variance $D_q(x)$ of Randomly Distributed Traffic Load $\tilde{q}(x)$. [1 t = 9.8 kN]

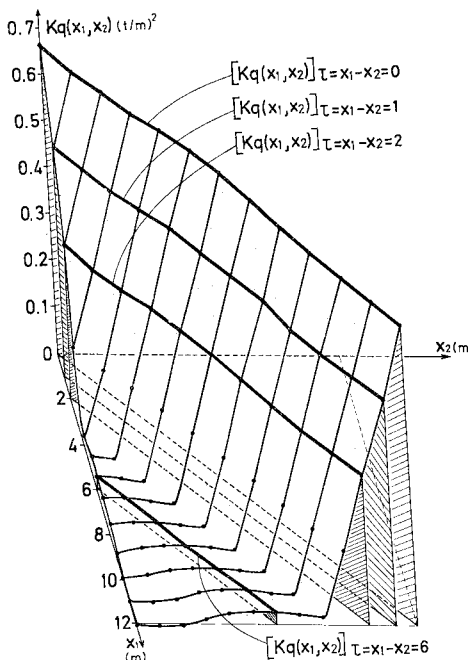


Fig. 6 Autocorrelation Function $K_q(x_1, x_2)$ of Randomly Distributed Traffic Load $\tilde{q}(x)$. [1 t = 9.8 kN]

x_1 と x_2 に対しプロットしたものである。ただし、自己相関関数は一般に、助変数 x_1 および x_2 に関し対称性を有し、かつ助変数 x_1 および x_2 は本研究の場合、非負の値となるので、 $K_q(x_1, x_2)$ は $x_1 \geq x_2 \geq 0$ の領域についてのみ示した。図の中のたとえば、 $[K_q(x_1, x_2)]_{\tau=x_1-x_2=2}$ とは、 $\tau=x_1-x_2=2$ (τ は橋軸方向の2点間の差を示す) を満足する x_1 と x_2 に対する $K_q(x_1, x_2)$ の値を表わしている。この図をみると、 τ が一定の場合には、 $K_q(x_1, x_2)$ はほぼ一定値をとり、したがって、分布不規則荷重の自己相関関数は τ のみの関数 $K_q(\tau)$ となるのがわかる。以上の結果より、本論文でモデル化したような自動車活荷重による分布不規則荷重は定常性を有すると考えられる。

さて、本章の荷重に関するシミュレーションの最終的な目的は荷重の自己相関関数の定式化である。そこで、このような定常不規則関数 $\tilde{q}(x)$ の自己相関関数 $K_q(\tau)$ の形を Fig. 6 のシミュレーション結果に基づきプロットすると、Fig. 7 の『Result of Simulation』で示すような曲線となる。ただし、各 τ の値に対する $K_q(\tau)$ としてはすべての標本関数を集合平均したものを示した。この計算結果を、たとえば級数などで厳密に定式化を行うと、のちの解析が非常に困難となるので、荷重の自己相関関数としては多少厳密さを欠いてものちの解析における計算の簡単化のために、式 (7) で示す指数関数の形にシミュレーション結果を回帰近似することにした。

$$K_q(\tau) = D_q e^{-\alpha|\tau|} \dots\dots\dots (7)$$

上式中、 D_q は荷重の分散であり、はりの全長にわたって定数をとる。また、 α は $[m^{-1}]$ の次元を有する正の定数である。回帰近似する際には、 D_q として、Fig. 5 から求められるシミュレーション結果 $D_q = 0.662 \text{ (t/m)}^2$ [$6.36 \times 10 \text{ (kN/m)}^2$] を用いて α のみの1次元指数回帰を行う場合と、荷重の自己相関関数の形を重視して D_q と α の2次元指数回帰を行う場合が考えられる。不規則関数論を用いた信頼性解析においては、活荷重の分散のみならず活荷重の自己相関関数の形まで考慮すべきであるので、後者の D_q と α の2次元指数回帰を行うことも

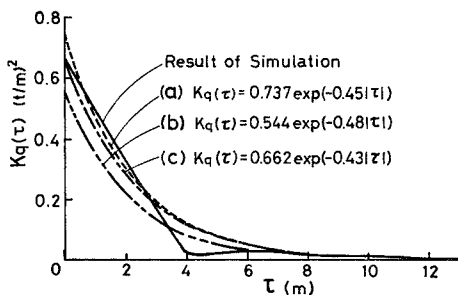


Fig. 7 Autocorrelation Function $K_q(\tau)$ of Randomly Distributed Traffic Load $\tilde{q}(x)$. [$1\text{t}=9.8\text{kN}$]

必要である。しかし、いずれの場合にも、 τ のどの区間までを回帰させるかによって、式 (7) のパラメーターが異なってくることに注意しなければならない。そこで、回帰近似を行った結果に多少なりとも確率論的意味をもたせるという意味で、 $\tau > \tau_c$ のとき不規則関数 $\tilde{q}(x)$ と $\tilde{q}(x+\tau)$ が実用上非相関とみなせるような長さを表わす相関距離¹⁷⁾

$$\tau_c = \frac{1}{D_q} \int_0^\infty |K_q(\tau)| d\tau \dots\dots\dots (8)$$

なるものを導入し、回帰近似の結果とシミュレーション結果の曲線の相関距離が類似しているものを用いて回帰曲線のパラメーターを決定することにした。相関距離をシミュレーション結果より直接求めた値は約 2.2 m となり、この値に類似する値を有する回帰曲線を求めると、 D_q と α の2次元指数回帰の場合、(a) $K_q(\tau) = 0.737 e^{-0.451\tau}$ ($\tau_c = 2.22 \text{ m}$, 回帰区間は $0 \leq \tau \leq 3 \text{ m}$) あるいは (b) $K_q(\tau) = 0.544 e^{-0.481\tau}$ ($\tau_c = 2.07 \text{ m}$, 回帰区間は $0 \leq \tau \leq 8 \text{ m}$) となり、 α のみの1次元指数回帰の場合、(c) $K_q(\tau) = 0.662 e^{-0.431\tau}$ ($\tau_c = 2.35 \text{ m}$, 回帰区間は $0 \leq \tau \leq 3.5 \text{ m}$) となる (Fig. 7 参照)。

3. 分布不規則荷重を受ける道路橋の信頼性解析

以下においては、さきにシミュレーション手法によって求めた活荷重の確率特性値を用いて単純支持された道路橋の断面内に引き起こされる静的な荷重作用の確率特性値を解析的に求め、その結果を用いて道路橋の信頼度を評価する方法について述べる。

(1) 静的応答の確率特性値

荷重によって引き起こされる静的な荷重作用のうち、本研究では道路橋の信頼性を評価するうえで重要な曲げモーメントについて考える。ただし、以下に述べる方法¹⁸⁾によれば、他の荷重作用についても同様に考えることができる。

さて、Fig. 8 に示すようなスパン l の単純ばりに既知の確率特性値を有する分布不規則荷重 $\tilde{q}(x)$ が作用している場合を考える。初等構造力学の理論によれば、は

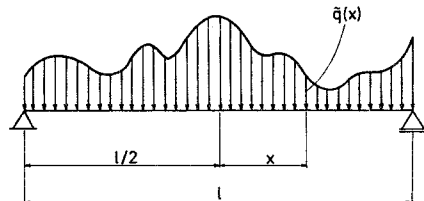


Fig. 8 Randomly Distributed Load Acting on Simply Supported Beam.

りの曲げモーメント $\tilde{M}(x)$ と分布荷重 $\tilde{q}(x)$ との間には、次のような微分関係式が成立する。

$$\frac{d^2 \tilde{M}(x)}{dx^2} = -\tilde{q}(x) \dots\dots\dots (9)$$

上式の両辺の期待値をとると、曲げモーメントの期待値 $\bar{M}(x)$ は荷重の期待値 $\bar{q}(x)$ を用いて次式より決定される。

$$\frac{d^2 \bar{M}(x)}{dx^2} = -\bar{q}(x) \dots\dots\dots (10)$$

$\bar{q}(x)$ が道路橋活荷重の場合、前章で確認したように $\bar{q}(x)$ は座標 x に関し定常性を有するので、期待値 $\bar{q}(x)$ は定数 \bar{q} となり、上式は順次積分することができる。その際、はりの両端における曲げモーメントは常に 0 であるという境界条件に気を付けると、結局、曲げモーメントの期待値 $\bar{M}(x)$ として次式を得る。

$$\bar{M}(x) = \frac{\bar{q}}{2} \left(\frac{l^2}{4} - x^2 \right) \dots\dots\dots (11)$$

次に、曲げモーメントの自己相関関数を求める。微分関係式 (9) が成立する場合不規則関数論¹⁹⁾により、曲げモーメントの自己相関関数 $K_M(x_1, x_2)$ と荷重の自己相関関数 $K_q(x_1, x_2)$ との間に次のような微分関係式が成立する¹⁹⁾。

$$\frac{\partial^4 K_M(x_1, x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = K_q(x_1, x_2) \dots\dots\dots (12)$$

したがって、 $K_q(x_1, x_2)$ が与えられれば、次式のような境界条件のもとに上式を解くことにより曲げモーメントの自己相関関数 $K_M(x_1, x_2)$ を求めることができる。

$$\begin{aligned} K_M\left(-\frac{l}{2}, x_2\right) &= K_M\left(\frac{l}{2}, x_2\right) = K_M\left(x_1, \frac{l}{2}\right) \\ &= K_M\left(x_1, -\frac{l}{2}\right) = 0 \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

上式は、“はりの両端の曲げモーメントは 0 であり、はりの任意断面の曲げモーメントとの間に何らの相関をも有していない” ということを示している。ここで、道路橋活荷重 $\tilde{q}(x)$ の自己相関関数 $K_q(x_1, x_2)$ は、式 (7) のように座標 x_1 と x_2 の差 $\tau = x_1 - x_2$ のみの指数関数として表わされることに気を付けると、式 (12) を解くことにより、結局、曲げモーメントの自己相関関数 $K_M(x_1, x_2)$ を次式のように得る¹⁹⁾。

$$\begin{aligned} K_M(x_1, x_2) &= \frac{D_q}{\alpha^4} \left\{ e^{-\frac{\alpha l}{2}} \left(\cosh \frac{\alpha l}{2} - \cosh \alpha x_1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \cosh \alpha x_2 + \frac{4 x_1 x_2}{l^2} \sinh \frac{\alpha l}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2 x_1 \sinh \alpha x_2 + x_2 \sinh \alpha x_1}{l} \right. \\ &\quad \left. + \alpha^3 (x_1^2 + x_2^2) \left(\frac{x_1 x_2}{3l} - \frac{l}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. + x_1 x_2 \left(\frac{2\alpha}{l} + \frac{\alpha^3 l}{6} \right) + \frac{\alpha^3 l^3}{24} - \frac{\alpha l}{2} \right\} \end{aligned}$$

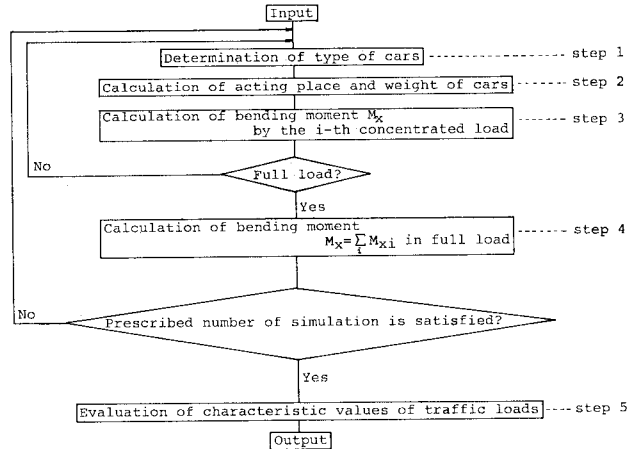


Fig. 9 Flow Chart of Simulation for Bending Moment.

$$+ e^{-\alpha|x_1 - x_2|} + \frac{\alpha^3}{6} |x_1 - x_2|^3 + \alpha |x_1 - x_2| \Big\} \dots\dots\dots (14)$$

上式の $K_M(x_1, x_2)$ は距離の差 τ のみの関数ではないので、単純に定常な分布不規則荷重が作用した場合の曲げモーメントは、座標 x を助変数とする非定常不規則関数となることがわかる。

次に、これらの特性値を用いて道路橋の信頼性の評価を行う前に、解析的に求めた特性値の妥当性を調べておくことにする。ここでは、簡単のために文献 10) でなされているシミュレーション手法によって得られた結果、すなわち、車両重量を 1 つの集中荷重として取り扱って求めた曲げモーメントの確率特性値との比較という方法で調べることにする。曲げモーメントに関するシミュレーションを行う際の車両のモデル化は、前章の活荷重のシミュレーションの場合とまったく同じとし、手順は Fig. 9 に示すフローチャートに従った。ただし、車両重量を 1 つの集中荷重として取り扱った場合の載荷位置は車両占有長 L を前後輪軸重比の逆比に内分する点とした。なお、この曲げモーメントに関するシミュレーションの繰り返し回数は 10 万回とし、スパン 25 m, 50 m, 75 m および 100 m の 4 つの場合について行った。

上述のシミュレーションの計算結果を Figs. 10 および 11 に示す。Figs. 10 および 11 は、それぞれスパン $l=25$ m の場合の各断面での曲げモーメントの期待値 $\bar{M}(x)$ および分散 $D_M(x)$ を示したものである。いずれの図においても、×印で示してあるのが曲げモーメントに関するシミュレーション結果であり、実線は式 (11) あるいは式 (14) において前章の荷重に関するシミュレーションで得られた $\bar{q}=0.712$ (t/m) [6.98 (kN/m)], $\alpha=0.45$ (m⁻¹) および $D_q=0.737$ (t/m)² [7.08 × 10 (kN/m)²] を用いた計算結果である。ただし、この α と D_q

の値は Fig. 7 の曲線 (a) の値である。これは、のちの数値計算例において、荷重の自己相関関数の形として Fig. 7 の曲線 (a) を採用することになるからである

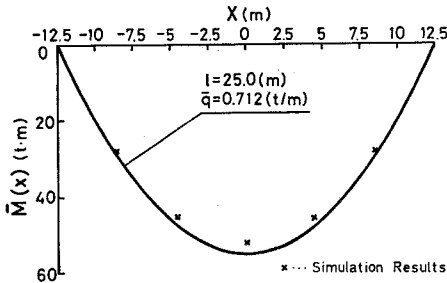


Fig. 10 Mean Value of Bending Moment $\bar{M}(x)$ versus x . [$1t=9.8\text{ kN}$]

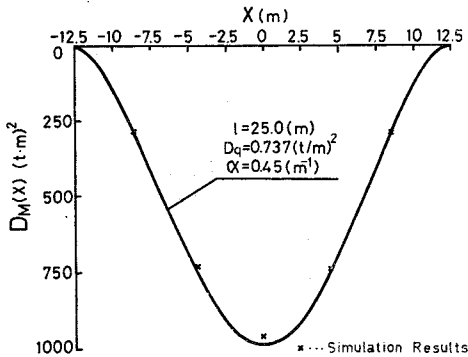


Fig. 11 Variance of Bending Moment $D_M(x)$ versus x . [$1t=9.8\text{ kN}$]

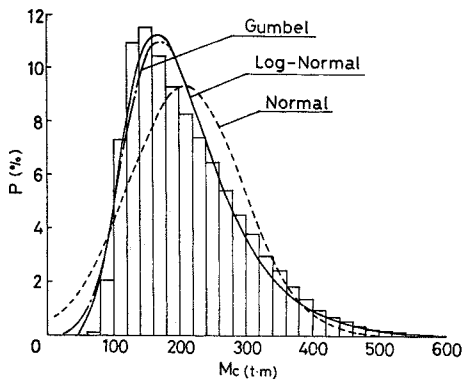


Fig. 12 Histogram of Bending Moment at Mid-Span for $l=50\text{ m}$. [$1t=9.8\text{ kN}$]

(4. 参照). これらの図をみると、式 (11) あるいは式 (14) によって解析的に求めた結果の曲線とシミュレーションによる結果とは、ほとんど一致することがわかる。ここでは、スパン $l=25\text{ m}$ の場合のみを示したが、他のスパン長の場合にも同様の結果が得られた。したがって、これらのことから、分布不規則荷重の相関関数を式 (7) のように仮定したこと、および式 (7) の D_q と α を式 (8) の相関距離なるものを導入して求めたことなどが妥当であったと思われる。したがって、道路橋の曲げモーメントに関する確率特性値は、本論文で示したような不規則関数の相関理論を用いた方法によれば、スパン l などのパラメーターを変えるたびにわざわざ複雑・面倒なシミュレーションを行わずとも、式 (11) および式 (14) を用いることによって容易に求めることができる。

さて、道路橋の信頼性解析を行うためには、このような曲げモーメントに関する確率特性値のほか、曲げモーメントの確率分布を知る必要がある。そこで、曲げモーメントが従う分布法則を、先程の曲げモーメントに関するシミュレーションによって得たデータを用いて調べてみた。Fig. 12 は、スパン $l=50\text{ m}$ の場合のスパン中央における曲げモーメントのヒストグラムを示したもので、正規分布、対数正規分布およびグンベル分布の理論頻度曲線も合わせて示してある。この図をみると、最頻値付近における曲げモーメントの確率分布は正規分布よりも、対数正規分布あるいはグンベル分布に近いことがわかる。また、ここでは紙面の都合上図示することは省くが、この確率分布の形は、はりの断面 x およびスパン長 l にかかわらずほぼ同じになることが確認された。しかし、信頼性解析を行うのに必要なのは確率分布の“すそ”の部分であるから、シミュレーション結果の“すそ”の部分で合うような確率分布を捜すべきである。Table 1 は、信頼性解析を行うのに必要であろうと考えられる $\bar{M}_c + 2\sigma_{M_c}$ (\bar{M}_c および σ_{M_c} はそれぞれシミュレーションの結果得られたスパン中央における曲げモーメントの平均および標準偏差である) 以上の曲げモーメントに対してシミュレーション結果と各確率分布の累積確率とを示したものである。ただし、スパン長にかかわらず同じ傾向がみられたので、スパン 50 m のものを示した。この表をみると、分布の“すそ”の部分では正規分布、対数正規分布およびグンベル分布のいずれもシ

Table 1 Various C.D.F. of Bending Moment at Mid-Span \bar{M}_c for $l=50\text{ m}$, M_c =Mean of \bar{M}_c (Results of Simulation), σ_{M_c} =Standard Deviation of \bar{M}_c (Results of Simulation).

Distribution	$M_c + 2\sigma_{M_c}$	$M_c + 3\sigma_{M_c}$	$M_c + 4\sigma_{M_c}$	$M_c + 5\sigma_{M_c}$	$M_c + 6\sigma_{M_c}$	$M_c + 7\sigma_{M_c}$	$M_c + 8\sigma_{M_c}$
Results of Simulation	0.956 18	0.991 32	0.998 36	0.999 83	0.999 98	1.0	1.0
Normal	0.977 43	0.998 89	0.999 97	1.0	1.0	1.0	1.0
Log-Normal	0.957 15	0.988 09	0.996 10	0.998 84	0.999 59	0.999 87	0.999 95
Gumbel	0.957 92	0.988 94	0.996 66	0.999 14	0.999 74	0.999 93	0.999 98
Corrected Normal	0.953 54	0.991 49	0.998 71	0.999 90	0.999 99	1.0	1.0

ミュレーション結果と大きく異なることがわかる。そこで著者らは、確率分布の最頻値付近では対数正規分布に従い、“すそ”の部分でシミュレーション結果とよく合うように正規分布を修正した確率分布を考えた（以後、修正正規分布と名付ける）。具体的には、対数正規分布の最頻値をこの修正正規分布の平均値 \bar{M}_c' とし、信頼性解析を行うのに必要なシミュレーション結果の“すそ”の面積（ 10^{-2} 程度）の部分に正規分布の“すそ”の部分が入るようにこの修正正規分布の標準偏差 σ_{M_c}' を決定した。すなわち、期待値 \bar{M}_c' および標準偏差 σ_{M_c}'

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_c' &= \exp(\lambda_c - \zeta_c^2) \\ \sigma_{M_c}' &= \frac{(\bar{M}_c + 2.3 \sigma_{M_c}) - \bar{M}_c'}{\ln(\bar{M}_c + 2.3 \sigma_{M_c}) - \lambda_c} \cdot \zeta_c \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

を有する正規分布を修正正規分布と考えるわけである。上式中、 ζ_c 、 λ_c は次式で与えられる。

$$\zeta_c^2 = \ln\left(1 + \frac{\sigma_{M_c}^2}{\bar{M}_c^2}\right), \lambda_c = \ln \bar{M}_c - \frac{1}{2} \zeta_c^2 \dots\dots\dots (16)$$

以上、曲げモーメントの従う確率分布法則について調べた。その結果、曲げモーメントは修正正規分布に従うと考えた方がよいことがわかったが、曲げモーメントは数値計算上便利な正規分布に従うとして解析を行っても定性的な傾向は把握することができると考えられるので、まず、曲げモーメントは正規分布に従うとして信頼性解析を行う。その後、その解析結果を踏まえて、曲げモーメントが修正正規分布に従う場合の信頼性解析を行うことにする。

(2) 信頼性の評価

a) 不規則関数論による信頼性

曲げモーメント $\tilde{M}(x)$ が与えられたレベル（許容曲げモーメント） $M_a(x)$ をはりの全長のどこか 1 断面でも超過すれば、道路橋は破壊すると考えて破壊確率を求める。いま、 $\tilde{M}_0(x) = \tilde{M}(x) - M_a(x)$ で定義される新たな不規則関数を導入すると、破壊という事象は $\tilde{M}_0(x)$ がレベル 0 を正超過することであると考えられる。 $\tilde{M}_0(x)$ が非正常な正規分布に従うと仮定すれば、不規則関数 $\tilde{M}_0(x)$ とその導関数 $\dot{\tilde{M}}_0(x) = d\tilde{M}_0(x)/dx$ の結合確率密度 $p(M_0, \dot{M}_0|x)$ は、

$$\begin{aligned} p(M_0, \dot{M}_0|x) &= \frac{1}{2\pi\sigma_{M_0}\sigma_{\dot{M}_0}\sqrt{1-\rho_0^2}} \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_0^2)}\left[\frac{(M_0-\bar{M}_0)^2}{\sigma_{M_0}^2}\right.\right. \\ &\quad \left.\left.-\frac{2\rho_0(M_0-\bar{M}_0)(\dot{M}_0-\bar{\dot{M}}_0)}{\sigma_{M_0}\sigma_{\dot{M}_0}} + \frac{(\dot{M}_0-\bar{\dot{M}}_0)^2}{\sigma_{\dot{M}_0}^2}\right]\right\} \\ &\dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

のような¹⁹⁾。したがって、はりの任意断面 x における平均超過回数 $\nu_+(0|x)$ は、超過の公式より次式のようになる²⁰⁾。

$$\begin{aligned} \nu_+(0|x) &= \int_0^\infty p(0, \dot{M}_0|x) \dot{M}_0 d\dot{M}_0 \\ &= \frac{\sigma_{\dot{M}_0}}{2\pi\sigma_{M_0}} \exp\left(-\frac{\bar{M}_0^2}{2\sigma_{M_0}^2}\right) \\ &\times \left(\sqrt{1-\rho_0^2} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho_0^2)}\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\times \left(\frac{\bar{\dot{M}}_0}{\sigma_{\dot{M}_0}} - \frac{\rho_0\bar{M}_0}{\sigma_{M_0}}\right)^2\right] + 2\pi\left(\frac{\bar{\dot{M}}_0}{\sigma_{\dot{M}_0}} - \frac{\rho_0\bar{M}_0}{\sigma_{M_0}}\right)\right. \\ &\quad \left.\times \left\{1 - \Phi\left[-\frac{1}{\sqrt{1-\rho_0^2}}\left(\frac{\bar{\dot{M}}_0}{\sigma_{\dot{M}_0}} - \frac{\rho_0\bar{M}_0}{\sigma_{M_0}}\right)\right]\right\}\right) \\ &\dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

式 (17) と式 (18) において、 $\bar{M}_0(x)$ および $\sigma_{M_0}(x)$ はそれぞれ $\tilde{M}_0(x)$ の期待値および標準偏差であり、また $\bar{\dot{M}}_0(x)$ および $\sigma_{\dot{M}_0}(x)$ はそれぞれ $\dot{\tilde{M}}_0(x)$ の期待値および標準偏差である。これらは、式 (11) と式 (14) を以下に示す式に代入することによって求められる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_0(x) &= \bar{M}(x) - M_a(x) \\ \sigma_{M_0}(x) &= \sqrt{D_{M_0}(x)}, D_{M_0}(x) = K_M(x, x) \\ \bar{\dot{M}}_0(x) &= \frac{d\bar{M}_0(x)}{dx} = \bar{M}'(x) - M_a'(x) \\ \sigma_{\dot{M}_0}(x) &= \sqrt{D_{\dot{M}_0}(x)}, D_{\dot{M}_0}(x) = K_{\dot{M}}(x, x) \\ K_{\dot{M}}(x, x) &= \frac{\partial^2 K_M(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{\substack{x_1=x \\ x_2=x}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

また、式 (17) と式 (18) において、 $\rho_0(x)$ は同一断面における $\tilde{M}_0(x)$ とその導関数 $\dot{\tilde{M}}_0(x)$ との間の相互関係係数で、

$$\left. \begin{aligned} \rho_0(x) &= \frac{K_{M\dot{M}}(x, x)}{\sqrt{D_M(x) \cdot D_{\dot{M}}(x)}} \\ K_{M\dot{M}}(x, x) &= \frac{\partial K_M(x_1, x_2)}{\partial x_2} \Big|_{\substack{x_1=x \\ x_2=x}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

で表わされる。さらに、式 (18) における $\Phi(\cdot)$ は、式 (3) で定義される確率積分である。

さて、はりが安全であるためには、許容曲げモーメント $M_a(x)$ は不規則関数 $\tilde{M}(x)$ に比べてかなり大きいものでなければならない。そのような場合には $\tilde{M}_0(x)$ が正領域へ超過する事象はまれであるので、 $\tilde{M}_0(x)$ の正超過回数はポアソン分布で近似でき、したがって初通過破壊確率 Q は次式より求めることができる。

$$Q = 1 - \exp\left\{-\int_{-1/2}^{1/2} \nu_+(0|x) dx\right\} \dots\dots\dots (21)$$

b) 不規則変数論による信頼性

一般に、分布不規則荷重が道路橋に作用する場合、ある特定の断面が危険であるということができないので、はりの全長にわたる解析、すなわち不規則関数による信頼性解析が必要である。しかし、道路橋の危険断面がスパン中央であることがわかっているような特別な場合には、スパン中央だけの荷重作用に注目した不規則変数に

よる信頼性解析を行えば、信頼性を評価することができる。以下に、不規則変数による信頼性解析の手法¹⁾について述べる。

スパン中央における曲げモーメント \tilde{M}_c の確率密度関数を $f_{M_c}(M)$ とすると、構造物が破壊するのは許容曲げモーメント M_a との間に $\tilde{M}_c \geq M_a$ なる不等式が満たされるときであるから、破壊確率 Q は、次式で与えられる。

$$Q = P[\tilde{M}_c \geq M_a] = \int_{M_a}^{\infty} f_{M_c}(M_c) dM_c$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{M_a - \bar{M}_c}{\sqrt{D_{M_c}}}\right) \dots \dots \dots (22)$$

上式において、最後の式は曲げモーメントが正規分布に従うとした場合の式である。また、 \bar{M}_c および D_{M_c} はスパン中央における曲げモーメント \tilde{M}_c の期待値および分散であり、それぞれ式 (11) および式 (14) において $x=0$ あるいは $x_1=x_2=0$ とすることにより求められる。 $\Phi(\cdot)$ は、式 (3) の正規確率積分である。また、曲げモーメントが修正正規分布 (式 (15) 参照) に従う場合には、式 (22) において \bar{M}_c 、 D_{M_c} の代わりにそれぞれ式 (15) の \bar{M}_c' 、 $\sigma_{M_c}'^2$ を用いることにより破壊確率 Q を求めることができる。

4. 数値計算例および考察

2. で行ったシミュレーション結果と 3. で誘導した諸式を用いて数値計算を行い、道路橋の空間領域での信頼性解析を行った。その際、実際に道路橋を設計する場合には橋軸に沿って断面を一定とすることが多いので、許容曲げモーメント $M_a(x)$ は橋軸方向に一定とした。この仮定は、スパンが数十mと長くなると許されないが、

ここでは計算の簡単のためこのような仮定を設けた。

まず、曲げモーメントが正規分布に従う場合の不規則関数による信頼性解析の結果を示す。Fig. 13 は、スパン $l=50\text{m}$ の場合の安全率 ν と破壊確率 Q との関係を示したものであり、図中の (a), (b) および (c) はそれぞれ、道路橋活荷重 $\bar{q}(x)$ の相関関数 $K_q(\tau)$ として Fig. 7 の曲線 (a), (b) および (c) を用いて数値計算を行ったものである。ここで、安全率 ν とはスパン中央における曲げモーメントの期待値 \bar{M}_c に対する許容曲げモーメント M_a の比 M_a/\bar{M}_c を示している。この図をみると、安全率 ν を大きくすると破壊確率 Q は小さくなるという自明の事実と一致することがわかる。また、図中の曲線 (a) と (c) は解析結果がほとんど一致するが、これらは曲線 (b) に比べ、破壊確率 Q が大きくなっていることがわかる。曲線 (a) と (c) は分布不規則荷重の自己相関関数 $K_q(\tau)$ として、そのパラメーター τ の小さい区間を重視して回帰近似したものをを用いた計算結果であるから、道路橋の破壊確率の評価を行う場合、荷重の自己相関関数のパラメーター τ の小さい区間が影響してくることがわかる。そこで、 $K_q(\tau)$ の関数形として、本論文では設計上一番安全側となる Fig. 7 の回帰曲線 (a) を採用することにする。次に、Fig. 14 は破壊確率 Q を一定とした場合のスパン l と設計用曲げモーメント M_a との関係を示したものである。この図には、参考のために、現行道路橋活荷重²⁾による設計用曲げモーメントも L-20i と付記して表示してある。ただし、この現行道路橋活荷重による曲げモーメントの値は、本研究の仮定に従い、主桁数1本、幅員3mの橋について計算したものである。このようなグラフを作成しておけば、所要の信頼度のもとにスパン l の道路橋を設計する場合の設計用曲げモーメントが求められる大変

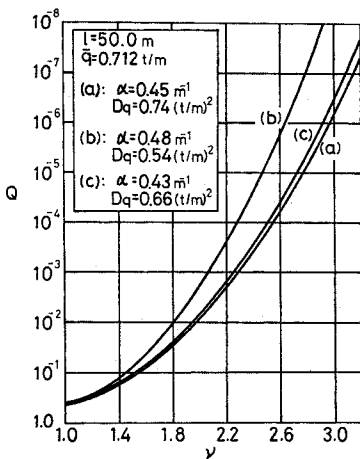


Fig. 13 Relationship between Probability of Failure Q and Safety Factor ν for $l=50\text{m}$, $\bar{q}=0.712\text{t/m}$. [$1\text{t}=9.8\text{kN}$]

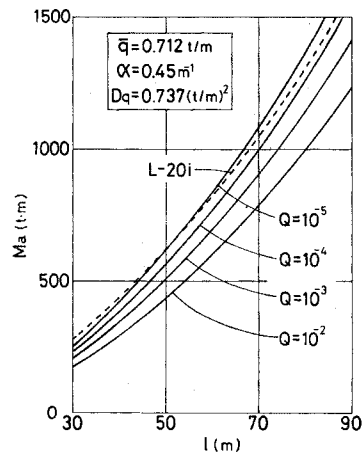


Fig. 14 Design Value of Bending Moment due to Distributed Load on Highway Bridge. [$1\text{t}=9.8\text{kN}$]

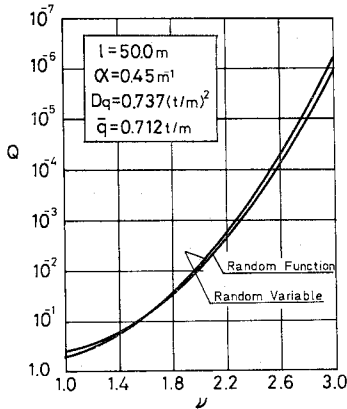


Fig. 15 Relationship between Probability of Failure Q and Safety Factor ν for $l=50$ m, $\bar{q}=0.712$ t/m and $M_a(x)=$ Constant. [1 t=9.8 kN]

便利であると思われる。

次に、はりのスパン中央における曲げモーメントのみを用いた不規則変数による信頼性解析の結果を示す。曲げモーメントは今までと同様に正規分布とする。Fig. 15 はスパン $l=50$ m の場合の安全率 ν と破壊確率 Q との関係を示したものであり、比較のために不規則関数による信頼性解析の結果も合わせて示してある。すなわち、図中に“Random Variable”とあるのが式 (22) を用いた不規則変数による信頼性解析の結果であり、“Random Function”とあるのが式 (21) を用いた不規則関数による信頼性解析の結果である。この図をみると、不規則変数による信頼性解析は、不規則関数による信頼性解析の結果とほとんど一致することがわかる。したがって、許容曲げモーメントが橋軸方向に一定の場合には、スパン中央付近が危険断面になるものと考えられる。これは単純支持された道路橋の場合には分布不規則荷重による曲げモーメントの平均値まわりの空間的変動性が少なく、スパン中央付近以外では全スパンにわたって一定のレベルを曲げモーメントが超過する機会が少なくなるからであろうと思われる²²⁾。ただし、上述の結果は、不規則関数論を用いることの必要性を否定するものではない。なぜなら、不規則関数論を用いなければ、式 (11) および (14) のような曲げモーメントに関する確率特性値を解析的に得ることができないからである。また、ここでは等断面（許容曲げモーメント一定）と仮定しているが、変断面の場合あるいは不静定ばりの場合は不規則関数論による信頼性解析が必要となるであろう。

さて、これまでの計算結果は、曲げモーメントが正規分布すると仮定した場合のものであるが、3. (1) の最後のところで述べたように信頼性解析を行う場合には、曲げ

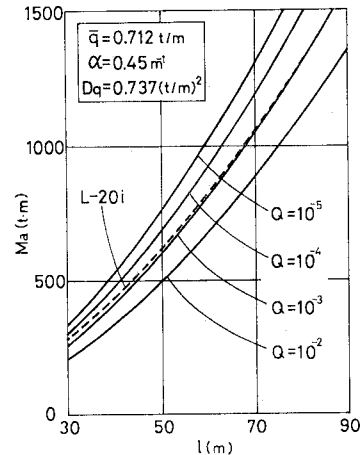


Fig. 16 Design Value of Bending Moment due to Distributed Load on Highway Bridge (for the Case of Corrected Normal Distribution). [1 t=9.8 kN]

モーメントは修正正規分布に従うとして考えることができる。曲げモーメントが正規分布に従わない場合でも、定性的な傾向は正規分布に従う場合と同じであると考えられるので、許容曲げモーメントが橋軸方向に一定の場合には、スパン中央における不規則変数による信頼性解析を行うことができる（式 (22) 参照）。このようにして数値計算を行った結果を、Fig. 16 に示す。Fig. 16 は破壊確率 Q を一定とした場合のスパン l と設計用曲げモーメント M_a との関係を示したものであり、Fig. 14 に示した現行道路橋活荷重による設計用曲げモーメントも合わせて示しておいた。Fig. 14 と Fig. 16 を比べると、曲げモーメントが修正正規分布に従う場合は、所要の信頼度を得るためには、正規分布に従う場合よりも許容曲げモーメントを大きくしなければならないことがわかる。

5. あとがき

道路橋に作用する活荷重による静的な荷重作用（曲げモーメント）の確率特性を不規則関数の相関理論を用いて解析的に求め、さらに不規則関数の超過の理論を用いて道路橋の信頼性の評価を行った。その結果をまとめると以下のようなものである。

(1) 道路橋の信頼性を評価する場合、危険状態である活荷重満載の交通渋滞時を考慮すべきであると考え、その荷重状態を分布不規則荷重としてモデル化し、道路橋活荷重の確率特性値（期待値、分散および自己相関関数）をシミュレーション手法によって求めた。その結果、渋滞時における道路橋活荷重は橋軸に沿う座標値に関して定常な不規則関数でモデル化できることが明らか

になった。

(2) (1) で得られた活荷重の確率特性値を用いて、道路橋の信頼性を評価するうえで重要な活荷重による曲げモーメントの確率特性値を、不規則関数の相関理論によって解析的に求めた。また、シミュレーション手法によって得られた結果との比較を行って、その結果の妥当性を示した。

(3) (2) のようにして評価した曲げモーメントが許容レベルを超過する事象の確率として道路橋の破壊確率を定義し、その破壊確率の算定式を空間領域において誘導した。

(4) (3) で誘導した式を用いて数値計算を行い、道路橋の空間領域における信頼性に関して考察を行った。その結果をまとめると次のようになる。すなわち、許容曲げモーメントを橋軸方向に一定とした場合には、危険断面はスパン中央付近になり、したがって、このような場合には式(21)の不規則関数による信頼性解析を行わずとも、スパン中央における曲げモーメントの値を用いて式(22)による信頼性解析を行えばよいことがわかった。

本論文で仮定した条件のもとにおいてではあるが、Fig. 16 のようなグラフを用意しておけば、所要の信頼度のもとにおいて道路橋の活荷重による設計用曲げモーメントを規定することができる。なお、本研究は、道路橋に作用する活荷重およびそれによって断面内に生ずる曲げモーメントの空間的変動性を考慮した信頼性解析の1つの方法を示そうとしたもので、実際の道路橋に適用するには、シミュレーションの方法およびシミュレーションに用いるデータなどにさらに吟味の余地があるものと考えている。

本研究における数値計算には、京都大学計算機センターの FACOM M 200 および鳥取大学計算機センターの HITAC M 150 を使用した。

最後に、本研究を遂行するにあたり数値計算そのほかにご協力いただいた鳥取大学構造工学研究室の大学院生山本克之君および学部生近藤武司君、小西敏夫君に謝意を表わす次第である。

参 考 文 献

1) 西村 昭：道路橋の安全性に及ぼす自動車荷重の影響，土

- 木学会論文報告集，第 43 号，pp. 23~28, 1957.2.
- 2) 西村 昭：荷重列としての自動車交通流の二，三の解析，土木学会誌，第 46 巻 2 号，pp. 37~42, 1961.2.
- 3) 小堀為雄・吉田 博：電子計算機による自動車交通流機型の作成について，金沢大学工学部紀要，第 3 巻 3 号，pp. 228~235, 1964.6.
- 4) 中川建治：換算等分布活荷重の確率論的考察，土木学会論文報告集，第 127 号，pp. 1~8, 1966.3.
- 5) 中川建治：はりに作用する荷重の統計的な扱いについて，土木学会論文報告集，第 175 号，pp. 15~22, 1970.3.
- 6) 中川建治：静荷重に対するはりの応答の極値に関する二，三の考察，土木学会論文報告集，第 183 号，pp. 31~42, 1970.11.
- 7) 中川建治：不規則車両配列に対する道路橋の静的応答の確率統計的研究，土木学会論文報告集，第 204 号，pp. 15~22, 1972.8.
- 8) 谷口博昭：橋梁の安全性の統計確率論的考察，東京大学土木工学科卒業論文，1972.4.
- 9) 星谷 勝・日野虎彦：道路橋活荷重の検討，土木学会第 30 回年次学術講演会概要集，I-296，pp. 607~608, 1975.10.
- 10) 藤野陽三・伊藤 学・遠藤元一：シミュレーションに基づく道路橋設計活荷重の評価，土木学会論文報告集，第 286 号，pp. 1~13, 1979.6.
- 11) 建設省土木研究所：橋梁活荷重の実態と設計安全率，土木研究所資料，Vol. 1534, 1979.
- 12) 岡林隆敏：不規則な分布荷重を受けるはりの解析，土木学会論文報告集，第 316 号，pp. 11~21, 1981.12.
- 13) Ove Ditlevsen: Extremes and First Passage Times, Thesis, Technical University of Denmark, Copenhagen, 1971.
- 14) V.K. Hasija: Effects of Random Moving Loads on Bridge Structures, Ph.D. Dissertation, University of Pittsburgh, 1972.
- 15) 建設省：全国交通情勢調査，1974 年度版。
- 16) J.S. ベンダット・A.G. ピアソル共著，徳丸・添田・紫田・中溝・秋月・山川共訳：ランダムデータの統計的処理，培風館，1980.5.
- 17) 小西一郎・高岡宣善：構造動力学，丸善，1973.
- 18) ルジャーニーツィン著，高岡宣善訳：構造物の信頼性解析，丸善，1980.
- 19) 高岡宣善：工学のための応用不規則関数論，共立出版，1975.
- 20) B.B. ボローチン著，小林繁夫ほか共訳：構造設計の確率論的方法と信頼性問題，培風館，1981.
- 21) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説（昭和 55 年 2 月），丸善，1980.
- 22) 白木 渡・高岡宣善：非定常不規則な初期たわみを有する圧縮部材の信頼性解析，土木学会論文報告集，第 297 号，pp. 37~46, 1980.5.

(1982.6.7・受付)