

## ねじり変形を受けるはりのそり関数の評価に関する研究

ON THE EVALUATION OF WARPING FUNCTION OF  
BEAM UNDER COMBINED TORSION

馬場 俊介\*・山元 俊哉\*\*

By Shunsuke BABA and Toshiya YAMAMOTO

## 1. 序

純ねじり、そり拘束ねじりのように外力としてねじりモーメントだけが作用する場合、あるいは、曲げねじり、圧縮ねじりのような連成ねじり問題、さらには、2軸曲げ、非対称断面ばりの曲げのように横倒れ座屈につながるねじり問題においては、はり断面のねじり剛性、曲げねじり剛性などのねじりに関する断面特性を評価する必要がある。その場合、もし、はりが薄肉断面と判断できるならば、ねじり剛性を用いた近似的な評価方法は非常に簡単であり、板厚方向の変化を無視することで弾塑性問題にもそのまま応用できる。しかし、この方法では正方形を極端な例とする中実断面を取り扱うことはできないし、厚肉断面の場合も、板の肉厚と幅との比にもよるが、精度上の問題が残る。それに、薄肉といえども、閉断面と開断面とを別々に取り扱わなければならないという不便さもある。そこで、馬場・梶田は断面のねじり特性を表わすパラメータとしてねじり抵抗を用いる代わりに、より基本的な量としての「そり関数  $\varphi$ 」の分布を2次元的に求めることを考えて、長方形断面の棒の純ねじりを厳密に数値解析する手法を提案した<sup>1)</sup>。その後、この方法を熱応力問題を含む面外変形問題<sup>2)</sup>、中空正方形断面<sup>3)</sup>に適用した報告を発表したが、本報ではそれらを取りまとめるとともに、より正確なそり関数の定式化を行い、精度と収束性の向上をめざしている。

本報では St. Venant のそり関数  $\varphi$  の2次元弾塑性状態における誘導と、その曲げねじり問題への適用を目的とするので、はりの1次元化に対する近似仮定として Bernoulli-Euler の仮定を準用する。すなわち、曲げによる変形に対してはせん断変形を無視することにより平面保持の法則が成り立つとし、そり変形は、そり関数  $\varphi$

による付加項を Bernoulli 状態に加え合わせることで十分表わされるものとする。

ねじりに加えて曲げあるいは圧縮を受けるはりを、はり要素を用いた1次元有限要素解析法によって解こうとする場合、本報のように「そり関数  $\varphi$ 」を直接誘導する方法では、剛性マトリックス中のねじりに関連する項は、そり関数  $\varphi$  とその導関数  $\varphi_{,y}$ 、 $\varphi_{,z}$  ( $y$  と  $z$  は、はり断面を定義する直角座標) の3つの組合せで与えられる。つまり、そり関数を直接誘導して構造解析に利用する場合には、同時に  $\varphi_{,y}$  と  $\varphi_{,z}$  についても断面における2次元分布が求められているべきである。これら3つの量 ( $\varphi$ ,  $\varphi_{,y}$ ,  $\varphi_{,z}$ ) のはり要素中央における断面内の分布状態は、増分応力つり合い式から誘導される St. Venant のそり関数に関する2階の偏微分方程式と、 $y$  軸と  $z$  軸に沿っての断面外縁部におけるせん断応力に関する条件式とを用いて、Galerkin 有限要素法<sup>4)</sup>により求める。Galerkin 有限要素法を用いる理由は、基本となる微分方程式が既知であり、さらに、境界条件の取込みが非常に容易であるからで、本問題と熱伝達問題における式の構成との強い類似性に注目した結果である。

そり関数は、先に述べたように増分応力つり合い式によって規定されるから、材料非線形、有限変形によって刻々変化する量である。従来の1次元はり解析では、この「変化」が近似的に求められていたため、厚肉構造を含めた任意断面ばりには適用できなかったのであるが、そり関数を直接評価することにより、このような拘束はなくなり、どのような断面のはりの非線形問題にも適用可能となった。

数値計算の結果は、まず、そり関数とその導関数の断面での分布形状を示す。対象とするのは、2軸対称の中実(長方形)断面、厚肉閉(中空正方形)断面、厚肉開(H型)断面と1軸対称の薄肉開(□型)断面の4ケースで、弾性状態でのそり関数とその導関数の分布を示す。また、このようにして求められるそり関数を応用し

\* 正会員 工博 名古屋大学助教授 工学部地盤工学教室

\*\* 正会員 工修 住友重機械工業(株)

たはりの解析の一例として、上記4ケースの断面について、純ねじりを受けるときのねじりモーメントとねじり角の関係を示す（微小変形，弾完全塑性）．さらに、より複雑な荷重の組合せの例として、2方向に偏心した圧縮を受ける（2軸曲げ）厚肉開断面ばりと、片持ち□型ばりの面外変形を解析する（有限変形，弾完全塑性）．

2. そり関数を用いたはり要素の定式化

微小変形，弾性の仮定のもとではりのねじり問題を解く場合には、そり関数の評価は応力状態とはまったく無関係に決められるが、本報で取り扱おうとする有限変形，弾完全塑性という非線形問題では、後述するように、そり関数に関する2階の偏微分方程式の中に、増分変位，全変位，増分塑性ひずみなどの量を取り込まれてしまう．したがって、そり関数の誘導を説明する前に、1次元はり要素を用いる有限要素解析に使われる変位，ひずみなどの仮定式を説明しておく必要がある．この部分に本報の主眼があるわけではないから、ごく簡単な記述にとどめる．

St. Venant のねじり問題でそり拘束の影響を考慮すると、ひずみに関して  $\epsilon_y = \epsilon_z = \tau_{yz} = 0$  とすることができる．ここに、 $y$  と  $z$  ははり断面内の任意の点を原点とする直交座標である．したがって、はり要素についての仮想仕事は、

$$\delta W = \int_V (\sigma_x \delta \epsilon_x + \tau_{yx} \delta \tau_{yx} + \tau_{zx} \delta \tau_{zx}) dV \dots (1)$$

となる ( $\sigma, \tau$  は応力を表す)．さて、断面内の任意の点の変位  $u, v, w$  は、序で述べたように解析の対象をそり変形のみを含む Bernoulli 状態に限定し、曲げによるせん断変形を無視すると、座標原点 ( $y=z=0$ ) での値  $u_0, v_0, w_0$  を用いて、次のように近似的に表される<sup>5)</sup>．

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 - y(v_{0,x} \cos \theta_0 + w_{0,x} \sin \theta_0) \\ &\quad - z(w_{0,x} \cos \theta_0 - v_{0,x} \sin \theta_0) + \varphi_0 \theta_{0,x} \\ v &= v_0 - z \sin \theta_0 - y(1 - \cos \theta_0) \\ w &= w_0 + y \sin \theta_0 - z(1 - \cos \theta_0) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

ここに、 $\theta_0$  はねじり角、 $x$  ははりの軸方向座標、 $\varphi_0$  は座標原点に関する断面のそり関数である．そり関数  $\varphi_0$  は、本来は  $x, y, z$  の関数であるが、はりを軸方向に細分割するときの1要素内では近似的に  $x$  方向に一樣と仮定する．すなわち、 $\varphi_0$  は  $y$  と  $z$  のみの関数とする．そり関数の  $x$  方向の変化が問題となるのは、降伏域が発生したり、有限変形の影響を考慮したりする場合で、それも、そりに拘束があるか、曲げモーメントが作用するときに限られる．このような場合には、要素ごとに計算す

るそり関数を、要素数を多くして細かく計算することにより、そり関数の軸方向の変化が間接的に評価できよう．また、式(2)を使うにあたっては、外力はすべて座標原点 ( $y=z=0$ ) に作用するよう適当に換算する．したがって、断面の重心とせん断中心が一致しないような場合でも、座標原点を重心にもってくることにより、そして、外力をすべて座標原点に関する量に換算することにより、式(2)をそのまま用いることができる．式(2)の変位式によると微小変形・弾性の場合でも、 $u$  は  $\varphi_0(y, z)$  を使って表わされているため、非線形表示のようにもみえるが、 $\varphi_0$  は断面について積分されてしまうので、微小変形・弾性では剛性行列自体は線形となる．

有限変形を仮定する場合のひずみと変位の関係式

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= u_{,x} + \frac{1}{2}(v_{,x}^2 + w_{,x}^2) \\ \tau_{yx} &= u_{,y} + v_{,x} + (v_{,y}v_{,x} + w_{,y}w_{,x}) \\ \tau_{zx} &= u_{,z} + w_{,x} + (v_{,z}v_{,x} + w_{,z}w_{,x}) \end{aligned} \right\} \dots \dots (3)$$

を仮想仕事の式(1)に代入し、Total Lagrangean の方式で増分表示すると、次のようになる．

$$\begin{aligned} \delta \dot{W} = \int_V [ & E_t \{ \dot{u}_{0,x} - y^* \dot{v}_{0,xx} + v_{0,x} \dot{v}_{0,x} - z^* \dot{w}_{0,xx} \\ & + w_{0,x} \dot{w}_{0,x} + \varphi_0 \dot{\theta}_{0,xx} + (y^2 + z^2) \theta_{0,x} \dot{\theta}_{0,x} \\ & + (z^* v_{0,xx} - y^* w_{0,xx}) \dot{\theta}_0 \} \{ \delta \dot{u}_{0,x} - y^* \delta \dot{v}_{0,xx} \\ & + v_{0,x} \delta \dot{v}_{0,x} - z^* \delta \dot{w}_{0,xx} + w_{0,x} \delta \dot{w}_{0,x} \\ & + \varphi_0 \delta \dot{\theta}_{0,xx} + (y^2 + z^2) \theta_{0,x} \delta \dot{\theta}_{0,x} \\ & + (z^* v_{0,xx} - y^* w_{0,xx}) \delta \dot{\theta}_0 \} \\ & + G_t \{ (\varphi_{0,y} - z) \dot{\theta}_{0,x} \} \{ (\varphi_{0,y} - z) \delta \dot{\theta}_{0,x} \} \\ & + G_t \{ (\varphi_{0,z} + y) \dot{\theta}_{0,x} \} \{ (\varphi_{0,z} + y) \delta \dot{\theta}_{0,x} \} \\ & + \sigma_x \{ (\dot{v}_{0,x} - z^* \dot{\theta}_{0,x} - y^* \theta_{0,x} \dot{\theta}_0) \delta \dot{v}_{0,x} \\ & + (\dot{w}_{0,x} + y^* \dot{\theta}_{0,x} - z^* \theta_{0,x} \dot{\theta}_0) \delta \dot{w}_{0,x} \\ & + (-z^* \dot{v}_{0,x} + y^* \dot{w}_{0,x} + (y^2 + z^2) \dot{\theta}_{0,x}) \delta \dot{\theta}_{0,x} \\ & + (-y^* \dot{v}_{0,x} - z^* \dot{w}_{0,x} \\ & + (y^2 + z^2) \theta_{0,x} \dot{\theta}_0) \theta_{0,x} \delta \dot{\theta}_0 \} \\ & + \tau_{yx} \{ -\dot{\theta}_0 \sin \theta_0 \delta \dot{v}_{0,x} + \dot{\theta}_0 \cos \theta_0 \delta \dot{w}_{0,x} \\ & + y \dot{\theta}_0 \delta \dot{\theta}_{0,x} + (-\dot{v}_{0,x} \sin \theta_0 + \dot{w}_{0,x} \cos \theta_0 \\ & + y \dot{\theta}_{0,x} - 2 z \theta_{0,x} \dot{\theta}_0) \delta \dot{\theta}_0 \} \\ & + \tau_{zx} \{ -\dot{\theta}_0 \cos \theta_0 \delta \dot{v}_{0,x} - \dot{\theta}_0 \sin \theta_0 \delta \dot{w}_{0,x} \\ & + z \dot{\theta}_0 \delta \dot{\theta}_{0,x} + (-\dot{v}_{0,x} \cos \theta_0 - \dot{w}_{0,x} \sin \theta_0 \\ & + z \dot{\theta}_{0,x} + 2 y \theta_{0,x} \dot{\theta}_0) \delta \dot{\theta}_0 \} ] dV \end{aligned} \dots \dots \dots (4)$$

ここに、 $(\dot{\quad})$  は増分量であることを意味する． $E_t(y, z)$ 、 $G_t(y, z)$  は接線弾性係数と接線せん断弾性係数、 $y^* = y \cos \theta_0 - z \sin \theta_0$ 、 $z^* = z \cos \theta_0 + y \sin \theta_0$  である．

はり要素としては、3節点15自由度のはり要素を用いる<sup>6)</sup>．未知量は、はり要素両端における  $u_0, v_0, w_0, \theta_0, v_{0,x}, w_{0,x}, \theta_{0,x}$  とはり要素中央の  $u_0$  の15であり、要素内の中立軸変位  $u_0$  を2次の、 $v_0, w_0, \theta_0$  を3次の補間関数で近似する．式(4)の増分仮想仕事の式に補間式

を入れて、節点変位  $\{\dot{U}\}$  の項で記述すると、

$$\delta \dot{W} = \{\delta \dot{U}\}^T [K_U] \{\dot{U}\} \dots \dots \dots (5)$$

となる。[K\_U] は要素剛性行列である。節点荷重を  $\{\dot{F}\}$  とすると、増分外力による仮想仕事は、

$$\delta \dot{W} = \{\delta \dot{U}\}^T \{\dot{F}\} \dots \dots \dots (6)$$

だから、最終的なつり合い方程式は、式 (5) と (6) より

$$[K_U] \{\dot{U}\} = \{\dot{F}\} \dots \dots \dots (7)$$

となる。各要素についてたてられた式 (7) をはり全体にわたって重ね合わせて、はり全体としての増分つり合い方程式を作り、一定の載荷荷重ごとに Newton-Raphson 法を用いて収束計算する。修正 Newton-Raphson 法を使わない理由は、収束反復計算のたびに求めるつり合い力とそり関数の算出に多くの時間を要するため、できる限り収束回数を減らすことが望ましいからである。なお、材料は弾完全塑性とし、降伏判定には von Mises の条件を用い、降伏後の応力-ひずみ関係としては Prandtl-Reuss の仮定式を用いる<sup>7)</sup>。

### 3. そり関数を求める 2 次元有限要素解析

ねじりを考えるにあたって  $\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0$  とおいたため、はりの断面において考えるべき応力のつり合い方程式は、増分形で表示した場合、次式ようになる。

$$\dot{\sigma}_{x,x} + \dot{\tau}_{yx,y} + \dot{\tau}_{zx,z} = 0 \dots \dots \dots (8)$$

また、断面の境界部においては、境界が  $y, z$  軸に平行な直線だけで構成されているならば、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tau}_{zx} &= 0 \text{ (} y \text{ 軸に平行な辺上で)} \\ \dot{\tau}_{yx} &= 0 \text{ (} z \text{ 軸に平行な辺上で)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

のように、 $\tau_{yx}$  と  $\tau_{zx}$  とを分離した簡単な形で表わすことができる。式 (8) と (9) は、そり関数  $\varphi_0(y, z)$  を決めるための基本式となる。すなわち、式中の応力項をそり関数を使って表わすことで、 $\varphi_0$  に関する偏微分方程式が得られる。

式 (3) で定義されたひずみを式 (2) を用いて断面重心における変位  $u_0, v_0, w_0, \theta_0$  を使って表わし、さらに、増分量に変換すると、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x &= \dot{u}_{0,x} - y^* \dot{v}_{0,xx} + v_{0,x} \dot{v}_{0,x} - z^* \dot{w}_{0,xx} \\ &\quad + w_{0,x} \dot{w}_{0,x} + \varphi_0 \dot{\theta}_{0,xx} + (y^2 + z^2) \theta_{0,x} \dot{\theta}_{0,x} \\ &\quad + (z^* v_{0,xx} - y^* w_{0,xx}) \dot{\theta}_0 \\ \dot{\tau}_{yx} &= (\varphi_{0,y} - z) \dot{\theta}_{0,x} \\ \dot{\tau}_{zx} &= (\varphi_{0,z} + y) \dot{\theta}_{0,x} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

さらに、その偏導関数を求めると、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{x,x} &= \dot{u}_{0,xx} + v_{0,xx} \dot{v}_{0,x} + (v_{0,x} + z^* \theta_{0,x}) \dot{v}_{0,xx} \\ &\quad - y^* \dot{v}_{0,xxx} + w_{0,xx} \dot{w}_{0,x} \\ &\quad + (w_{0,x} - y^* \theta_{0,x}) \dot{w}_{0,xx} - z^* \dot{w}_{0,xxx} \\ &\quad + \{z^* (v_{0,xxx} + w_{0,xx} \theta_{0,x}) \\ &\quad - y^* (w_{0,xxx} - v_{0,xx} \theta_{0,x})\} \dot{\theta}_0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &+ \{z^* v_{0,xx} - y^* w_{0,xx} + (y^2 + z^2) \theta_{0,xx}\} \dot{\theta}_{0,x} \\ &+ (y^2 + z^2) \theta_{0,x} \dot{\theta}_{0,xx} + \varphi_0 \dot{\theta}_{0,xxx} \\ \dot{\tau}_{yx,y} &= \varphi_{0,y} \dot{\theta}_{0,x} \\ \dot{\tau}_{zx,z} &= \varphi_{0,z} \dot{\theta}_{0,x} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

となる。ここに、要素内では  $\varphi_0(y, z)$  は軸方向に一定としているから、 $\varphi_{0,x} = 0$  としてある。また、 $\dot{\varepsilon}_{x,x}$  の項中の  $\varphi_0$  は、1 回前の収束反復段階における値  $\varphi_0'$  で代用する。したがって、式 (11) 中の未知量は  $\varphi_{0,yy}$  と  $\varphi_{0,zz}$  の 2 つだけとなる。一方、応力は全ひずみ増分と塑性ひずみ増分との差として、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma}_x &= E_T (\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_x^p) \\ \dot{\tau}_{yx} &= G_T (\dot{\gamma}_{yx} - \dot{\gamma}_{yx}^p) \\ \dot{\tau}_{zx} &= G_T (\dot{\gamma}_{zx} - \dot{\gamma}_{zx}^p) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

のように表わされる。ここに、 $\dot{\varepsilon}_x^p, \dot{\gamma}_{yx}^p, \dot{\gamma}_{zx}^p$  は増分塑性ひずみである。断面における応力のつり合い方程式 (8) は、式 (11) と (12) を用いることにより、最終的に次のようになる。

$$\begin{aligned} \varphi_{0,yy} + \varphi_{0,zz} &= \frac{1}{\dot{\theta}_{0,x}} (\dot{\tau}_{yx,y}^p + \dot{\tau}_{zx,z}^p) \\ &- \frac{E_T}{G_T \dot{\theta}_{0,x}} (\dot{u}_{0,xx} - y^* \dot{v}_{0,xxx} - z^* \dot{w}_{0,xxx} \\ &+ \varphi_0' \dot{\theta}_{0,xxx} + \theta_g - \dot{\varepsilon}_{x,x}^p) = Q_1 \dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

ここに、右辺第 1 項は純ねじり (弾塑性) に使われる項で、もし弾性ならゼロとする。右辺第 2 項はそり拘束ねじりに関する項で、弾性なら  $\dot{\varepsilon}_{x,x}^p = 0$ 、微小変形なら  $\theta_g = 0$  である。有限変形の影響を表わすパラメーター  $\theta_g$  は、式 (11) より次のようになる。

$$\begin{aligned} \theta_g &= v_{0,xx} \dot{v}_{0,x} + (v_{0,x} + z^* \theta_{0,x}) \dot{v}_{0,xx} + w_{0,xx} \dot{w}_{0,x} \\ &+ (w_{0,x} - y^* \theta_{0,x}) \dot{w}_{0,xx} + \{z^* (v_{0,xxx} \\ &+ w_{0,xx} \theta_{0,x}) - y^* (w_{0,xxx} - v_{0,xx} \theta_{0,x})\} \dot{\theta}_0 \\ &+ \{z^* v_{0,xx} - y^* w_{0,xx} + (y^2 + z^2) \theta_{0,xx}\} \dot{\theta}_{0,x} \\ &+ (y^2 + z^2) \theta_{0,x} \dot{\theta}_{0,xx} \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

式 (13) と (14) がそり関数の形状を決定する支配微分方程式である。そり関数が、収束計算における増分ステップの塑性ひずみ、変形などに依存する量であることがわかる。

次に、境界条件は、式 (9) の基本式に、式 (12) と式 (10) とを代入すれば簡単に得られて、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{0,y} &= z + \frac{\dot{\tau}_{yx}^p}{\dot{\theta}_{0,x}} = Q_2 \text{ (} y \text{ 軸に平行な辺上で)} \\ \varphi_{0,z} &= -y + \frac{\dot{\tau}_{zx}^p}{\dot{\theta}_{0,x}} = Q_3 \text{ (} z \text{ 軸に平行な辺上で)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

はりの両端における  $x$  軸に平行な辺上での境界条件は、そり関数の誘導を各はり要素中央で行っているため不要である。式 (15) の境界条件は、微小変形、有限変形のいかにかわかわらず使用できるが、ただ弾性の場合には

右辺第2項=0とする。式(13)の微分方程式を式(15)の条件のもとで解けば、そり関数 $\varphi_0$ を求めることができる。

条件付き偏微分方程式を Galerkin 有限要素法を用いて解く。はり断面を任意の大きさの長方形要素で分割し、未知量として、長方形要素の4つの節点(1, 2, 3, 4)における $\varphi_0, \varphi_{0,y}, \varphi_{0,z}$ を選ぶ(図-1参照)。つまり、4節点12自由度の長方形要素となり、そのとき要素内の任意の点のそり $\varphi_0(\bar{y}, \bar{z})$ は、

$$\varphi_0(\bar{y}, \bar{z}) = \{N\}^T \{\varphi\} \dots \dots \dots (16)$$

と表わされる。ここに、 $\bar{y}, \bar{z}$ は図-1に示すような要素局所座標であり、また、形状関数 $\{N\}$ 、節点での未知量 $\{\varphi\}$ は下に示す。

$$\begin{aligned} \{N\}^T &= \{N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8 \ N_9 \ N_{10} \ N_{11} \ N_{12}\} \\ &= \frac{1}{a^2 b^3} \left\{ \begin{array}{ll} (2\bar{y}^3 - 3a\bar{y}^2)(2\bar{z}^3 - 3b\bar{z}^2) & a(\bar{y}^3 - a\bar{y}^2)(2\bar{z}^3 - 3b\bar{z}^2) \\ -(2\bar{y}^3 - 3a\bar{y}^2 + a^3)(2\bar{z}^3 - 3b\bar{z}^2) & a(\bar{y}^3 - 2a\bar{y}^2 + a^2\bar{y})(2\bar{z}^3 - 3b\bar{z}^2) \\ (2\bar{y}^3 - 3a\bar{y}^2 + a^3)(2\bar{z}^3 - 3b\bar{z}^2 + b^3) & -a(\bar{y}^3 - 2a\bar{y}^2 + a^2\bar{y})(2\bar{z}^3 - 3b\bar{z}^2 + b^3) \\ -(2\bar{y}^3 - 3a\bar{y}^2)(2\bar{z}^3 - 3b\bar{z}^2 + b^3) & -a(\bar{y}^3 - a\bar{y}^2)(2\bar{z}^3 - 3b\bar{z}^2 + b^3) \end{array} \right. \\ &\quad \left. \begin{array}{l} b(2\bar{y}^3 - 2a\bar{y}^2)(\bar{z}^3 - b\bar{z}^2) \\ -b(2\bar{y}^3 - 3a\bar{y}^2 + a^3)(\bar{z}^3 - b\bar{z}^2) \\ -b(2\bar{y}^3 - 3a\bar{y}^2 + a^3)(\bar{z}^3 - 2b\bar{z}^2 + b^2\bar{z}) \\ b(2\bar{y}^3 - 3a\bar{y}^2)(\bar{z}^3 - 2b\bar{z}^2 + b^2\bar{z}) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\{\varphi\}^T = \{\varphi_1 \ \varphi_{1,y} \ \varphi_{1,z} \ \varphi_2 \ \varphi_{2,y} \ \varphi_{2,z} \ \varphi_3 \ \varphi_{3,y} \ \varphi_{3,z} \ \varphi_4 \ \varphi_{4,y} \ \varphi_{4,z}\}$$

長方形要素の内部における応力のつり合い方程式は、式(13)を局所座標で表わした次式

$$\varphi_{0,\bar{y}\bar{y}} + \varphi_{0,\bar{z}\bar{z}} = \bar{Q}_1 \equiv Q_1 \dots \dots \dots (17)$$

である。長方形要素における境界条件は、要素を構成する辺の1つ1つが、はり断面の外部境界(外縁部)と一致するか否かによって、その取扱いが異なる。すなわち、はり断面の内部に位置する要素辺では、 $\varphi_0, \varphi_{0,y}, \varphi_{0,z}$ の連続性を考えるだけでよいが、はりの外部境界に位置する要素辺では、式(15)を局所座標で表わした次式

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{0,\bar{y}} &= (z_1 - b + \bar{z}) + \frac{\bar{r}_{yx}^p}{\theta_{0,x}} = \bar{Q}_2 \\ \varphi_{0,\bar{z}} &= -(y_1 - a + \bar{y}) + \frac{\bar{r}_{zx}^p}{\theta_{0,x}} = \bar{Q}_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

を用いることになる。ここに、 $y_1$ と $z_1$ は、図-1に示すように、はり要素の節点1の全体座標における座標値を意味する。

式(17)を Galerkin 法を用いて積分表示し、さらに、式(16)の補間式を用いると、

$$\iint N_i [ \{N_j, \bar{y}\bar{y}\}^T + \{N_j, \bar{z}\bar{z}\}^T - Q_1 ] \{\varphi\} d\bar{y}d\bar{z} = 0 \quad (i, j=1, 2, \dots, 12) \dots \dots \dots (19)$$

と表わされる。式(19)に Green の定理を適用して部分積分に分解し、式(18)を用いると、最終的に次のように表わすことができる。

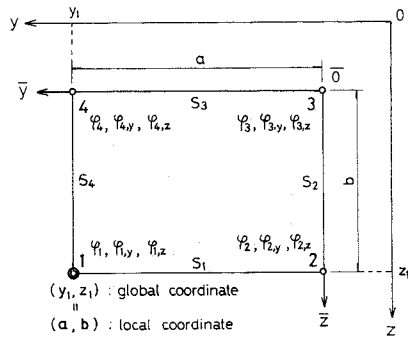


図-1 そり関数を求めるための長方形要素

$$[K_\varphi] \{\varphi\} = \{Q\} \dots \dots \dots (20)$$

ここに、

$[K_\varphi]$  の要素：

$$\iint (N_{i,\bar{y}} N_{j,\bar{y}} + N_{i,\bar{z}} N_{j,\bar{z}}) d\bar{y}d\bar{z}$$

$\{Q\}$  の要素：

$$\iint N_i Q_1 d\bar{y}d\bar{z} + \int_{S_1} N_i \bar{Q}_3 d\bar{y} - \int_{S_1} N_i \bar{Q}_2 d\bar{z} - \int_{S_1} N_i \bar{Q}_3 d\bar{y} + \int_{S_1} N_i \bar{Q}_2 d\bar{z}$$

である。要素境界における線積分(辺 $S_1, S_2, S_3, S_4$ に関する積分)の項は、該当する辺 $S$ がはり断面内部にあるときにはゼロとしてよく、また、該当する辺 $S$ がはり断面の外部境界と一致する場合には、式(18)で与えられる $\bar{Q}_2$ もしくは $\bar{Q}_3$ を代入する。

各長方形要素についてたてられた式(20)を、はり断面全体にわたって重ね合わせて、はり断面としてのつり合い方程式を作り、連立方程式の解法を用いて解く。このようにして求められるそり関数 $\varphi_0(y, z)$ は、微小変形・弾性の範囲内では一定値をとるが、先に述べたように、有限変形あるいは弾塑性の状態では刻々と変化する量となる。したがって、はりの非線形変形を、増分つり合い方程式をたてて Newton-Raphson 法で解析していきこうとする場合には、各増分ごとにそり関数を計算する必要がある。すなわち、図-2に示すように、はりとし

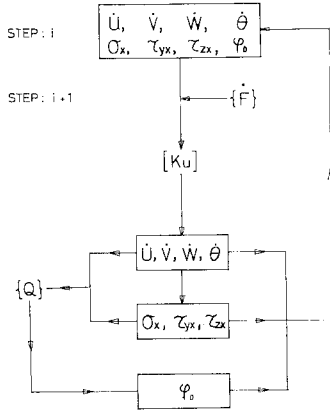


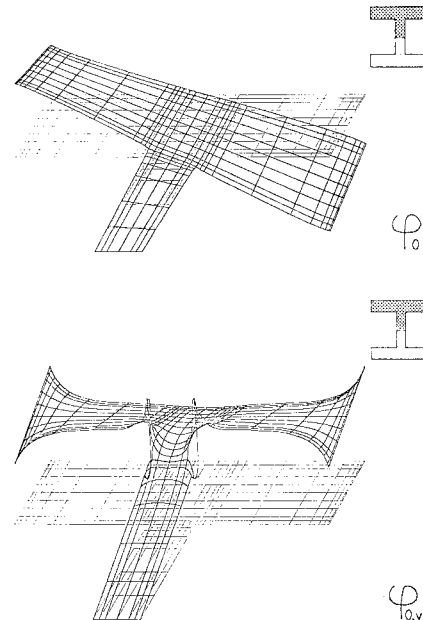
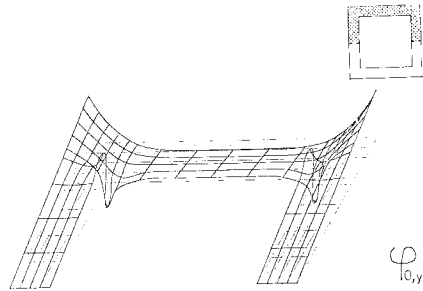
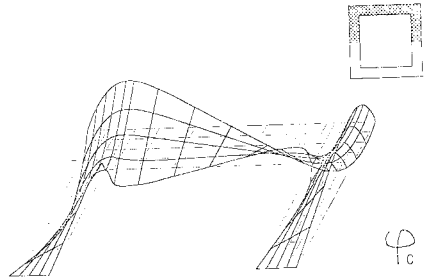
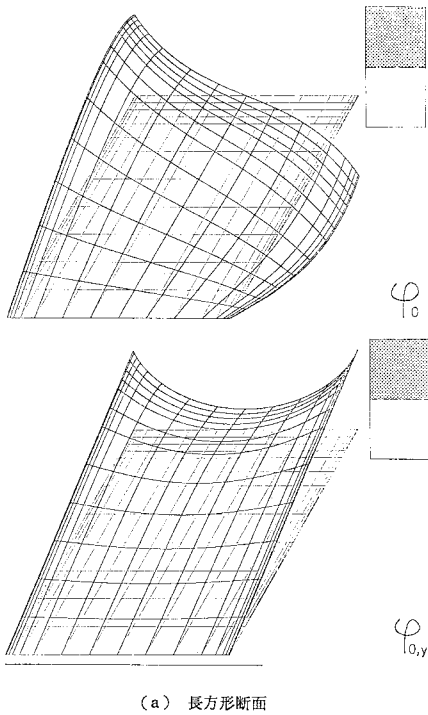
図-2 収束計算の流れ図

での1次元有限要素解と、そり関数を求める2次元有限要素解とを交互に使用しつつ収束計算を行うことになる。

#### 4. 数値計算結果

本報の主たる関心は、そり関数の誘導と、そのねじり問題への応用であるので、計算結果を示す前にまずそり関数そのものについて分布形状をみてみよう。そり関数  $\varphi_0$  とその導関数  $\varphi_{0,y}$  の弾性・純ねじり状態における断面内の2次元分布形状を示したものが 図-3 (a)~(d) であり、それぞれ、長方形断面、中空正方形断面、H型

断面、□型断面の上側半分における分布を表わしている。図中で太線が  $\varphi_0$  あるいは  $\varphi_{0,y}$  の分布を、細線が断面の要素分割を示している。図-3 からわかるように、外縁部および隅角部では  $\varphi_0, \varphi_{0,y}, \varphi_{0,z}$  の変化がかなり急激なので、要素分割も相当細かくする必要がある。純ねじり問題では、隅角部における十分な要素分割が解の収束性を決める大きな要因で、著者らの経験では、H型断面の場合にフランジとウェブの接合部の要素分割が粗い



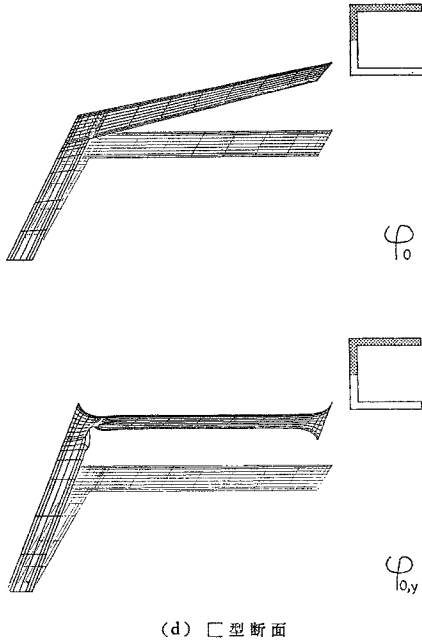


図-3 そり関数  $\varphi_0$  とその導関数  $\varphi_{0,y}$  の分布

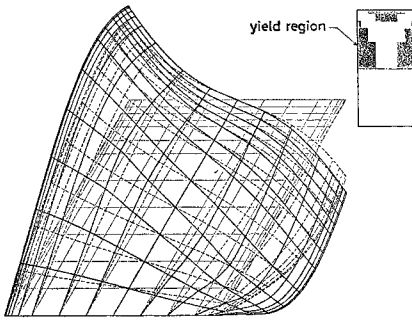
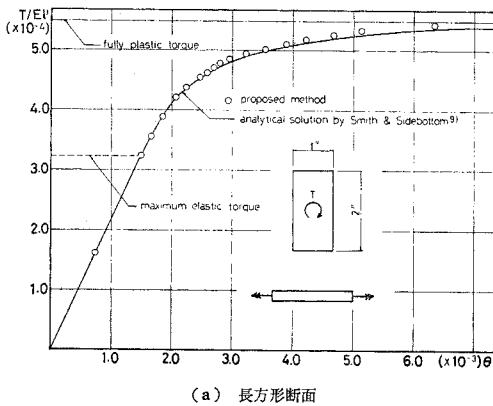
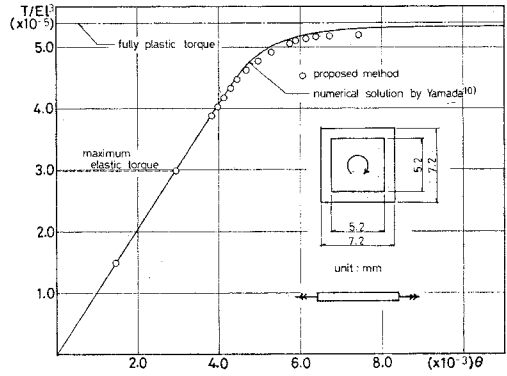


図-4 塑性域の進展によるそり関数  $\varphi_0$  の変化

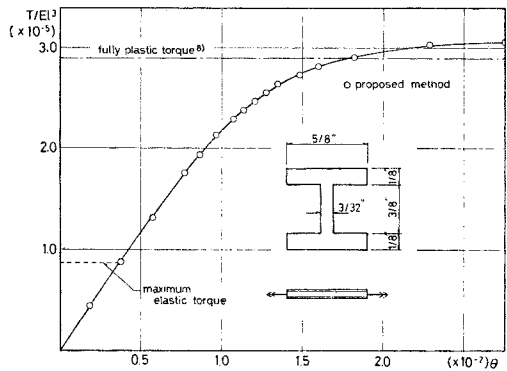


(a) 長方形断面

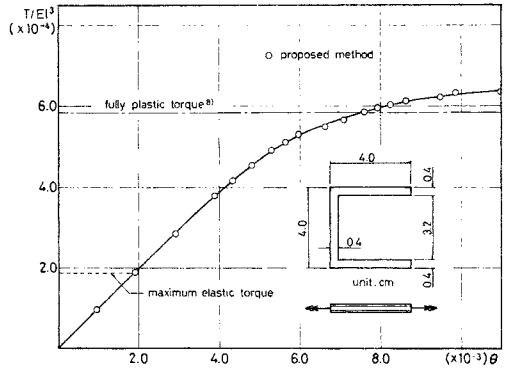
と、塑性域が進展するにつれまったく収束しなくなった。反面、図-3 (c) のような分割を採用すると、塑性域が相当広がってからも、収束回数が3回程度ときわめ



(b) 中空正方形断面



(c) H型断面



(d) □型断面

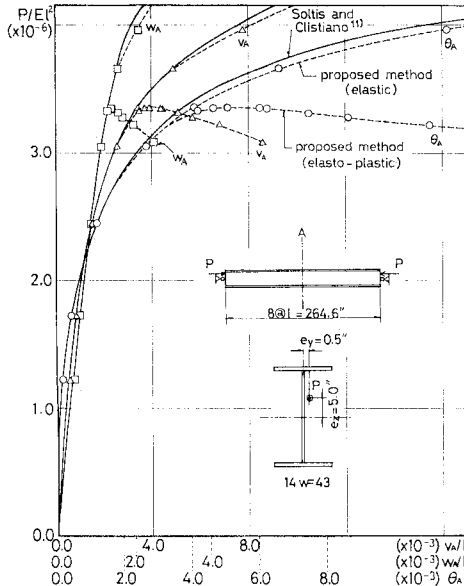
図-5 弾塑性純ねじりにおけるトルク  $T$  とねじり角  $\theta$  の関係

てよい収束性がみられた。ちなみに、収束判定は、系全体の不つり合い力が、収束計算1回目における不つり合い力の  $10^{-6}$  以下になったときを収束とみなしている。

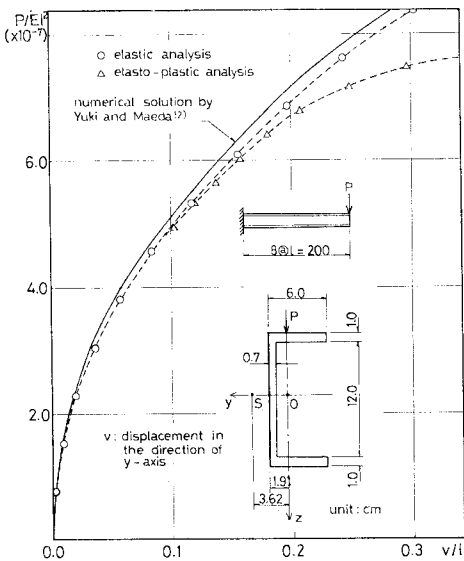
塑性域が進展していくときの  $\varphi_0$  や  $\varphi_{0,y}$  の変化は、それらが各増分段階で異なる量であり個々の変化を取り上げて意味はないのだが、参考として、長方形断面の棒に弾性限トルクの1.55倍のトルクが作用するときの収束時点での  $\varphi_0$  を図-4に示す。太線が収束時点での  $\varphi_0$

の分布を、点線が弾性状態での  $\varphi_0$  の分布を表わしている。図には、そのときの塑性域も示してある。

図-3 に用いた4種類の断面の棒の純ねじり状態におけるトルク ( $T$ ) とねじり角 ( $\theta$ ) との関係を、図-5 (a)~(d) に示す。材料特性は弾完全塑性とし、 $E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ,  $G=8.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_y$  (1軸引張り降伏強度) $=2.4 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$  とする。軸方向には1要素のみを用いる。図-5 中に示されている全塑性トルクは、



(a) H型はりの2軸曲げ



(b) 片持ち□型はりの曲げ

図-6 面外変形を生ずるはりの荷重-変位関数

Nadai の sand heap analogy<sup>9)</sup> による近似上限値である。また、長方形断面については、Smith と Sidebottom による解析解<sup>9)</sup>と、中空正方形断面については、山田・片桐・高塚による数値解<sup>10)</sup>と比較する。これらはいずれも一致を示している。

面外変形問題については、H型はりの2軸曲げ(弾性および弾完全塑性)を図-6(a)に、薄肉□型断面の片持ちばりの集中荷重による曲げ(弾性および弾完全塑性)を図-6(b)に示す。ともに、軸方向に8要素分割する。このうち弾性2軸曲げについては、Soltis と Christiano による数値解<sup>11)</sup>と比較する。片持ちばりは、集中荷重が□型断面の重心を通る鉛直線上のフランジ上部に作用する場合を解いたもので、結城・前田による弾性解<sup>12)</sup>と比較する。いずれの場合も本報の方が変形が大きめに出ているが、これは薄肉としての近似をするか、そり関数を厳密に評価するかの差であると考えられる。

### 5. 結 語

本報では、曲げによるせん断変形を無視してはいるが、そり変形の評価に関しては、はりの塑性ひずみの影響を取り入れてそり関数を定式化しており、このことは精度の向上だけでなく、解の収束安定性の向上につながっている。その理由は、そり関数についての増分形の支配微分方程式(13)で右辺が増分量どうしの比になっていることから明らかで、そり関数そのものが増分塑性ひずみに対して非常に敏感なため、少しでも精度よく式(13)の右辺  $Q_i$  を計算することが必要とされるからである。同様のことは、そり関数を求める際の断面の分割法についてもいえて、塑性域の進展のパターンが複雑な部分(特に隅角部)において十分細かな要素分割をすることが、迅速な収束には不可欠である。

本方法(そり関数を断面内で厳密に評価する方法)のもつ基本的な長所は、次に示す2点にある。

- (1) 長方形のような中実断面、また、厚肉断面、薄肉断面の区別なく、そして、開断面と閉断面の区別なく適用することができて、精度の高い数値解の得られること。
- (2) 弾塑性などの材料非線形性、有限変形などの幾何学的非線形性が、ねじり特性に与える影響を的確に評価することができること。

今後、高温クリープ問題などに適用することにより、火災時のはり部材の挙動をより精度よく求めることを目標としたい。

数値計算にあたっては、名古屋大学大型計算機センターの M 200 を使用した。

## 参 考 文 献

- 1) Baba, S. and T. Kajita : Plastic Analysis of Torsion of a Prismatic Beam, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol. 18, pp. 927~944, 1982.
- 2) Baba, S. and T. Kajita : Out-of-Plane Deformation of Steel Frame in Fire, Proc., 1st. Int. Conf. on Computing in Civil Engng., New York, pp. 343~358, 1981.
- 3) 山元俊哉・馬場俊介 : そり関数を用いた2軸対称断面鋼桁の有限要素解析, 土木学会第36回年次学術講演会講演集, I-34, pp. 67~68, 1981.
- 4) Bruch, J.C. and G. Zyzolowski : Transient Two-Dimensional Heat Conduction Problems Solved by the Finite Element Method, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol. 8, pp. 481~494, 1974.
- 5) 西野文雄・倉方慶夫・長谷川彰夫・奥村敏恵 : 軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材, 土木学会論文報告集, 第225号, pp. 1~15, 1974.
- 6) Rajasekaran, S. : Finite Element Method for Plastic Beam-Columns, Ch. 12 in Theory of Beam-Columns, by W.F. Chen and T. Atsuta, McGraw-Hill, pp. 539~608, 1977.
- 7) 山田嘉昭 : 塑性・粘弾性, コンピュータによる構造工学講座 II-2-A, 培風館, 1973.
- 8) Nadai, A. : Plasticity, McGraw-Hill, 1931.
- 9) Smith, O.C. and O.M. Sidebottom : Inelastic Behavior of Load Carrying Members, John Wiley & Sons, 1965.
- 10) Yamada, Y., S. Katagiri and K. Takatsuka : Elastic-Plastic Analysis of Saint-Venant Torsion Problem by a Hybrid Stress Model, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol. 5, pp. 193~207, 1972.
- 11) Soltis, L.A. and P. Christiano : Finite Deformation of Biaxially Loaded Columns, Proc., ASCE, Vol. 98 (ST 12), pp. 2647~2662, 1972.
- 12) 結城皓曠・前田幸雄 : 薄肉断面構造の三次元挙動の解析, 土木学会論文報告集, 第224号, pp. 67~78, 1974.

(1982.4.14・受付)