

蛇行水路における水深平均流れ場の遷移特性

EVOLUTION OF THE DEPTH-AVERAGED FLOW
FIELD IN MEANDERING CHANNELS

池内 幸司*・玉井 信行**

By Kouji IKEUCHI and Nobuyuki TAMAI

では流況が同一である領域をよぶ。

1. 序 論

(1) はじめに

自然河川では、蛇行とよばれる連続したわん曲の平面形を示すことが多く、また、わん曲部は治水、利水上に重要な位置を占めている。わん曲部の流れは 3 次元的であり、従来より断面内の 2 次流に関しては、多くの研究がなされてきた。しかし、これらの多くは流れが流下方向に変化しない場合を対象としており、わん曲部の流れの形成過程については不明な点が多い。

本研究では、水深方向に平均化された水理量が、流れ方向にどのように変化するかに重点を置き解析を行う。これは、主流の集中・発散過程が、蛇行水路の流れの基本として重要と考えたゆえである。したがって、横断面内の 2 次流の分布については、本論文では詳しくは論じない。

(2) 用語の定義

本論文に用いる用語を下記のように定義する。

- i) 主流：水路中心軸の接線方向の流速成分。
- ii) 2 次流：水路中心軸と直交する方向の流速成分。
- iii) 完全発達域と遷移域：流速・流向・水深などが、主流方向に変化しない領域を完全発達域、徐々に変化する領域を遷移域とする。

iv) 水深平均速度：ある点において、水深方向に平均化された速度。

v) 平衡領域：合同な形のわん曲水路が、反転しながら連続している場合（蛇行水路）、流れが擬似等流状態であれば、流入部・流出部を除いては、流れは周期的に変化するであろう。このような、わん曲の同位相位置

(3) 従来の研究の要約

従来の開水路わん曲部の流れに対する理論的研究は、完全発達域における 2 次流を求めるものが多かった。しかし、流れの状態が流下方向に変化しないという完全発達域は、数学的困難さを除くための仮定であり、大きな中心角のわん曲水路のごく一部に見出されるものである（例：Kikkawa, et al.¹⁾）。通常のわん曲部においては、最も理想的な矩形断面においても、水深や流速・流向は流下方向に変化する。

遷移域を含んだ解析の例としては、次のようなものがある。Leschziner・Rodi²⁾ は、 $k-\epsilon$ モデルを用いて、単純化された 3 次元のレイノルズ方程式を差分法にて解いている。de Vriend³⁾ は、 $\delta = (\text{水深}/\text{曲率半径})$ を摂動パラメーターとして 3 次元のレイノルズ方程式を摂動展開し、 δ の 1 次のオーダーの解を数値的に求めた。Kalkwijk・de Vriend⁴⁾ は、レイノルズ方程式を鉛直方向に積分して求めた方程式を種々の仮定を導入して単純化し、これを特性曲線法を用いて解析した。一方、遷移域における解析的手法は、Engelund⁵⁾ が、水路中心軸が蛇行流路曲線 (sine generated curve) をなす水路の平衡領域を解析したことにより、大きく発展した。池田ら⁶⁾ は、Engelund の解析において無視されている、水位上昇による摩擦項への寄与分を補い、河川の自由蛇行に関する考察を行った。長谷川ら⁷⁾ は、砂州上の 2 次元浅水流れを 2 重フーリエ級数を用いて解いている。

Engelund や池田ら、長谷川らの解は、水路内の任意の点の曲率半径は、水路中心軸における曲率半径に等しいとして解析を進めている。この仮定は、 $\epsilon = (\text{水路幅の半分}/\text{代表の曲率半径})$ のオーダーの誤差を含むことになる。一方、Engelund や池田ら、長谷川らの解析によって求めた式は、 ϵ のオーダーの式であるので、この仮定を用いることは、適当ではないと思われる。また、

* 正会員 工修 建設省荒川上流工事事務所

** 正会員 工博 東京大学助教授 工学部土木工学科

Engelund の解および池田らの解は、平衡領域における解であるので、境界条件の影響等は、除外されている。

(4) 本研究の目的

前節で述べたように、遷移域における従来の解析解は、ε のオーダーの誤差を含む平衡領域における解であった。そこで、本論文においては、まずはじめに、水路中心軸が蛇行流路曲線 (sine generated curve) をなす水路における曲線座標系を正確に定義し、それが、直交曲線座標系であることを示す。しかる後に、この座標系における基礎方程式を定め、これを鉛直方向に積分した形式を求める。そして、この方程式系を、ε=(水路幅の半分/代表の曲率半径) を摂動パラメーターとする摂動展開を行い、境界条件の効果を含めた ε の 2 次オーダーの解を求める。このようにして、蛇行水路における主流の変化過程を記述できる理論を得ることが本論文の目的である。

2. 摂動法による蛇行水路における流れの解析

(1) 座標系の定義

Langbein・Leopold⁸⁾によれば、自然蛇行河川の水路中心軸は、谷線となす偏角 θ が河道距離 s_c に対して正弦関数的に変化するという次式で示される。

$$\theta = \theta_0 \sin \frac{2\pi s_c}{L} \dots\dots\dots(1)$$

ここに、θ₀ は水路中心線と谷線となす最大偏角、s_c は河道中心線に沿った距離、L は中心軸に沿う蛇行長を示す (図-1 参照)。

蛇行流路曲線は水路中心軸に関する定義を与えるのみであり、水路平面内の各点を表わす座標系を定めること、および、その性質を知る必要がある。いま、水路中心軸 s_c と直交する直線座標軸を n_a 軸とする。また、n_a 軸上の点で、水路中心軸からの距離 n_a が等しい点を連ねた曲線を s_a 軸とする (ただし s_c 上で n_a=0)。いま、水路中心軸の振幅の中心を通る直線を X 軸とし、X 軸が s_c と交わる点 (θ=θ₀, s_c=-L/4) を通り、X 軸と直交するような直線を Y 軸とする。(s_a, n_a) 座標と (X, Y) 座標との関係は、次式で表わされる。

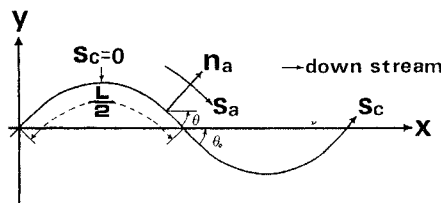


図-1 座標系の定義

$$\left. \begin{aligned} X &= \int_{-L/4}^{s_c} \cos \theta ds_c + n_a \sin \theta \\ Y &= \int_{-L/4}^{s_c} (-\sin \theta) ds_c + n_a \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

いま、

$$g_{s_a n_a} = \frac{\partial X}{\partial s_a} \times \frac{\partial X}{\partial n_a} + \frac{\partial Y}{\partial s_a} \times \frac{\partial Y}{\partial n_a} \dots\dots\dots(3)$$

とおくと、g_{s_an_a}=0 ならば、(s_a, n_a) 座標系は、直交曲線座標系をなす⁹⁾。式 (3) の演算を実行すると、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} g_{s_a n_a} &= \left(\cos \theta \frac{\partial s_c}{\partial s_a} + n_a \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial s_a} \right) \sin \theta \\ &\quad - \left(\sin \theta \frac{\partial s_c}{\partial s_a} + n_a \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial s_a} \right) \cos \theta = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

ゆえに、(s_a, n_a) 座標系は、直交曲線座標系をなすことがわかる。また、任意点 (s_a, n_a) における曲率半径 r_a は、

$$r_a = r_c + n_a \dots\dots\dots(5)$$

であることが証明できる¹⁰⁾。

(2) 基礎方程式に関する考察

a) 水路幾何形状に関する前提について

蛇行水路の流れを解析するに際して、水路の幾何形状特性について導入する仮定を示す。

- i) (水深/水路幅) の比は、十分に 1 より小さいものとする。したがって、(水深/曲率半径) の比も十分に 1 より小さい。すなわち、側壁における摩擦力の影響は無視できるものとし、流体に働く摩擦力は河床によって規定されるものとする。
- ii) 水路床勾配は、水路中心軸に沿って一定であるとする。
- iii) 水路幅は一定であるとする。
- iv) 水路中心軸形状は、蛇行流路曲線で近似できるものとする。

直交曲線座標系 (s_a, n_a, z_a) (z_a は、鉛直上向きを正とする座標軸) における 3 次元のレイノルズ方程式に対

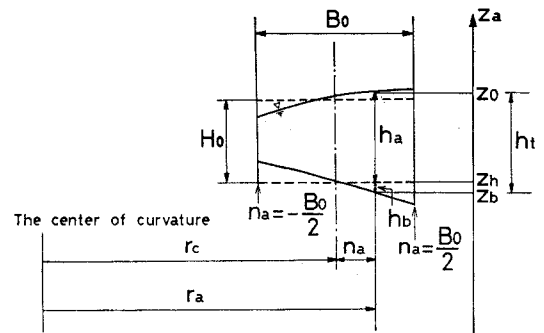


図-2 水路断面と記号

して、仮定 i) を用いると、渦動粘性項における微小項を無視することができ、また、静水圧分布も成り立つ。

b) 水深平均速度を用いた基礎方程式

前記の仮定を用いて求めた方程式系を水底から水面まで積分し、水底で流速が 0、水面でせん断力が 0、水表面の粒子は常に水表面にとどまっているという条件、

$$[u_z]_{z_a=z_b} = \left[u_n \frac{\partial z_0}{\partial n_a} \right]_{z_a=z_b} + \left[u_s \frac{\partial z_0}{\partial s_a} \right]_{z_a=z_b} \dots\dots\dots (6)$$

を用いると、次式を得る。

$$\frac{\partial h_t \bar{u}_s}{\partial s_a} + \frac{\partial h_t \bar{u}_n}{\partial n_a} + \frac{h_t \bar{u}_n}{r_a} = 0 \text{ (連続式)} \dots\dots (7)$$

$$\frac{\partial h_t \bar{u}_s^2}{\partial s_a} + \frac{\partial h_t \bar{u}_s \bar{u}_n}{\partial n_a} + 2 \frac{h_t \bar{u}_s \bar{u}_n}{r_a} + g h_t \frac{\partial h_a}{\partial s_a}$$

$$+ g h_t \frac{\partial z_h}{\partial s_a} + \frac{\tau_{s0}}{\rho} = 0$$

(s_a 方向運動量方程式) $\dots\dots\dots (8)$

$$\frac{\partial h_t \bar{u}_s \bar{u}_n}{\partial s_a} + \frac{\partial h_t \bar{u}_s^2}{\partial n_a} + \frac{h_t (\bar{u}_n^2 - \bar{u}_s^2)}{r_a} + g h_t \frac{\partial h_a}{\partial n_a}$$

$$+ \frac{\tau_{n0}}{\rho} = 0 \text{ (} n_a \text{ 方向運動量方程式)}$$

$\dots\dots\dots (9)$

ここに、 u_s, u_n, u_z はそれぞれ s_a, n_a, z_a 方向の流速； r_a は s_a 軸の曲率半径； ρ は水の密度； z_0, z_h, z_b はそれぞれ、水面、断面平均河床、河床の z_a 座標である。 $h_t = (z_0 - z_b)$ ； $h_a = (z_0 - z_h)$ ； τ_{s0}, τ_{n0} は底面における s_a, n_a 方向のせん断応力を表わす。— は、水深方向の平均値を表わす。

いま、水路幅を B_0 とすると、式 (7) を n_a 方向に、 $n_a = -B_0/2$ から $n_a = B_0/2$ まで積分し、 \bar{u}_n が側岸において 0 であるという条件を用いると次式を得る。

$$\int_{-B_0/2}^{B_0/2} h_t \bar{u}_s dn_a = Q$$

$$= V H_0 B_0 \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 Q は流量、 V は代表流速、 H_0 は代表水深である。

境界条件としては、

i) $n_a = \pm B_0/2$ (側岸) において、 $u_n = 0 \dots\dots (11)$

ii) $s_c = s_{ci}$ (上流端) で $\bar{u}_s = \bar{u}_{si}(n) \dots\dots\dots (12)$

ここに、 $\bar{u}_{si}(n)$ は与えられた n の関数である。

iii) $s_c = s_{ce}$ (下流端) で

$$\frac{1}{B_0} \int_{-B_0/2}^{B_0/2} h_a dn_a = H_0 \dots\dots\dots (13)$$

を与える。

c) 速度相関および底面せん断応力

速度相関についての仮定を列挙する。

i) $\overline{u_s u_n} \approx \bar{u}_s \times \bar{u}_n \dots\dots\dots (14)$

ii) $\overline{u_s^2} = (\bar{u}_s)^2 \dots\dots\dots (15)$

iii) $\overline{u_n^2} = (\bar{u}_n)^2 \dots\dots\dots (16)$

式 (14), (15) は、主流が深さ方向にほぼ一様な流速分布をもっていることを仮定している。式 (16) は、完全発達域付近では必ずしも正しくはないが、基礎式において、 $\overline{u_n^2}$ に関する項のオーダーは他の項に比べて小さく、この仮定による誤差が、解析結果に与える影響はほとんどないものと思われる。

いま、流れ方向の底面せん断応力を

$$\frac{\tau_{s0}}{\rho} = \frac{f}{2} (\bar{u}_s)^2 \dots\dots\dots (17)$$

の形で表現できるものとする⁹⁾。底面において、流向とせん断応力の方向が一致しているものと仮定すると、

$$\frac{\tau_{n0}}{\tau_{s0}} = \left(\frac{u_n}{u_s} \right)_{\text{底面}} \dots\dots\dots (18)$$

となる。Rozovskii¹¹⁾ および Engelund⁵⁾ によると、完全発達域においては、

$$\left(\frac{u_n}{u_s} \right)_{\text{底面}} \approx (7 \sim 11) \frac{h_t}{r_a} \dots\dots\dots (19)$$

が成り立つから、

$$\frac{\tau_{n0}}{\rho} \approx (3.5 \sim 5.5) f (\bar{u}_s)^2 \frac{h_t}{r_a} \dots\dots\dots (20)$$

となる。

d) 無次元化された基礎方程式

次に、基礎方程式と境界条件の無次元表示を求めることにする。

いま、 $u = \bar{u}_s/V, v = \bar{u}_n/V, s = s_c/R, n = n_a/(B_0/2), h = h_a/H_0, \eta = h_b/H_0, h_b = (z_h - z_b), u_i = \bar{u}_{si}/V, s_0 = s_{ci}/R, s_d = s_{ce}/R, \varepsilon = (B_0/2)/R, Fr = V/\sqrt{gH_0}, R = L/2\pi\theta, k = 2\pi R/L \dots\dots\dots (21)$

とする。また、

$$\frac{\partial}{\partial s_a} = \frac{r_c}{r_a} \times \frac{\partial}{\partial s_c} \dots\dots\dots (22)$$

が成立する。式 (7), (10) を式 (21), (22) を用いて無次元化すると、次式を得る。

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial s} \{ (h + \eta) u \} + \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{r_a}{r_c} (h + \eta) v \right\} = 0 \text{ (連続式)}$$

$\dots\dots\dots (23)$

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (h + \eta) u dn = 1 \text{ (流量の連続式)} \dots\dots (24)$$

一方、式 (7), (14), (15), (16), (17), (20) を用いて式 (8), (9) を変形し、式 (21), (22) を用いて無次元化すると、次式を得る。

$$u \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{r_a}{r_c} \frac{1}{\varepsilon} v \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{R}{r_c} u v = - \frac{1}{Fr^2} \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{g_i R}{V^2}$$

$$- \frac{c}{2} \frac{r_a}{r_c} \frac{u^2}{(h + \eta)} \text{ (} s_a \text{ 方向運動量方程式)}$$

$\dots\dots\dots (25)$

$$\frac{r_c}{r_a} \varepsilon u \frac{\partial v}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{n_0}{r_a} u^2 = - \frac{1}{Fr^2} \frac{\partial h}{\partial n}$$

$$+ (3.5 \sim 5.5) f \frac{n_0}{r_a} u^2$$

$$(n_a \text{ 方向運動量方程式}) \dots\dots\dots(26)$$

ここに、 $c=fR/H_0$, $n_0=B_0/2$, i は中心軸に沿う水路床勾配 (移動床の場合は平均河床の勾配) である。

式 (26) の右辺第 2 項 (n_a 方向の摩擦項) のオーダーについて考えてみる。

ϵ の値は、Yen¹²⁾ がミシシッピ川とミズリー川の蛇行部を参考にして定めた水路において 0.13, Rozovskii の水路 (No. 1) では 0.56, 著者らの実験水路^{8), 13)} (Leopold・Wolman¹⁴⁾ や Schumm¹⁵⁾ の自然河川の平面形に対する経験式を参考にして水路平面形を定めた) において 0.30, Hooke¹⁶⁾ が自然河川の形状を参考にして定めた実験水路においては 0.22, 淀川の枚方付近のわん曲部においては 0.27 である。一方、 f の値は、Yen¹²⁾ の実験で 0.0054~0.0043, Rozovskii¹¹⁾ の実験で 0.0054, 著者らの実験^{8), 13)} で 0.011, Hooke の移動床の実験で 0.012~0.058, 淀川の枚方付近のわん曲部においては 0.014 (高水時) である。また、

$$n_0/r_a = n_0/(r_c + n_a) \approx O(\epsilon) \dots\dots\dots(27)$$

であるから次式を得る。

$$(3.5 \sim 5.5) f n_0/r_a \approx O(\epsilon^3) \dots\dots\dots(28)$$

したがって、 ϵ の 2 次のオーダーの解析においては、 n_a 方向の運動量方程式において、底面における n_a 方向のせん断応力を無視し得るものと思われる。これは実験的にも妥当な簡略化と思われる¹³⁾。そこで、以後の解析においては、式 (26) の右辺第 2 項を省略する。

境界条件、式 (11), (12), (13) を式 (21) を用いて無次元化すると、次式を得る。

$$i) \quad n = \pm 1 \text{ で } v = 0 \dots\dots\dots(29)$$

$$ii) \quad s = s_0 \text{ (上流端) で, } u = u_i(n) \dots\dots\dots(30)$$

$$iii) \quad s = s_d \text{ (下流端) で, } \frac{1}{2} \int_{-1}^1 h dn = 1 \dots\dots\dots(31)$$

(3) 矩形断面水路の解

矩形断面水路の場合には、 $\eta = 0$ である。式 (23), (24), (25), (26) に $\eta = 0$ を代入した結果を次に列挙する。

$$\epsilon \frac{\partial}{\partial s} (uh) + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{r_a}{r_c} v h \right) = 0 \dots\dots\dots(32)$$

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 u h dn = 1 \dots\dots\dots(33)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{r_a}{r_c} \frac{1}{\epsilon} v \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{R}{r_c} uv = - \frac{1}{F_r^2} \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{g_i R}{V^2} - \frac{c}{2} \frac{r_a}{r_c} \frac{u^2}{h} \text{ (} s_a \text{ 方向運動量方程式)}$$

$$\dots\dots\dots(34)$$

$$\frac{r_c}{r_a} \epsilon u \frac{\partial v}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{n_0}{r_a} u^2 = - \frac{1}{F_r^2} \frac{\partial h}{\partial n} \text{ (} n_a \text{ 方向運動量方程式)}$$

$$\dots\dots\dots(35)$$

a) 振動展開

基本式を解くために、次式で表わされるような振動展

開を行う。また、本節においては、流れの場の解析を ϵ の 2 次項までの精度で行うので、2 次の項までを具体的な形で記す。

$$\begin{cases} h = h_0 + \epsilon h_1 + \epsilon^2 h_2 + \dots \\ u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots \\ v = v_0 + \epsilon v_1 + \epsilon^2 v_2 + \dots \\ u_i = f_{ui0}(n) + \epsilon f_{ui1}(n) + \epsilon^2 f_{ui2}(n) + \dots \end{cases} \dots\dots\dots(36)$$

ここに、 u_i は上流端における無次元化された主流速分布、 $f_{ui0}(n)$, $f_{ui1}(n)$, $f_{ui2}(n)$ は、上流端の流速分布に対する境界条件より与えられる n の関数である。また、 $\epsilon = n_0/R$ であるから、式 (36)₄ においては ϵ の次数と n の最高次数が一致しなければならない。したがって、 f_{ui0} , f_{ui1} , f_{ui2} は、 n の 0 次, 1 次, 2 次の関数となる。また、 ϵ の次数をどこまで取っても、上流端における断面平均流速が等しくなるように境界条件を定めるためには、

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f_{ui0}(n) dn = 1, \int_{-1}^1 f_{ui1}(n) dn = 0, \int_{-1}^1 f_{ui2}(n) dn = 0 \dots\dots\dots(37)$$

としなければならない。したがって、式 (36)₄ は、次式のように書き表わすことができる。

$$u_i(n) = u_{i0} + \epsilon n u_{i1} + \epsilon^2 \left(n^2 - \frac{1}{3} \right) u_{i2} \dots\dots\dots(38)$$

ここに、 u_{i0} , u_{i1} , u_{i2} は、上流端の境界条件より定まる定数である。

流れの場の解析は、擬似等流状態の流れを取り扱うものとする。この場合には、 $n = 0$ (水路中心軸上) で、

$$h_0 = 1 \dots\dots\dots(39)$$

と仮定できる。また、 u_0 は、 s のみの関数であるとする。

振動パラメーターとして、 $\epsilon = n_0/R$ を選んでいるため、 s 方向の運動量方程式においては、 ϵ^{-1} のオーダーの項 $v_0 \partial u_0 / \partial n$ が存在する (式 (34) 左辺第 2 項)。しかしながら、基本解 u_0 は s のみの関数と考えているので

$$v_0 \frac{\partial u_0}{\partial n} = 0 \dots\dots\dots(40)$$

となる。したがって振動解を求める過程においては ϵ^0 のオーダーの解から順次求めればよい。

以下に、 ϵ の各次数について解いてゆく過程においては、0 次解に対する上述の考察の結果を利用する。

b) 0 次のオーダーの解

ϵ^0 に関する支配方程式は、次のようにまとめられる。

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_0 h_0 dn = 1 \text{ (流量の連続式)} \dots\dots\dots(41)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} (h_0 v_0) = 0 \text{ (連続式)} \dots\dots\dots(42)$$

$$u_0 \frac{\partial u_0}{\partial s} + v_0 n \cos ks \frac{\partial u_0}{\partial n} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial n} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial n} + u_0 v_0 \cos ks$$

$$= -\frac{1}{F_r^2} \frac{\partial h_0}{\partial s} + \frac{giR}{V^2} - \frac{c}{2} \frac{u_0^2}{h_0}$$

(s_a 方向運動量方程式) ……(43)

$$v_0 \frac{\partial v_0}{\partial n} = -\frac{1}{F_r^2} \frac{\partial h_0}{\partial n} \quad (n_a \text{ 方向運動量方程式})$$

……………(44)

境界条件は,

$$n = \pm 1 \quad \text{で} \quad v_0 = 0 \quad \dots\dots\dots(45)$$

$$s = s_0 \quad \text{で} \quad u = u_{i0} \quad \dots\dots\dots(46)$$

$$s = s_d \quad \text{で} \quad \int_{-1}^1 h_0 dn = 1 \quad \dots\dots\dots(47)$$

となる.

次に, ε の 0 次のオーダーの解を求める.

式 (42), (44) より, v₀ と h₀ は s のみの関数であることが導かれる. これと, 式 (29), (39) より,

$$v_0 = 0 \quad \dots\dots\dots(48)$$

$$h_0 = 1 \quad \dots\dots\dots(49)$$

と求まる. 式 (41), (49) と, u₀ が s のみの関数であることにより,

$$u_0 = 1 \quad \dots\dots\dots(50)$$

となる. 式 (48), (49), (50) を式 (43) に代入すると, 次式を得る.

$$\frac{giR}{V^2} = \frac{c}{2} \quad \dots\dots\dots(51)$$

これは, 等流条件になっている.

c) 1 次のオーダーの解

ε¹ に関する支配方程式は次のようになる.

$$\int_{-1}^1 (u_0 h_1 + u_1 h_0) dn = 0 \quad (\text{流量の連続式}) \quad \dots\dots(52)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} (u_0 h_0) + \frac{\partial}{\partial n} (h_0 v_0 n \cos ks + h_0 v_1 + h_1 v_0) = 0$$

(連続式) ……(53)

$$u_0 \frac{\partial u_1}{\partial s} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial s} + v_0 n \cos ks \frac{\partial u_1}{\partial s} + v_1 n \cos ks \frac{\partial u_0}{\partial s}$$

$$+ v_1 \frac{\partial u_1}{\partial s} + \cos ks (u_0 v_1 + u_1 v_0) = -\frac{1}{F_r^2} \frac{\partial h_1}{\partial s}$$

$$- \frac{c}{2} \frac{u_0^2}{h_0} \left\{ n \cos ks + 2 \left(\frac{u_1}{u_0} \right) - \frac{h_1}{h_0} \right\}$$

(s_a 方向運動量方程式) ……(54)

$$u_0 \frac{\partial v_0}{\partial s} + v_0 n \cos ks \frac{\partial v_0}{\partial n} + v_0 \frac{\partial v_1}{\partial n} + v_1 \frac{\partial v_0}{\partial n}$$

$$- u_0^2 \cos ks$$

$$= -\frac{1}{F_r^2} \left(n \cos ks \frac{\partial h_0}{\partial n} + \frac{\partial h_1}{\partial n} \right)$$

(n_a 方向運動量方程式) ……(55)

境界条件は,

$$n = \pm 1 \quad \text{で} \quad v_1 = 0 \quad \dots\dots\dots(56)$$

$$s = s_0 \quad \text{で} \quad u_1 = nu_{i1} \quad \dots\dots\dots(57)$$

$$s = s_d \quad \text{で} \quad \frac{1}{2} \int_{-1}^1 h_1 dn = 0 \quad \dots\dots\dots(58)$$

となる.

次に, ε の 1 次のオーダーの解を求める.

式 (48), (49), (50) を式 (53) に代入し, これを境界条件の式 (56) を用いて解くと, 次式を得る.

$$v_1 = 0 \quad \dots\dots\dots(59)$$

式 (48), (49), (50), (59) を式 (55) に代入すると, 次式を得る.

$$\frac{\partial h_1}{\partial n} = F_r^2 \cos ks \quad \dots\dots\dots(60)$$

これより,

$$h_1 = n F_r^2 \cos ks + F_{h1}(s) \quad \dots\dots\dots(61)$$

を得る. ここに, F_{h1}(s) は s のみの関数である.

式 (52) に式 (49), (50) を代入すると, 次式を得る.

$$\int_{-1}^1 (h_1 + u_1) dn = 0 \quad \dots\dots\dots(62)$$

式 (54) に式 (48), (49), (50), (59) を代入すると, 次式を得る.

$$\frac{\partial u_1}{\partial s} + cu_1 = -\frac{1}{F_r^2} \frac{\partial h_1}{\partial s} - \frac{c}{2} n \cos ks + \frac{c}{2} h_1$$

……………(63)

式 (63) の両辺を n = -1 から n = 1 まで n で積分し, 式 (61), (62) を用いて変形すると, 次式を得る.

$$(F_r^2 - 1) \frac{\partial F_{h1}(s)}{\partial s} + \frac{3}{2} c F_r^2 F_{h1}(s) = 0 \quad \dots\dots(64)$$

F_r² ≠ 1 の場合を考える.

$$C_2 = 1.5 c F_r^2 / (F_r^2 - 1) \quad \dots\dots\dots(65)$$

とおくと,

$$F_{h1}(s) = C_1 e^{-C_2 s} \quad \dots\dots\dots(66)$$

となる. ここに, C₁ は境界条件より定まる定数である.

式 (58) の下流端の境界条件より, s = s_d で,

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 h_1 dn = 0 \quad \dots\dots\dots(67)$$

である. 式 (61), (66) を式 (67) に代入すると, C₁ = 0 を得る. ゆえに,

$$h_1 = n F_r^2 \cos ks \quad \dots\dots\dots(68)$$

となる. 式 (63) に式 (68) を代入して得られる微分方程式を解き, 境界条件の式 (57) を用いると, 次式を得る.

$$u_1 = n(A \sin ks + B \cos ks + C_3 e^{-c s}) \quad \dots\dots\dots(69)$$

ここに,

$$\begin{cases} A = kc(1 + F_r^2)/2(c^2 + k^2) \\ B = \{0.5 \cdot c^2(F_r^2 - 1) - k^2\}/(c^2 + k^2) \\ C_3 = (u_{i1} - A \sin ks_0 - B \cos ks_0) e^{c s_0} \end{cases} \quad \dots\dots(70)$$

である.

1 次までの解をまとめると,

$$\begin{cases} h = h_0 + \epsilon h_1 = 1 + \epsilon n F_r^2 \cos ks \\ u = u_0 + \epsilon u_1 = 1 + \epsilon n(A \sin ks \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} +B \cos ks + C_3 e^{-cs} \\ v = v_0 + \varepsilon v_1 = 0 \end{array} \right. \dots\dots\dots (71)$$

となる。係数 A, B, C_3 は式 (70), $c = fR/H_0$ で示される。

d) 2 次のオーダーの解

ε^2 に関する支配方程式は、次のようにまとめられる。

$$\int_{-1}^1 (h_0 u_2 + h_1 u_1 + h_2 u_0) dn = 0 \quad (\text{流量の連続式}) \dots\dots\dots (72)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} (h_0 u_1 + h_1 u_0) = -\frac{\partial}{\partial n} \{n \cos ks (h_0 v_1 + h_1 v_0) + h_0 v_2 + h_1 v_1 + h_2 v_0\} \quad (\text{連続式}) \dots\dots\dots (73)$$

$$\begin{aligned} u_0 \frac{\partial u_2}{\partial s} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial s} + u_2 \frac{\partial u_0}{\partial s} + v_0 \frac{\partial u_2}{\partial n} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} \\ + v_2 \frac{\partial u_0}{\partial n} + v_3 \frac{\partial u_0}{\partial n} + n \cos ks \left(v_0 \frac{\partial u_2}{\partial n} \right. \\ \left. + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} + v_2 \frac{\partial u_0}{\partial n} \right) = -\frac{1}{F_r^2} \frac{\partial h_2}{\partial s} \\ - \frac{c}{2} \frac{u_0^2}{h_0} \left[-2 \left(\frac{u_1}{u_0} \right) \left(\frac{h_1}{h_0} \right) + \left(\frac{u_1}{u_0} \right)^2 \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{u_2}{u_0} \right) + \left(\frac{h_1}{h_0} \right)^2 - \left(\frac{h_2}{h_0} \right) \right] \\ + n \cos ks \left\{ 2 \left(\frac{u_1}{u_0} \right) - \left(\frac{h_1}{h_0} \right) \right\} \end{aligned} \dots\dots\dots (74)$$

$$\begin{aligned} u_0 \frac{\partial v_1}{\partial s} + u_1 \frac{\partial v_0}{\partial s} + v_0 \frac{\partial v_2}{\partial n} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial n} + v_2 \frac{\partial v_0}{\partial n} \\ + n \cos ks \left(v_0 \frac{\partial v_1}{\partial n} + v_1 \frac{\partial v_0}{\partial n} \right) - 2 u_1 u_0 \cos ks \\ = -\frac{1}{F_r^2} \frac{\partial}{\partial n} (h_1 n \cos ks + h_2) \end{aligned} \dots\dots\dots (75)$$

境界条件は、

$$n = \pm 1 \quad \text{で} \quad v_2 = 0 \dots\dots\dots (76)$$

$$s = s_0 \quad \text{で} \quad u_2 = \left(n^2 - \frac{1}{3} \right) u_{i2} \dots\dots\dots (77)$$

$$s = s_d \quad \text{で} \quad \frac{1}{2} \int_{-1}^1 h_2 dn = 0 \dots\dots\dots (78)$$

となる。

ε の 2 次のオーダーの解を求める。

式 (73) に式 (48), (49), (50), (59), (68), (69) を代入して得られる微分方程式を解き、境界条件の式 (76) を用いると、次式を得る。

$$v_2 = (1 - n^2) (D \cos ks + E \sin ks + C_4 e^{-cs}) \dots\dots\dots (79)$$

ここに、

$$\left\{ \begin{array}{l} D = kA/2 \\ E = -k(B + F_r^2)/2 \dots\dots\dots (80) \\ C_4 = -C_3 c/2 \end{array} \right.$$

である。

式 (75) に、式 (48), (49), (50), (59), (68), (69) を代入して得られた微分方程式を解くと、次式を得る。

$$h_2 = h_{21}(s, n) + h_{22}(s) \dots\dots\dots (81)$$

ここに、

$$\begin{aligned} h_{21}(s, n) = \frac{F_r^2}{2} \left(n^2 - \frac{1}{3} \right) \{ A \sin 2 ks \\ + B_2 (\cos 2 ks + 1) + 2 C_3 e^{-cs} \cos ks \} \end{aligned} \dots\dots\dots (82)$$

$B_2 = B - 0.5$ であり、 $h_{22}(s)$ は s のみの関数である。

次に、 $h_{22}(s)$ を求める。式 (72) に式 (49), (50) を代入すると、次式を得る。

$$\int_{-1}^1 u_2 dn = - \int_{-1}^1 (u_1 h_1 + h_2) dn \dots\dots\dots (83)$$

式 (74) に式 (48), (49), (50), (59) を代入すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial s} + cu_2 = -u_1 \frac{\partial u_1}{\partial s} - v_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} - v_2 \cos ks \\ - \frac{1}{F_r^2} \frac{\partial h_2}{\partial s} + cu_1 h_1 - \frac{c}{2} h_1^2 - \frac{c}{2} u_1^2 + \frac{c}{2} h_2 \\ - cu_1 n \cos ks + \frac{c}{2} h_1 n \cos ks \dots\dots\dots (84) \end{aligned}$$

式 (84) の両辺を $n = -1$ から $n = 1$ まで n で積分し、式 (68), (69), (79), (81), (82), (83) を用いて変形すると、次式を得る。ただし、 $F_r^2 \neq 1$ の場合を考える。

$$\frac{\partial h_{22}}{\partial s} + c_2 h_{22} = \frac{F_r^2}{2(F_r^2 - 1)} G_{h22}(s) \dots\dots\dots (85)$$

ここに、

$$\begin{aligned} G_{h22}(s) = T_1 \sin^2 ks + T_2 \sin ks \cos ks + T_3 \cos^2 ks \\ + (T_4 \sin ks + T_5 \cos ks) e^{-cs} + T_6 e^{-2cs} \end{aligned} \dots\dots\dots (86)$$

である (係数 $T_1 \sim T_6$ については、付録参照)。

式 (85) を解き、境界条件の式 (78) を用いると、次式を得る。

$$\begin{aligned} h_{22}(s) = 0.5 F_r^2 (A_3 \sin 2 ks + B_3 \cos 2 ks \\ + D_3 e^{-cs} \sin ks + E_3 e^{-cs} \cos ks \\ + C_5 e^{-2cs} + C_6 + C_7 e^{-cs}) \dots\dots\dots (87) \end{aligned}$$

(係数 $A_3, B_3, D_3, E_3, C_5, C_6, C_7$ については、付録参照)

次に、 u_2 を求める。式 (84) の右辺に、式 (68), (69), (79), (81) を代入すると、次式を得る。

$$\frac{\partial u_2}{\partial s} + cu_2 = G_{u2}(s, n) \dots\dots\dots (88)$$

ここに、

$$\begin{aligned} G_{u2}(s, n) = P_1(n) \sin^2 ks + P_2(n) \sin ks \cos ks \\ + P_3(n) \cos^2 ks + P_4(n) e^{-cs} \sin ks \\ + P_5(n) e^{-cs} \cos ks + P_6(n) e^{-2cs} + P_7(n) \end{aligned} \dots\dots\dots (89)$$

である (係数 $P_1(n) \sim P_7(n)$ については、付録参照)。

式 (88) を境界条件の式 (77) を用いて解くと、次式を得る。

$$u_2 = u_{21}(s, n) + C_8(n) e^{-cs} \dots\dots\dots (90)$$

ここに、

$$u_{21}(s, n) = \frac{P_1 + P_3 + 2P_7}{2} + \frac{P_3 - P_1}{2(c^2 + 4k^2)} \times (c \cos 2ks + 2k \sin 2ks) + \frac{P_2}{2(c^2 + 4k^2)} (c \sin 2ks - 2k \cos 2ks) - \frac{P_4}{k} e^{-cs} \cos ks + \frac{P_5}{k} e^{-cs} \sin ks - \frac{P_6}{c} e^{-2cs} + \frac{P_8}{c - C_2} e^{-c_1 s} \dots\dots\dots (91)$$

$$P_8 = \left(\frac{C_2}{2} + \frac{cF_r^2}{4} \right) C_7 \dots\dots\dots (92)$$

$$C_8(n) = \left\{ u_{12} \left(n^2 - \frac{1}{3} \right) - u_{21}(s_0, n) \right\} e^{cs_0} \dots\dots\dots (93)$$

である。ここまでで、2 次の成分が求められた。

2 次までの解をまとめると、

$$\begin{cases} h = 1 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 (h_{21} + h_{22}) \\ u = 1 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 \\ v = \varepsilon^2 v_2 \end{cases} \dots\dots\dots (94)$$

となる (内容の詳細は、式 (68), (69), (79), (82), (87), (90) に示されている)。

(4) 平衡河床水路の場合の流れの解析

平衡河床とは、河床物質の移動が平衡状態に達している、水路床形状が時間的には変化しない状態を指す。

Engelund⁹⁾ の解析および池田ら⁶⁾ の解析に従い、河床形状は、

$$\eta = \left(\frac{rc + n_a}{rc} \right)^\varphi - 1 \dots\dots\dots (95)$$

で変化するものと仮定する。ここに φ は定数で、Engelund の解析の場合には、

$$\varphi = 7 \tan \phi \dots\dots\dots (96)$$

で表わされる。 ϕ は、dynamic friction angle である。

φ の関数形については Odgaard¹⁷⁾ の分析がある。それによれば Engelund のモデルは本論文のような蛇行水路の場合には適当と考えられるが、2 次流が完全発達域にある場合には不適当である。完全発達域では φ は粒子フルード数の関数として表わされる。

η をテイラー展開すると、次式を得る。

$$\eta = \varepsilon n \varphi \cos ks + \varepsilon^2 n^2 \frac{\varphi(\varphi-1)}{2} \cos^2 ks + \dots\dots\dots (97)$$

したがって、

$$\eta_0 = 0 \dots\dots\dots (98)$$

$$\eta_1 = n \varphi \cos ks \dots\dots\dots (99)$$

となる。式 (98) より、 ε の 0 次のオーダーの式は、矩形断面の場合とまったく同じである。したがって

$$\begin{cases} h_0 = 1 \\ u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \\ giR/V^2 = c/2 \end{cases} \dots\dots\dots (100)$$

が成立する。

ε の 1 次のオーダーの式を式 (98), (99), (100) を用いて変形すると、流量の連続式、連続式、 n_a 方向の運動量方程式および境界条件は、矩形断面の場合とまったく同じになり、 s_a 方向の運動量方程式においては、式 (63) の右辺に $c\eta_1/2$ が加わる。これらを矩形断面の場合と同じ手順で解くと、

$$\begin{cases} h_1 = nF_r^2 \cos ks \\ u_1 = n(A' \sin ks + B' \cos ks + C_3' e^{-cs}) \dots\dots\dots (101) \\ v_1 = 0 \end{cases}$$

が求まる。ここに、

$$\begin{cases} A' = kc(1 + F_r^2 + \varphi)/2(c^2 + k^2) \\ B' = \{c^2(F_r^2 + \varphi - 1)/2 - k^2\}/(c^2 + k^2) \dots\dots\dots (102) \\ C_3' = (u_{11} - A' \sin ks_0 - B' \cos ks_0) e^{cs_0} \end{cases}$$

である。

ε の 2 次のオーダーの連続式を式 (98), (100), (101) を用いて変形すると、次式を得る。

$$\frac{\partial v_2}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial s} (u_1 + h_1 + \eta_1) \dots\dots\dots (103)$$

右辺に式 (99), (101) を代入し、境界条件を用いて解くと、次式を得る。

$$v_2 = (1 - n^2) (D' \cos ks + E' \sin ks + C_4' e^{-cs}) \dots\dots\dots (104)$$

ここに、

$$\begin{cases} D' = kA'/2 \\ E' = -k(B' + F_r^2 + \varphi)/2 \dots\dots\dots (105) \\ C_4' = -C_3'c/2 \end{cases}$$

である。

式 (100), (101) を ε の 2 次のオーダーの n 方向の運動量方程式に代入して解くと、次式を得る。

$$h_{21} = \frac{F_r^2}{2} \left(n^2 - \frac{1}{3} \right) (A' \sin 2ks + (B' - 0.5) \times (\cos 2ks + 1) + 2C_3 e^{-cs} \cos ks) \dots\dots\dots (106)$$

ここに、 h_{21} は、断面平均水位からの偏差 (H_0 で無次元化したもの) である。

(5) 従来との比較

Engelund⁹⁾ の理論および池田ら⁶⁾ の理論では、平衡領域における解、式 (95) が蛇行流路にも適用できると仮定して、流速分布および水位分布を求めている。その理論を導く仮定として、

$$\frac{\partial}{\partial s_a} = \frac{\partial}{\partial s_c}, \quad (rc + n_a \approx rc) \dots\dots\dots (107)$$

を用いている。この仮定は、 ε の 1 次のオーダーの誤差を含むことになる。本論文においては、 ε の 2 次解が求

められたが、ここでは解の次数を一致させて、従来の解との比較を行う。

池田らの求めた解は ε の 1 次解に相当し、無次元流速の 1 次成分は次式で表わされる。

$$u_1 = n(A_1 \sin ks + B_1 \cos ks) \dots\dots\dots (108)$$

ここに、係数は次式で与えられる。

$$\begin{cases} A_1 = \frac{kc}{c^2+k^2} \left(1 + \frac{\varphi}{2} + \frac{Fr^2}{2} \right) \\ B_1 = \frac{1}{c^2+k^2} \left\{ \frac{c^2}{2} (Fr^2 + \varphi) - k^2 \right\} \end{cases} \dots\dots\dots (109)$$

一方、本論文において得られた 1 次成分は、式 (101) に示される。平衡領域においては、境界条件の影響を表わす項 $C_3'e^{-cs}$ が 0 となるから、

$$u_1 = n(A' \sin ks + B' \cos ks) \dots\dots\dots (110)$$

$$\begin{cases} A' = \frac{kc}{c^2+k^2} \left\{ 1 + \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2} (Fr^2 - 1) \right\} \\ B' = \frac{1}{c^2+k^2} \left\{ \frac{c^2}{2} (Fr^2 + \varphi - 1) - k^2 \right\} \end{cases} \dots\dots\dots (111)$$

となる。

いま、 $\varphi=0$ (矩形断面) の場合を考えてみる。わん曲の頂部 ($s=0$) においては、 $u_1=nB'$ であるから、 B' が正ならば外岸側が、負ならば内岸側の流速が大きくなる。式 (111) より、常流 ($Fr < 1$) においては、常に

$B' < 0$ である。したがって、 $s=0$ では常に内岸側の流速が大きくなる。従来の理論では、平坦床においても c および Fr の値によって $s=0$ において外岸側が速くなることが生じ得る。

φ の値が大きくなるにつれて、 B' の値が負から正へと転じ増加する。すなわち、わん曲の頂部において、外岸側の流速の方が大きくなる。これは河川において観測される結果と一致しており、そうした流況は、外岸側の水深が大きいことに起因しているといえる。

$Fr=0.5$, $k=4/\pi$ (90° わん曲に対応) の場合に、 $c=fR/H_0$ を変数として、 A_1, A', B_1, B' をプロットしたのが 図-3 である (ただし $\varphi=0$)。また、代表流況として $Fr=0.5$, $k=4/\pi$ を選び、 c と φ を変数として A', B' をプロットしたのが 図-4 である。 $\varphi=0$ は矩形断面水路の場合に、 $\varphi=4$ は、Engelund⁹⁾ の理論における dynamic friction angle が約 30° の場合 (Hooke¹⁶⁾ の移動床の実験に対応) にあたる。

実験水路においては、 c の値は $10^{-1} \sim 10^{-2}$ のオーダーであることが多いので、式 (107) の仮定による誤差はあまり大きくない。しかしながら、河川においては、 c の値は $10^0 \sim 10^1$ のオーダーであるので、従来の理論に含まれる式 (107) の仮定は適切ではないと思われる。

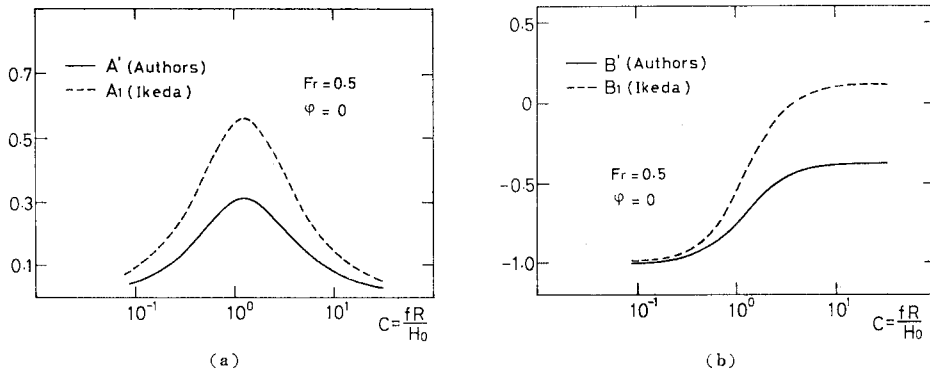


図-3 著者らの理論と池田らの理論の比較

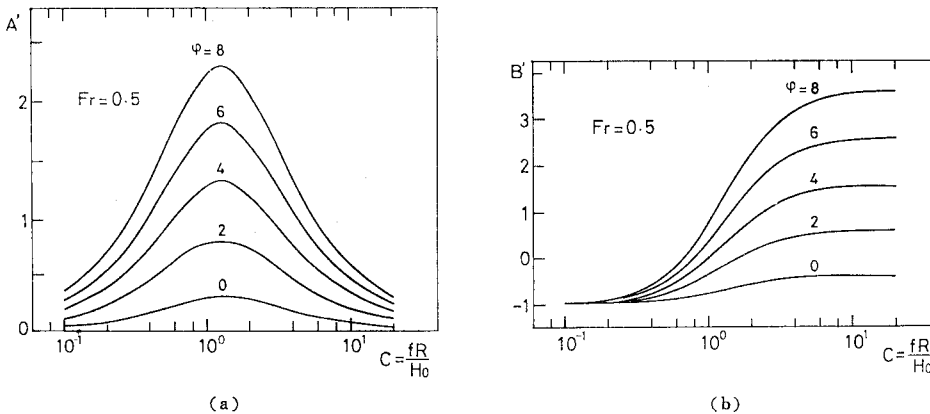


図-4 主流速分布を表わす係数 A', B' と河床形状との関係

c の表現は $c = fR/H_0 = (f/2)(B_0/H_0)\epsilon^{-1}$ と変形できる。実測洪水時の資料¹⁰⁾を再整理すると、十勝川、雄物川、阿武隈川、利根川、九頭竜川、淀川、斐伊川、吉野川、仁淀川、渡川での流量観測点において(水面幅/最大水深)の値が80~150を示している。また、日本の河川のわん曲部における ϵ の値の70%は0.1~0.3の範囲にあり(文献13)における資料に関し)、河川における上述の c のオーダーは実在のものである。

3. 実験結果との比較

(1) 実験水路の平面形と中心軸形状の蛇行流路曲線による近似

矩形断面のわん曲水路の実験は、直線と円を組み合わせたものが多い。一方、本論文の2.の解は、蛇行流路曲線に対して求められたものである。そこで、円と直線を組み合わせた曲線を蛇行流路曲線で近似できれば、今回求めた理論式と実験値とを比較することができる。

図-5にRozovskii¹¹⁾が実験を行った180°わん曲水

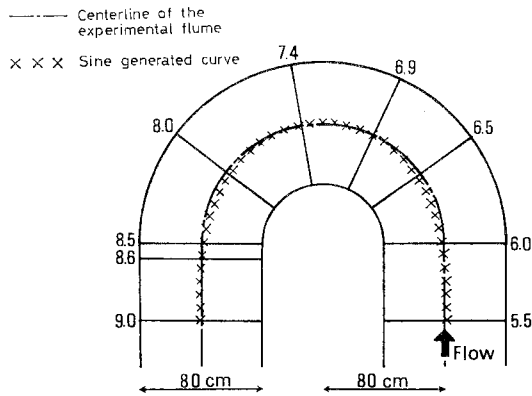


図-5 Rozovskii の実験水路の平面形状

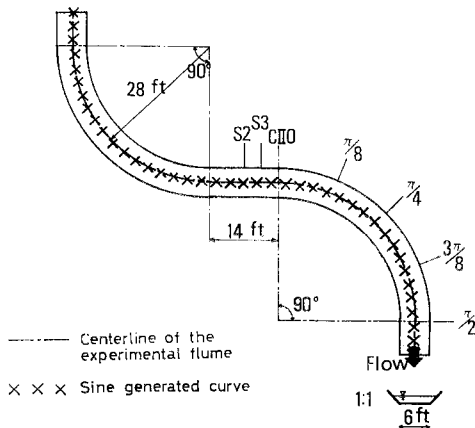


図-6 Yen の実験水路の平面形状

路の平面形状とその水路中心軸を蛇行流路曲線で近似したものを示す。蛇行流路曲線は、 $\theta_0 = \pi/2$, $L = 2\pi R_0 + 2.5 R_0$ とした。ここに R_0 は、水路中心軸の円弧の曲率半径である。 L は曲線形状がRozovskiiの実験水路と最もよく合うように定めた。断面番号6.5と8.0の付近で少しずれているが大体合っている。

図-6にYen¹²⁾が実験を行った水路の平面形状と水路中心軸を蛇行流路曲線で近似したものを示す。 $\theta_0 = \pi/4$, L は実験水路中心軸上の一波長の長さに等しくとった。両者はほとんど一致している。

著者ら^{10), 13)}は図-7に示すような、水路中心軸に沿って一定勾配をつけた10連続わん曲部を中央部にもつ水路において、平衡領域を出現させうえて実験を行った。平衡領域において得られた結果をわん曲の同位相面で平均化した(以後、同位相平均値とよぶ)。また、水路中心軸は、蛇行流路曲線($\theta_0 = \pi/4$, L は実験水路の中心軸

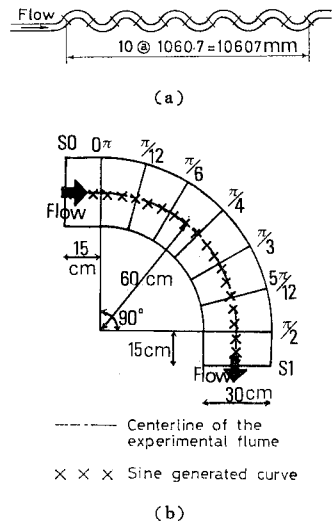


図-7 著者らの実験の水路平面形状

上の一波長の長さと等しくとった)とほとんど一致している。

(2) Rozovskii の実験結果と理論値との比較

Rozovskiiの実験 No. 1 の諸元は、 $\theta_0 = 180^\circ$ (円弧の中心角), $R_0 = 0.8 \text{ m}$, $B_0 = 0.8 \text{ m}$, $F_r = 0.34$, $H_0 = 6 \text{ cm}$ (わん曲入り口の断面平均水深), $V = 0.26 \text{ m/s}$ (わん曲入り口の断面平均流速), シェジュー係数=60 (m, s単位)である。水深平均した主流速分布の実験値と式(71)(1次解), 式(94)(2次解)による計算値を図-8に示す。上流端における境界条件としては、上流端の流速分布の実験値に最小2乗法を施して、 $u_{i1} = -0.0142$, $u_{i2} = -0.575$ を定めた。実験値と計算値はよく合っている。また、 ϵ の1次解と2次解との差異はあまりないことがわかる。

横断方向の水位分布の実験値と式(71), (94)による計算値を図-9に示す。ただし、各断面における平均水位を0点にしているため、 $h_2 = h_{21}$ である。1次解は不十分であるが、2次解は、外岸付近のごく一部を除いて、実験値と非常によく合っている。

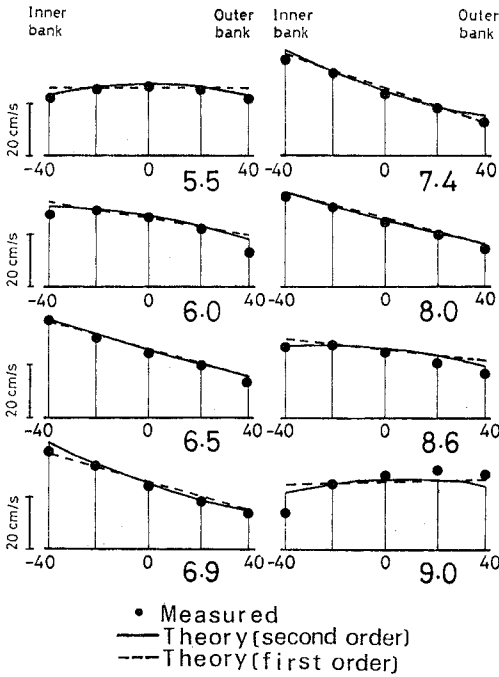


図-8 Rozovskii の実験値と理論値との比較 (主流速分布)

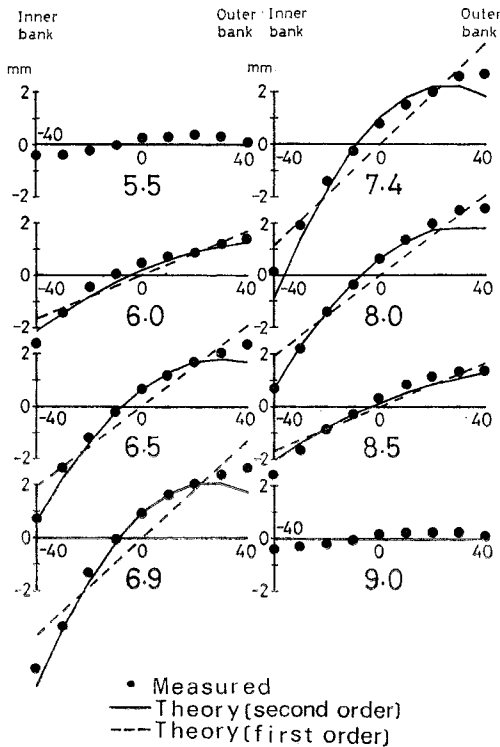


図-9 Rozovskii の実験値と理論値との比較 (水位分布)

Rozovskii の実験は (水路幅/曲率半径) の比が大きく、 $\epsilon=0.564$ と十分に 1 より小さいとはいえないが、水位・流速分布とも理論による予測結果は実験結果と比較的よく合っているといえる。

(3) Yen の実験結果と理論値との比較

Yen の実験 run 3 の諸元は、 $\theta_b=90^\circ$, $R_0=8.53$ m, $B_0=1.83$ m (底面幅), $F_r=0.58$, $H_0=0.156$ m (わん曲とわん曲を接続している直線水路中央における断面平均水深), $V=0.691$ m/s (流量/流下断面積), $i_s=0.00072$ (流下方向の水面勾配), 側壁の勾配=1/1, $f=2gH_0i_s/V^2=0.0046$ である。

水深平均した主流速分布の実験値と式 (71), (94) による計算値を 図-10 に示す。上流端における境界条件としては、上流端の流速分布の実験値に最小 2 乗法を施して、 $u_{i1}=-0.955$, $u_{i2}=-6.194$ を与えた。下流側の外壁付近と下流端以外は、実験値と理論値はよく合っている。1 次解と 2 次解の差異はほとんどない。

横断方向の水位分布の実験値と式 (71), (94) による計算値を 図-11 に示す。2 次解は、実験値とよく合っている。

Yen の実験は、台形断面で行われたが (水深/水路幅) の比が小さいので、側壁付近を除いては、矩形断面による実験結果と似ており、本論文の理論式による計算値とよい一致が得られたものと思われる。

(4) 著者らの実験結果と理論値との比較

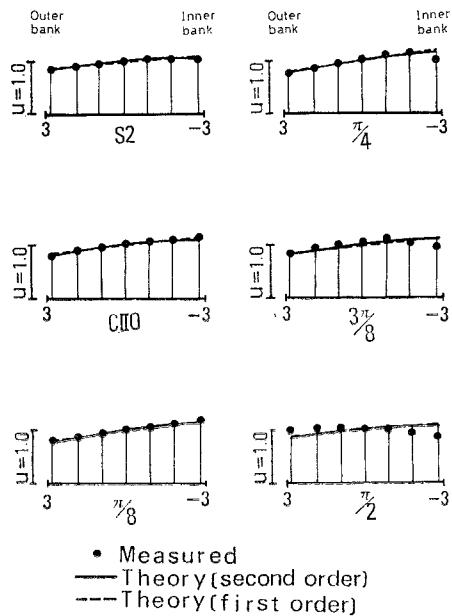


図-10 Yen の実験値と理論値との比較 (主流速分布, 無次元表示, $u=1$ は平均値)

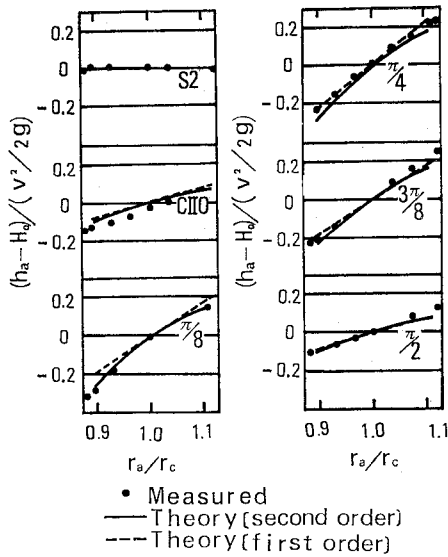


図-11 Yen の実験値と理論値との比較 (水位分布)

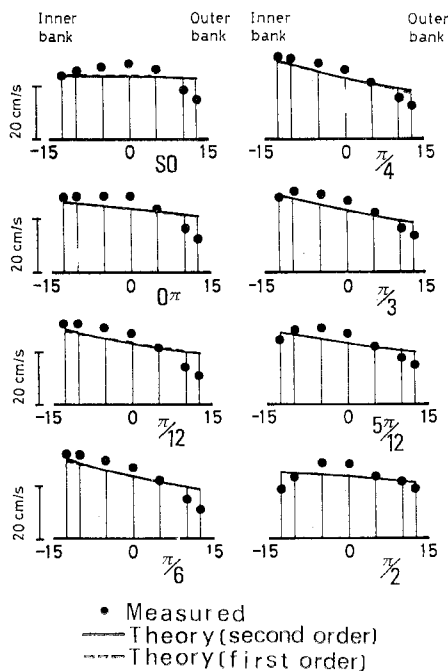


図-12 著者らの実験値と理論値との比較 (主流速分布)

著者らの実験の諸元は、 $\theta_b=90^\circ$, $R_0=0.6\text{ m}$, $B_0=0.3\text{ m}$, $F_r=0.416$, $H_0=2.93\text{ cm}$ (全断面平均水深), $V=0.223\text{ m/s}$ (流量/ H_0B_0), $i=1/1000$ (水路中心軸に沿った底面勾配), $f=0.0115$ である。

水深平均した主流速分布の同位相平均値と式 (71), (94) による計算値を 図-12 に示す。計算値は平衡領域の解 ($e^{-cs}=0$) を示す。外岸付近において計算値は実験値より大きく出ているが、それ以外の部分においては大

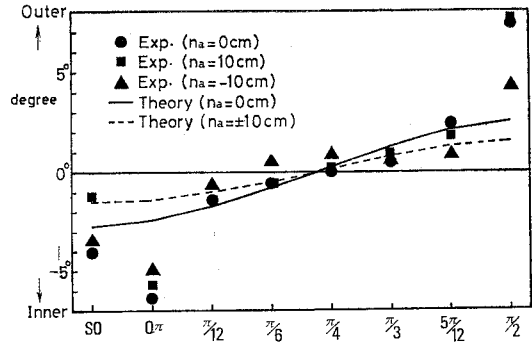


図-13 著者らの実験値と理論値との比較 (流向分布)

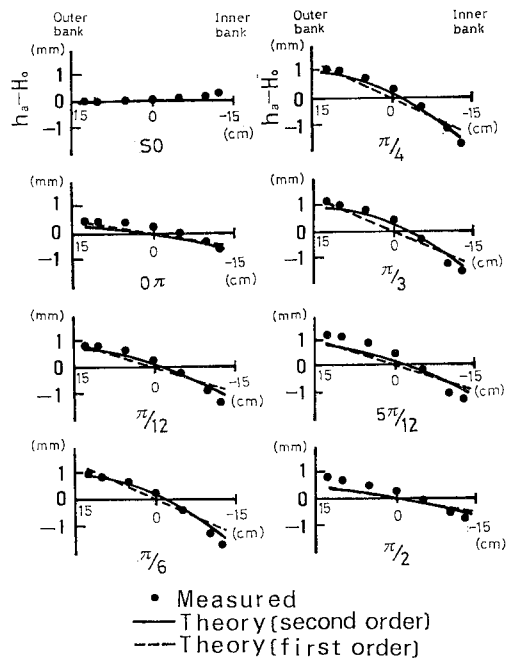


図-14 著者らの実験値と理論値との比較 (水位分布)

体合っている。

水深平均した速度ベクトルの同位相平均値の流向分布の実験値と $\arctan\{\varepsilon^2 v_2 / (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2)\}$ の計算値を 図-13 に示す。 0π (わん曲の入り口), $\pi/2$ (わん曲の出口) において、実験値は急に大きくなっているが、それ以外の部分では、実験値と理論値はほぼ合っている。理論解は、水路中心軸の曲率が連続的に変化する蛇行流路曲線を仮定しているのに対し、実験水路においては、 $0\pi, \pi/2$ は、曲率の急変点になっているため、理論値と実験値は合わなかったものと思われる。

横断方向の水位分布の同位相平均値と式 (71), (94) による計算値を 図-14 に示す。ただし、各断面における平均水位を 0 点にしているの、 $h_2=h_{21}$ である。2 次解は、実験値と比較的よく一致している。

(5) 実験結果と理論値との比較のまとめ

横断方向の主流速分布, 流向分布, 水位分布に関する理論解は, Rozovskii, Yen, および著者らの実験結果をほぼ説明し得る. さらに細部について述べると, 理論解は平坦床においては必ず内岸側に高速域が現われるが, 実験においても共通して同様の傾向がみられる. 水位分布については, 2次解を考えるとかなり改善される. しかし, 主流速分布については, 1次解と2次解の差はほとんどなく, 1次解でも比較的良好に実験結果と一致した.

4. 結 語

本論文で得られた結果をまとめると次のようになる.

(1) 蛇行流路曲線を水路中心軸とする水路において, 任意点を表現する直交曲線座標系を正確に定義した.

(2) 蛇行流路曲線を水路中心軸とする水路における流れに対して, ϵ (水路の半幅/最小曲率半径) をパラメーターとした摂動法により, ϵ の2次のオーダーの解までを求めた. そして, Englund の理論および池田らの理論において用いられている $\partial/\partial s_c \approx \partial/\partial s_a$ の仮定が不十分であることを示した. この影響は, 幅・水深比が 10^2 級の河川の場合には, 顕著に生ずる.

(3) 主流の最大流速の出現位置は横断方向の河床形状に強く規定される. 本論文で得られた理論によれば常流に対して, わん曲の頂部では平坦床であれば常に内岸側の流速が速く, 移動床の平衡形状であれば外岸側の流速が大となる. これは従来の観測と一致する.

(4) Rozovskii, Yen および著者らの実験結果と理論式を比較した. 水位分布についてはよい一致が得られた. 主流速の水深平均値は, 出口付近を除いてはよい一致がみられた. 水深平均した速度ベクトルの流向分布は, 実験水路の曲率の急変点 (直線と円弧の接続部分) を除いては, 理論値と実験値がほぼ一致した.

(5) 1次解の横断方向水面勾配は一定値であり, 2次解の方がよりよく実態を表わす. 流速については, 1次解と2次解の差は小さく, 実用的には1次解を用いてよいと考えられる.

謝 辞: 東京大学応用水理研究室の廣沢佑嘯氏, 大学院生の池谷毅・山崎晶の両君には, 図面の製作などでお世話になった. 記して謝意を表します.

付 録

1. 式 (86) の係数一覧

$$\begin{aligned} T_1 &= (-2 ABk + 2 F_r^2 k A + 4 AE + cA^2)/3 \\ T_2 &= (2 A^2 k - 2 B^2 k + 4 F_r^2 Bk + 4 AD + 4 BE \\ &\quad + 4 E - 2 cAF_r^2 + 2 ABC - 2 cAF_r^2 + 2 Ac)/3 \\ T_3 &= (2 ABk - 2 F_r^2 Ak + 4 DB + 4 D - 4 cBF_r^2 \\ &\quad + cB^2 + cF_r^4 + 2 cB - cF_r^2)/3 \\ T_4 &= (-2 cAC_3 - 2 BkC_3 + 2 F_r^2 kC_3 + 4 EC_3 \\ &\quad + 4 AC_4 + 2 cAC_3)/3 \\ T_5 &= (2 AkC_3 - 2 BcC_3 + 2 F_r^2 cC_3 + 4 DC_3 + 4 BC_4 \\ &\quad + 4 C_4 - 4 cC_3 F_r^2 + 2 BcC_3 + 2 cC_3)/3 \\ T_6 &= -cC_3^2 \end{aligned}$$

2. 式 (87) の係数一覧

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{2k(T_3 - T_1) + C_2 T_2}{2(C_2^2 + 4k^2)(F_r^2 - 1)} \\ B_3 &= \frac{C_2(T_3 - T_1) - 2kT_2}{2(C_2^2 + 4k^2)(F_r^2 - 1)} \\ D_3 &= \frac{(C_2 - c)T_4 + kT_5}{\{(C_2 - c)^2 + k^2\}(F_r^2 - 1)} \\ E_3 &= \frac{-kT_4 + (C_2 - c)T_5}{\{(C_2 - c)^2 + k^2\}(F_r^2 - 1)} \\ C_3 &= \frac{T_6}{(C_2 - 2c)(F_r^2 - 1)} \\ C_6 &= \frac{T_1 + T_3}{2C_2(F_r^2 - 1)} \\ C_7 &= -e^{csd}(A_3 \sin 2ks_d + B_3 \cos 2ks_d \\ &\quad + D_3 e^{-csd} \sin ks_d + E_3 e^{-csd} \cos ks_d \\ &\quad + C_3 e^{-2csd} + C_6) \end{aligned}$$

3. 式 (89) の係数一覧

$$\begin{aligned} P_1(n) &= n^2(ABk + AE + Ak - cA^2/2) - AE - Ak/3 \\ &\quad + A_3k - cF_r^2 B_3/4 \\ P_2(n) &= n^2(B^2k - A^2k + AD + BE + E + 2kB_2 \\ &\quad + 3cAF_r^2/2 - cAB - cA) - AD - BE - E \\ &\quad - 2kB_2/3 + 2kB_3 - cAF_r^2/6 + cA_3F_r^2/2 \\ P_3(n) &= n^2(-ABk + BD + D - kA + cBF_r^2 \\ &\quad - cB^2/2 - cF_r^4/2 + cF_r^2 B_2/2 - cB \\ &\quad + cF_r^2/2) - BD - D + kA/3 - kA_3 \\ &\quad - cB_2F_r^2/6 + cF_r^2 B_3/4 \\ P_4(n) &= n^2(BkC_3 + AcC_3 + EC_3 + AC_4 + C_3k \\ &\quad - cAC_3) - EC_3 - AC_4 - C_3k/3 + D_3k/2 \\ &\quad + E_3c/2 + cF_r^2 E_3/4 \\ P_5(n) &= n^2(C_3cB - C_3Ak + DC_3 + BC_4 + C_4 \\ &\quad + 3C_3cF_r^2/2 - C_3cB) - DC_3 - BC_4 - C_4 \\ &\quad - C_3c/3 + D_3c/2 - E_3k/2 - cC_3F_r^2/6 \\ &\quad + cD_3F_r^2/4 \\ P_6(n) &= -C_3C_4 + cC_5 + cF_r^2 C_6/4 \\ P_7(n) &= cC_6F_r^2/4 \end{aligned}$$

参 考 文 献

- 1) Kikkwa, H., S. Ikeda, H. Ohkawa and Y. Kawamura: Secondary flow in a bend of turbulent stream, Proc. JSCE, No. 219, pp. 107~114, 1973.

- 2) Leschziner, M.A. and W. Rodi : Calculation of strongly curved open channel flow, Proc. ASCE, J. Hyd. Div., Vol. 105, HY 10, pp. 1297~1314, 1979.
- 3) de Vriend, H.J. : A mathematical model of steady flow in curved shallow channels, J. Hyd. Res., Vol. 15, No. 1, pp. 37~54, 1977.
- 4) Kalkwijk, J.P.Th. and H.J. de Vriend : Computation of the flow in shallow river bends, Report No. 80-1, Communications on Hydraulics, Delft University of Technology, Dept. of Civil Engineering, p. 25, 1980.
- 5) Englund, F. : Flow and bed topography in channel bends, Proc. ASCE, J. Hyd. Div., Vol. 100, HY 11, pp. 1631~1647, 1974.
- 6) 池田駿介・日野幹雄・吉川秀夫 : 河川の自由蛇行に関する理論的研究, 土木学会論文報告集, 第 255 号, pp. 63~73, 1976.
- 7) 長谷川和義 : 直線および蛇行流路内の発達した砂州上の流れ, 土木学会年次学術講演会概要集 II-262, pp. 521~522, 1981.
- 8) Langbein, W.B. and L.B. Leopold : River meanders-Theory of minimum variance, U.S.G.S. Prof. Paper 422-H, p. 15, 1966.
- 9) 森口繁一・宇田川銈久・一松 信 : 数学公式 I, p. 24, 岩波全書, 1977.
- 10) 池内幸司 : 連続わん曲部における流れとその遷移過程の解析, 東京大学修士論文, p. 156, 1982.
- 11) Rozovskii, I.L. : Flow of Water in Bends of Open Channels, Israel program for scientific translations, p. 233, 1961.
- 12) Yen, B.C. : Characteristics of subcritical flow in a meandering channel, Institute of Hydraulic Research, University of Iowa, p. 77, 1965.
- 13) 玉井信行・池内幸司・山崎 晶 : 連続わん曲水路における流れの実験的研究, 土木学会論文報告集, 第 331 号, pp. 83~94, 1983.
- 14) Leopold, L.B. and M.G. Wolman : River meanders, Bulletin of the Geological Soc. America, Vol. 71, pp. 769~793, 1960.
- 15) Schumm, S.A. : The shape of alluvial channels in relation to sediment type, U.S.G.S. Prof. Paper 352-B, p. 30, 1960.
- 16) Hooke, R.L. : Shear-stress and sediment distribution in a meander bend, UNGI-report 30, University of Uppsala, p. 58, 1974.
- 17) Odgaard, A.J. : Transverse bed slope in alluvial channel bends, Proc. ASCE, J. Hyd. Div., Vol. 107, HY 12, pp. 1677~1694, 1981.
- 18) 建設省技術研究会 : 全国河川粗度係数資料集, 日本河川協会, p. 535, 1974.

(1982.3.31・受付)