土木学会論文報告集
第 334 号・1983 年 6 月
【論　　文】

動的応答解析に及ぼす減衰マトリックスの影響に関する研究

EFFECTS OF DAMPING MATRICES ON DYNAMIC RESPONSE ANALYSIS

山田善一*・河野健二**
By Yoshikazu YAMADA and Kenji KAWANO

1. 緒　　言

減衰マトリックスの評価は構造物の地震応答解析において重要な問題の一つである．構造物の減衰としては構造材料の内部粘性による粘性減衰や基礎から地盤への損失エネルギーによる逸散減衰等が挙げられる　これらの減衰が速度比例形で表わされると，振動系の動的応答は既知の解析法を用いて求めることができる．しかし構造物の地震応答解析において減衰マトリックスの特性は十分明確になったとはいえず，多くの場合各次振動の減衰定数の推定や構造部分の減衰によって表わされる減衰マトリックスなどを用いて近似的にその評価が行われている．

比例形の減衰マトリックスは最も簡単で扱いの容易な形として利用される．減衰マトリックスが比例形となるための条件式は T.K. Caughey によって示された[1),2)]．R.W. Clough はこの無数に存在する比例形の減衰マトリックスの中で通常利用される減衰マトリックスの一般形を示した[3),4)]．そしてこの減衰マトリックスに対応する Caughey Series を表わし，比例形の減衰マトリックスの求め方を示した．しかしながら，この形は固有振動数に関して奇数のベキ乗項のみを含むためより高次の減衰マトリックスを表わしていることになる．そこで本研究では T.K. Caughey による比例形の条件を満足し，各次振動の減衰定数が一定となる場合を自明な形で含む減衰マトリックスを表わした．またこれに対応する Caughey Series が各次固有振動数のベキ乗項の和となることを示した．そしてこれらの減衰マトリックスの特性について検討を加えた．

ところで，地盤-基礎-構造物系のような振動系の減衰は粘性減衰や逸散減衰などの特性や大きさの異なる部分からなるため非比例形の減衰マトリックスとして表わされる場合が多い．特に動的相互作用を考慮したこのような振動系の動的応答解析では，非比例形の減衰マトリックスの扱いが必要になる[5)]．一般に非比例減衰系は複素固有値解析を用いて解くことができるが，この方法は系の自由度を倍にして扱うため直接適用するには問題がある．一方，非減衰時の固有値解析を用いた地震応答解析は簡明で，しかも動的特性をよく表現できるため，非比例減衰系に対しても広く適用されている．また構造物の地震応答解析においては標準的なものを含めて応答スペクトルが利用されることが多い．このような応答スペクトルを用いて非比例減衰系の応答解析を行う場合，減衰マトリックスの対角化が必要になる．このため非減衰時の固有値解析から得られるモーダルマトリックスによる非比例減衰マトリックスの対角化に関する研究が行われている[6)~10)]．最も簡単な方法は，モーダルマトリックスにより変換された減衰マトリックスの非対角項を無視して対角項のみで表わす方法であり，比較的良好な結果を与えている．G.B. Warborton[10)] らはこの対角化法を適用するときの可能な条件について検討を行っている．

本研究では非比例減衰マトリックスの対角化法としてモーダルマトリックスにより変換された振動系に関して，連成系と対角化された系の共振時における応答が一致するように各次振動の減衰定数を求める方法を示し，非比例減衰系の応答特性を調べた．さらにモーダルマトリックスにより変換された振動系に複素固有値解析を適用し，ホワイトノイズ加振に対する rms 応答（自乗平均応答）を求め，非比例減衰マトリックスの対角化が応答に及ぼす影響について検討を加えた．

* 正会員　工博　京都大学教授　工学部土木工学科
** 正会員　工博　鹿児島大学助教授　工学部海洋土木開発工学科

2. 比例形の減衰マトリックス

(1) 減衰マトリックスの比例条件

構造物の地震応答解析を行う場合，質量マトリックスや剛性マトリックスは有限要素法等を用いて容易に表わされる．振動系の減衰マトリックスが各要素ごとに表わされる場合を考える[5),11)]．すなわち，任意の要素に関して質量マトリックス $[M]^e$ を用いると減衰マトリックスは

$$[C]^e=2\beta_e\omega_0[M]^e \quad \cdots\cdots(1)$$

と表わされる．また任意の要素の剛性マトリックス $[K]^e$ を用いると同様に

$$[C]^e=2\beta_e/\omega_0[K]^e \quad \cdots\cdots(2)$$

と表わされる．ここに β_e は各要素の減衰定数を表わしており，現在のところ厳密な値は明確でないが，一般に実験等に基づいて決定される．また ω_0 は固有振動数であり，非減衰振動の1次の値が用いられることが多い．式 (1) および式 (2) のように各要素ごとの減衰マトリックスが求められると，振動系の減衰マトリックスは各要素減衰マトリックスの重ね合せより求められる．一方減衰マトリックスの評価方法は他にも考えられているが，速度比例形として表わされることが多い．このようにして求められた減衰マトリックスを用いると，振動系の運動方程式は

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{F\} \quad \cdots\cdots(3)$$

ただし $[M]$：質量マトリックス
$[C]$：減衰マトリックス
$[K]$：剛性マトリックス
$\{x\}$：変位ベクトル
$\{F\}$：外力ベクトル

と表わされる．

T.K. Caughey によって示された比例形の条件を満足する減衰マトリックスは無数にあるが，R.W. Clough[3),4)] は利用しやすい形として

$$[C]=[M]\sum_{j=0}^{N-1}a_j([M]^{-1}[K])^j \quad \cdots\cdots(4)$$

を表わした．ただし a_j は係数であり，減衰定数と固有振動数を用いて表わされる．モーダルマトリックス $[\Phi]$ を用いて書き換えると

$$[C]=[M][\Phi]\sum_{j=0}^{N-1}a_j[\omega_s{}^2]^j[\Phi]^T[M] \quad \cdots\cdots(5)$$

と表わされる．ただし $[\omega_s{}^2]$ は固有振動数からなる対角マトリックスを表わしている．これらの式で表わされた減衰マトリックスの中で $j=0$ の場合は質量マトリックスに，$j=1$ の場合は剛性マトリックスに比例した形の減衰マトリックスにそれぞれ相当している．比例形の減衰マトリックスはモーダルマトリックスによって対角化され，s 次の振動の減衰定数を β_s，固有振動数を ω_s とすると，

$$[\Phi]^T[C][\Phi]=[2\beta_s\omega_s] \quad \cdots\cdots(6)$$

と表わされる．そこで式 (4) あるいは式 (5) で示された減衰マトリックスに式 (6) に示すような変換を適用すると，減衰定数 β_s と，係数 a_j の関係式は

$$\beta_s=(a_0/\omega_s+a_1\omega_s+a_2\omega_s{}^3+\cdots+a_{N-1}\omega_s{}^{2N-1})/2 \quad \cdots\cdots(7)$$

ただし $s=1, 2, \cdots, N$

となり，Caughey Series といわれている．

式 (7) を満足するような係数 $a_j(j=0, 1, \cdots, N-1)$ が求まれば，それを用いて式 (4) あるいは式 (5) で示された減衰マトリックスはすべて比例形となることがわかる．

ところで式 (4) あるいは式 (5) で表わされた減衰マトリックスは各次振動の減衰定数が一定となるような場合を自明な形で含んでいない．そこで T.K. Caughey の比例形の条件を満足する減衰マトリックスとして次のような形を考えることにする．すなわち，

$$[C]=[M]^{1/2}\sum_{j=0}^{N-1}a_j([M]^{-1/2}[K][M]^{-1/2})^{j/2}[M]^{1/2} \quad \cdots\cdots(8)$$

と表わされる．この減衰マトリックスに式 (6) で示すようなモーダルマトリックスによる変換を適用すると，減衰定数 β_s と係数 a_j の関係式は

$$\beta_s=(a_0/\omega_s+a_1+a_2\omega_s+\cdots+a_{N-1}\omega_s{}^{N-2})/2 \quad \cdots\cdots(9)$$

ただし $s=1, 2, \cdots, N$

と表わされる．式 (8) は広く利用されている減衰マトリックスを自明な形で表わしていることがわかる．すなわち，式 (8) は $j=0$ のとき質量マトリックスに，$j=2$ のとき剛性マトリックスにそれぞれ比例する形の減衰マトリックスを表わしている．また $j=1$ のとき式 (8) は各次振動の減衰定数が一定になる減衰マトリックスを示すことがわかる．さらに式 (8) における $[M]^{-1/2}[K][M]^{-1/2}$ の項は非減衰時の固有値解析を行うとき扱うマトリックスであり，その固有値と固有ベクトルを用いて表わされる．したがって，式 (8) の減衰マトリックスは比較的容易に精度よく計算することができる．このように s 次振動の減衰定数が与えられれば式 (7) あるい

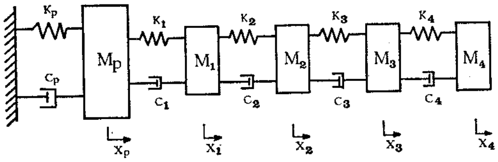

Fig. 1 Vibration Model.

は式 (9) を解き係数 a_j を求めて任意の比例形の減衰マトリックスを得ることができる.

(2) 比例形の減衰マトリックスの評価

比例形の減衰マトリックスの中で利用しやすい形として式 (4) あるいは式 (5), および式 (8) があるので, **Fig. 1** に示すように簡単な振動モデルを用いてそれぞれの減衰マトリックスに対して検討を加えることにする. 簡単のため **Fig. 1** において質点 M_P と M_4 を固定した3自由度系の振動モデルを考える. まず初めに, 振動数 ω_s の s 次振動モードに関しての減衰定数 β_s を任意に仮定して式 (7) の関係式より係数 a_j を求める. この係数 a_j が決まると式 (4) あるいは式 (5) から減衰マトリックスを求めることができる. この減衰マトリックスは比例形となるため非減衰時のモーダルマトリックスを用いて変換を行うと式 (6) で示したように対角化され s 次振動の減衰定数 ζ_s が求められる. **Table 1** はこのようにして求めた減衰定数 ζ_s と初めに仮定した減衰定数 β_s の関係を示したものである.

各次振動の減衰定数 β_s が一定となる場合について, 式 (4) あるいは式 (5) の減衰マトリックスを用いて式 (6) の変換を行うと次のような結果が得られる. すなわち式 (4) の減衰マトリックスを用いる場合, 式 (7) の関係式から得られた係数 a_j に対応する減衰マトリックスを求め, 式 (6) の変換を行っても β_s に一致する減衰定数 ζ_s は得られない. さらにそれぞれの和として求められる減衰マトリックスは式 (4) を用いた場合 β_s に

Table 1 Proportional Damping Matrices.

CASE	ω_s	β_s	ζ_s			
			$j=0$	$j=1$	$j=2$	Σ
$\beta_s=\beta_1\frac{\omega}{\omega_1}$	14.52	0.02	0.	0.02	0.	0.02
$[C_1]$	31.04	0.042	0.	0.042	0.	0.042
$[C_2]$	46.09	0.063	0.	0.063	0.	0.063
$\beta_s=\beta_1$	14.52	0.02	0.012	0.008	−0.001	0.02
	31.04	0.02	0.006	0.017	−0.002	0.021
$[C_1]$	46.09	0.02	0.004	0.025	−0.005	0.024
$\beta_s=\beta_1$	14.52	0.02	0.012	0.008	−0.001	0.02
	31.04	0.02	0.006	0.017	−0.003	0.02
$[C_2]$	46.09	0.02	0.004	0.025	−0.009	0.02
β_s;	0.765	0.02	−0.009	0.018	0.011	0.02
any	1.414	0.10	−0.005	0.034	0.071	0.10
$[C_2]$	1.850	0.20	−0.004	0.044	0.159	0.20
$\beta_s=\beta_1$	0.765	0.02	0.	0.02	0.	0.02
	1.414	0.02	0.	0.02	0.	0.02
$[C_3]$	1.850	0.02	0.	0.02	0.	0.02

$$[C_1]=[M]\sum_{j=0}^{N-1}a_j([M]^{-1}[K])^j$$

$$[C_2]=[M][\Phi]\sum_{j=0}^{N-1}a_j[\omega_k{}^2]^j[\Phi]^T[M]$$

$$[C_3]=[M]^{1/2}\sum_{j=0}^{-1N}a_j([M]^{-1/2}[K][M]^{-1/2})^{j/2}[M]^{1/2}$$

一致しないが, 式 (5) に関しては β_s に一致した減衰定数が得られることがわかる. これは式 (5) の減衰マトリックスが式 (4) に比べモーダルマトリックスを用いて表わされているため計算に伴う誤差が少ないことを示している. さらに式 (5) の減衰マトリックスの中には各次振動の減衰定数が一定となる形が含まれていることがわかる.

次に各次振動の減衰定数 β_s を任意に与えた場合, これを表わす減衰マトリックスについて考える. 任意の減衰定数 β_s に対して式 (7) を用いると, 係数 a_j が求められる. この値を式 (4) あるいは式 (5) に適用すると比例形の減衰マトリックスが得られる. これに式 (6) の変換を行うと減衰定数 ζ_s が得られる. 任意の減衰定数 β_s は, 一般に係数 a_j に対応する減衰マトリックスのみを用いて単独に表わすことはできないが, それらの和を求めることによって任意の減衰定数 β_s に対応する減衰マトリックスを得ることができる. 同様に式 (8) を用いて任意の減衰定数をもつ減衰マトリックスが表わされる.

ところで任意の減衰定数 β_s を表わす比例形の減衰マトリックスを求めるためには式 (7) あるいは式 (9) の連立方程式を解かねばならない. この場合, 振動系の自由度が増加すると式 (7) は式 (9) に比べ連立方程式の係数の次数の相違が増し解の不安定性が大きくなるものと考えられる. **Fig. 2** は自由度が 16 までの振動系において各次振動の減衰定数が一定となるような減衰マトリックスを表わすため式 (9) を用いた場合の係数 a_j の収束の状態を示したものである. 系の自由度が9までは係数 a_j は安定した値を示しているが, これを越えると不安定となり係数 a_j が正しく求まらない. このことは式 (7) あるいは式 (9) を解き係数 a_j を決定し任意の比例形の減衰マトリックスを求める場合, 困難が伴うことを示している. しかも式 (7) は式 (9) に比べ係数マトリックスの相違が大きいため, さらに任意の比例形の

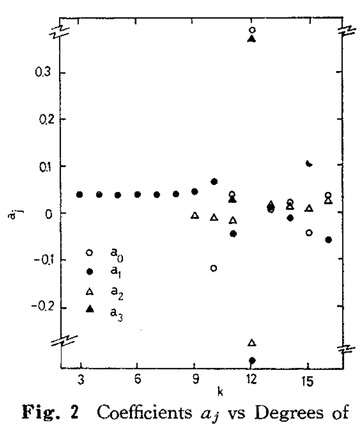

Fig. 2 Coefficients a_j vs Degrees of Freedom k.

減衰マトリックスを得ることが難しくなる．このため式(8)および式(9)を用いて減衰マトリックスを求めた方が各次振動の減衰定数が一定となる場合を含めて任意の比例形の減衰マトリックスを表わしやすいといえる．

3．非比例形の減衰マトリックス

(1) 非比例減衰マトリックスの対角化

s 次振動の減衰定数 β_s が与えられれば減衰マトリックスは比例形となるが，基礎から地盤へのエネルギー損失による逸散減衰と構造物の粘性減衰を同時に与える動的相互作用系等の減衰マトリックスは比例形では表わされない[8),10),13),15)]．卓越振動モードの減衰定数が何らかの方法で決定できれば，非線形の動的応答解析を行う場合を除き減衰マトリックスを求める必要はないが，本研究では各部分での減衰の相違が式(1)あるいは式(2)の形で表わされる減衰マトリックスを有する振動系について考える．このような構造物系の動的応答解析において，応答はおもに低次の振動モードに支配されるため，非比例減衰系においても式(6)に示すような減衰マトリックスの変換が行われる．非減衰時のモーダルマトリックス $[\Phi]$ の中で応答を支配する振動モード n 個のみを選び出し $[\tilde{\Phi}]$ とする．一般に振動系の自由度 N に比べれば n は十分小さいものと考えられる．これを用いると非比例形の減衰マトリックスを有する振動系の運動方程式は変換されて

$$\{\ddot{q}\}+[\tilde{C}]\{\dot{q}\}+\lceil\omega_j^2\rfloor\{q\}=\{f\}\ddot{z}_g(t) \quad \cdots\cdots(10)$$

ただし，$[\tilde{\Phi}]^T[M][\tilde{\Phi}]=\lceil 1\rfloor$，$[\tilde{\Phi}]^T[C][\tilde{\Phi}]=[\tilde{C}]$

$[\tilde{\Phi}]^T[K][\tilde{\Phi}]=\lceil\omega_j^2\rfloor$，$[\tilde{\Phi}]^T\{F\}=\{f\}$

$\{x\}=[\tilde{\Phi}]\{q\}$

と表わされる．減衰マトリックス $[C]$ が非比例形の場合，式(10)に示すように厳密にはモーダルマトリックスを用いて $[\tilde{C}]$ は対角化できない．そこで $[\tilde{C}]$ を近似的に対角化して扱うことを考える．$[\tilde{C}]$ の対角化に関しては前述したように多くの方法が試みられてきた．これらの近似法の中で最も簡単な方法は非減衰時のモーダルマトリックスを用いて減衰マトリックスを変換し，その非対角項を無視して対角項のみを近似的に用いる方法である．すなわち非比例形の減衰マトリックスは

$$[\tilde{\Phi}]^T[C][\tilde{\Phi}]\fallingdotseq\lceil 2\beta_j\omega_j\rfloor \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

と表わされる．このような方法で応答は十分に近似される場合もあるが，その適用範囲については明らかにしておく必要がある．

ところで非比例減衰マトリックスの対角化法として式(10)で表わされた振動系の共振時の応答を考える．式(10)を各次振動ごとに分解して表わすと振動数 ω の正弦波入力に関して

$$(\omega_j^2-\omega^2)\tilde{q}_j+i\omega\sum_{s=1}^{n}\tilde{C}_{js}\tilde{q}_s=\tilde{f}_j \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

ただし $j=1, 2, \cdots, n$，$i=\sqrt{-1}$

となる．ここに $\tilde{q}_j$，$\tilde{q}_s$，$\tilde{f}_j$ はそれぞれ振幅を表わす．いま減衰マトリックスの対角化を行い，その対角項が $\tilde{C}_j{}^*(j=1, 2, \cdots, n)$ と求められたとする．この $\tilde{C}_j{}^*$ を用いて表わされる j 次振動の共振時の応答が式(12)の応答と近似的に一致する場合を考える．これより j 次振動の減衰係数は近似的に

$$\tilde{C}_j{}^*=\tilde{C}_{jj}+\sum_{s=1(s\neq j)}^{n}\tilde{C}_{sj}\cdot\frac{\tilde{f}_s\cdot\omega_j^2\tilde{C}_{jj}\tilde{C}_{ss}}{\tilde{f}_j\{(\omega_s^2-\omega_j^2)^2+(\omega_j\tilde{C}_{jj})^2\}} \cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

と表わされる．

式(12)に示すように非比例形の減衰マトリックスをモーダルマトリックス $[\tilde{\Phi}]$ を用いて対角化するとき，特に問題となるのは各次の固有振動数が接近する場合である．いま j 次と $j+1$ 次の固有振動数が接近する場合を考えると，$\omega=\omega_j$ のとき連成系の運動方程式を解いて $\tilde{q}_j$，$\tilde{q}_{j+1}$ が求められる．これらの応答が対角化された振動系の応答に等しいとすると，

$$\left.\begin{aligned}C_j{}^*&=\tilde{f}_j/(\omega_j\tilde{q}_j)\\C_{j+1}{}^*&=\omega_j\sqrt{\{\tilde{f}_{j+1}/(\omega_j^2\tilde{q}_{j+1})\}^2-\{(\omega_{j+1}/\omega_j)^2-1\}^2}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

となり各次振動の減衰定数が求められる．

次に式(10)で表わされた振動系の定常ホワイトノイズ加振に対する rms 応答の評価を行い非比例減衰マトリックスの対角化について検討を加える[15),17)]．モーダルマトリックス $[\tilde{\Phi}]$ を用いて変換された運動方程式(10)は一階の微分方程式に書き換えられて

$$\{\dot{u}\}+[D]\{u\}=\{P\}\ddot{z}_g(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

ただし

$$[D]=\begin{bmatrix}[\tilde{C}] & \lceil\omega_j^2\rfloor\\ -\lceil 1\rfloor & [0]\end{bmatrix},\ \{P\}=\begin{Bmatrix}\{f\}\\ \{0\}\end{Bmatrix},\ \{u\}=\begin{Bmatrix}\{\dot{q}\}\\ \{q\}\end{Bmatrix}$$

と表わされる．複素固有値解析を適用すると式(15)は変換されて

$$\{\dot{r}\}+\lceil\lambda\rfloor\{r\}=[\psi]^{-1}\{P\}\ddot{z}_g(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

ただし $[\psi]^{-1}[D][\psi]=\lceil\lambda\rfloor$，$\{u\}=[\psi]\{r\}$

と表わされる．ここに λ は複素固有値であり，$[\psi]$ は複素固有ベクトルを表わす．いま加振力 $\ddot{z}_g(t)$ が強度 s_0 のホワイトノイズで表わされる場合を考える．式(16)の両辺に右方から $\{r\}^T$ を乗じ期待値を求める．また式(16)の両辺の各項を転置した後，左方から $\{r\}$ を乗じ期待値を求めそれぞれを加えると

$$\frac{d}{dt}[R_{rr}]+\lceil\lambda\rfloor[R_{rr}]+[R_{rr}]\lceil\lambda\rfloor=[Q]\cdots(17)$$

ただし $[R_{rr}]=E[\{r\}\{r\}^T]$，

$[Q]=2\pi s_0[\psi]^{-1}\{P\}\{P\}^T([\psi]^{-1})^T$

と表わされる．定常振動について考えると，式 (17) の第1項は省略され，変換された振動系の共分散応答マトリックス $[R_{rr}]$ は容易に求められる．これより $\{u\}$ に関する共分散応答マトリックスは複素固有ベクトル$[\psi]$を，また $\{x\}$ に関する共分散応答マトリックスはモーダルマトリックス $[\tilde{\Phi}]$ を用いて

$$\left.\begin{aligned}[R_{uu}]&=[\psi][R_{rr}][\psi]^T\\ [R_{xx}]&=[\tilde{\Phi}][R_{qq}][\tilde{\Phi}]^T\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(18)$$

とそれぞれ表わされる．ところで式 (18) から変換された系の共分散応答マトリックス $[R_{uu}]$ より $[R_{qq}]$ が求まると，逆に各次振動の固有振動数と減衰定数を求めることができる．すなわち加振力 $\ddot{z}_g(t)$ が定常ホワイトノイズの場合，式 (10) で表わされた振動系の rms 応答から j 次の固有振動数と減衰係数は

$$\left.\begin{aligned}\tilde{C}_j^*&=\pi s_0 f_j^2/R_{\dot{q}_j\dot{q}_j}\\ \omega_j^2&=R_{\dot{q}_j\dot{q}_j}/R_{q_jq_j}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(19)$$

と表わされる．

(2) 固有振動数および減衰定数の近似化

非比例減衰系の振動モデルの一例として **Fig. 1** を考える．この振動モデルでは質量 $M_j(j=1, \cdots, 4)$，ばね定数 $K_j(j=1, \cdots, 4)$ は一定とし，質量 M_P，ばね定数 K_P の大きさが変化する場合を考えそれぞれの大きさの比 $m=M_P/M_j$, $k=K_P/K_j$ をパラメーターとした．また C_1 から C_4 では減衰定数が 2% の減衰を，C_P では減衰定数 β_P が 10% から 30% の間の減衰をそれぞれ考えている．式 (1) および式 (2) で示すように個々の減衰はそれぞれの質量あるいは剛性マトリックスに比例した形で表わすと，振動系の減衰マトリックスが求められる．本解析では式 (2) から形成される減衰マトリックスを用いることにする．

Fig. 3 は減衰定数 β_P が 20% の非比例減衰系に関して m の大きさが変化する場合の固有振動数の変化を $k=5$ と $k=40$ の場合について示したものである．実線は非減衰時の固有値解析から得られた固有振動数を表わす．また破線は式 (19) で示されるように非比例減衰系の rms 応答から得られた固有振動数をそれぞれ表わしている．非減衰時の固有値解析から求めた1次と2次の固有振動数は式 (16) に示された複素固有値解析から求めた結果と振動数が接近するときでも比較的よく一致している．またこのような振動系の応答はおもに1次と2次の振動に支配されるため固有振動数の値は非減衰時の固有値解析を用いて近似的に表わされるものと考えられる．

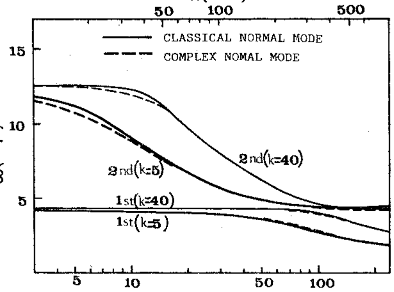

Fig. 3 Natural Frequencies vs Mass Ratio m.

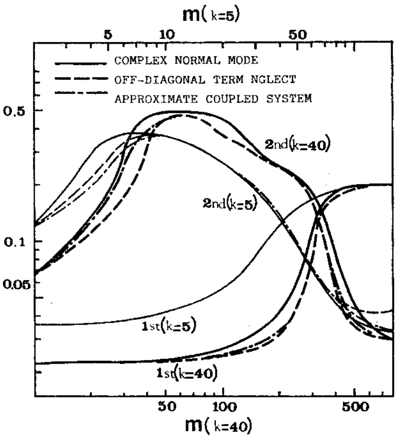

Fig. 4 Damping Ratios vs Mass Ratio m.

Fig. 4 は減衰定数 β_P が 20% の非比例減衰系に関して m の大きさが変化する場合の1次と2次の減衰定数の変化を示したものである．実線は式 (19) で示したように rms 応答から求めた減衰定数を表わしている．また破線は式 (11) で示したようにモーダルマトリックス $[\tilde{\Phi}]$ を用いて近似的に減衰マトリックスの対角化を行ったものであり，一点鎖線は式 (12) および式 (13) で示したように共振時の応答の一致あるいは連成系を近似的に解いて求めた減衰定数を表わしている．$k=5$ のとき，1次と2次の固有振動数の接近に相当する m が 40 の近傍で1次と2次の減衰定数の転換がみられる．近似的に求めたおのおのの減衰定数は応答を支配する1次と2次の固有振動数の接近する場合も含めて rms 応答から求めた結果と類似した傾向がみられる．しかし一般に，rms 応答から得られた減衰定数に比べてモーダルマトリックスを利用して近似的に求めた減衰定数は若干小さな値を示している．

(3) 非比例減衰系の動的応答特性

非比例減衰マトリックスを有する振動系の固有値解析からもわかるように各次の固有振動数が接近するとき，減衰マトリックスの対角化に伴う応答の近似化が問題となる．そこで，応答に卓越した影響を及ぼす1次と2次

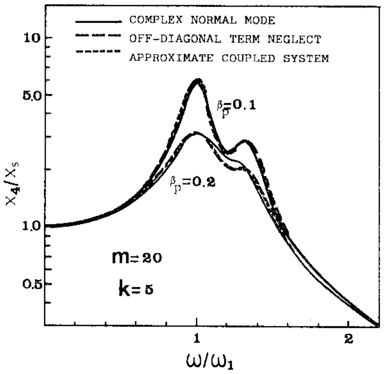

Fig. 5 Frequency Response Function.

の固有振動数の接近に注目して正弦波入力による応答解析を行うことにする．

Fig. 5 は $k=5$ のとき，1次と2次の固有振動数の比 ω_2/ω_1 が接近する場合の応答を減衰定数 β_P が 10% と 20% について示したものである．また同様に **Fig. 6** は $m=40$, $k=300$ のときの応答であり，図において横軸は1次振動に対する加振振動数の比を，縦軸は M_4 の静的変形 X_s に対する動的応答の比を示している．これらの図で実線は式 (10) を連成系の方程式として直接に解き求めた応答である．破線は式 (11) の対角化から得られた減衰定数を用いたときの応答であり，点線は式 (14) の近似的な連成系から得られた減衰定数による応答を示したものである．減衰定数 β_P が 10% の場合，減衰マトリックスを対角化して求めた応答は連成系とみなして求めた応答に比べてわずかながら大きな値を示している．また減衰マトリックスのそれぞれの対角化法に基づいて求めた応答の間には相違はほとんどみられない．一方 β_P が 20% の場合，減衰マトリックスを対角化して求めた応答と連成系とみなして求めた応答の間には相違がみられる．減衰マトリックスの対角化による応答は一般に連成系とみなして求めた応答に比べて大きい．またモーダルマトリックスを用いた最も簡単な減衰マトリックスの対角化である式 (11) による応答に比べて式 (13) の近似化による応答はわずかながら小さく連成系の応答に近いことがわかる．したがって1次と2次の固有振動数が接近する場合，β_P が大きいとき近似的に減衰マトリックスを対角化して応答を求めると，連成系の応答に比べて大きい評価を与えることが予想される．

このように減衰マトリックスの対角化に伴う応答の評価は各次の固有振動数の接近の程度や減衰定数 β_P の大きさによって異なることがわかる．そこで式 (11) において示したようにモーダルマトリックスによって変換された減衰マトリックスの非対角項を無視することによって求めた応答の近似程度を G.B. Warburton によって

Table 2 Responses of Non-Proportional Damping Systems.

k	m	$\tilde{\beta}_1$	D_r	X_4/X_s (1)	(2)	(3)	
5	30	0.022	0.016	5.842	5.688	5.853	*
5	50	0.024	0.028	3.154	3.172	3.204	
5	80	0.077	0.089	2.607	2.600	2.605	
40	40	0.024	0.092	21.48	21.50	21.48	
40	100	0.151	0.030	20.01	20.49	20.00	
40	300	0.188	0.005	5.277	5.610	5.451	*

(1) Complex Normal Mode
(2) Off-Diagonal Term Neglect
(3) Approximate Coupled System

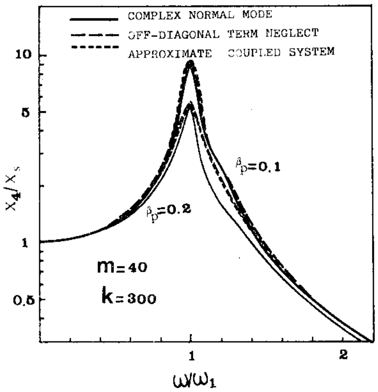

Fig. 6 Frequency Response Function.

示された式を用いて調べる[10]．それによると j 次の減衰定数 $\tilde{\beta}_j$ の大きさは固有振動数の比 ω_s/ω_j と $[\tilde{C}]$ の非対角項 $\tilde{C}_{js}$ によって

$$\tilde{\beta}_j < \varepsilon_0 \left| \left(\frac{\tilde{C}_{jj}}{\tilde{C}_{js}} \right) \left(\left(\frac{\omega_s}{\omega_j} \right)^2 - 1 \right) \right|_{\min} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

と表わされる．この条件を満たすとき，式 (11) に示すように減衰マトリックスの対角化による振動数 ω_j における応答は十分に減衰定数 $\tilde{\beta}_j$ を用いて近似できる．ただし ε_0 は任意の定数であり，本解析では 0.05 を用いている．これまで述べた減衰定数の修正方法と式 (20) の応答評価の関係について調べた結果を **Table 2** に示している．この表は β_P が 20% に関して1次の減衰定数 $\tilde{\beta}_1$ と式 (20) の右辺の値 D_r を比較しており，同時に正弦波入力による応答値も示している．この中で＊印は式 (20) の条件を満足しない場合である．このように式 (20) は減衰マトリックスの対角化に伴う応答の近似度の簡単な評価を与えるが，**Fig. 5** および **Fig. 6** に示したように固有振動数が接近する場合，共振振動数の近傍において応答の相違が示されるためさらに検討を加える必要がある．

(4) 非比例減衰系の動的応答解析

非比例減衰マトリックスを有する振動系の定常ホワイ

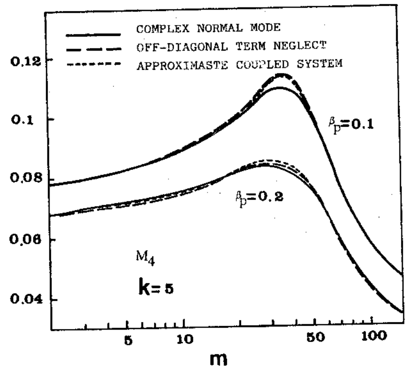

Fig. 7 rms Response vs Mass Ratio m.

トノイズ加振に対する応答解析は式 (15) を解くことによって行われる．いま加振力 $\ddot{z}_g(t)$ が強度 s_0 のホワイトノイズである場合を考えると，共分散応答マトリックスは式 (17) を解くことによって求められる．

Fig. 7 は k=5 のとき最も大きな応答を示す質点 M_4 の rms 応答を減衰定数 β_P が 10% と 20% について示したものである．この図において横軸は質量比 m を，縦軸は無次元化した rms 応答をそれぞれ表わしており，$R=\sqrt{2\omega_1^3/\pi s_0}$ である．実線は複素固有値解析を行い式 (17) から求めた rms 応答であり，破線および点線は減衰マトリックスの対角化から得られた減衰定数を用いて近似的に求めた rms 応答である．β_P が 10% のとき，**Fig. 3** に示したように1次と2次の固有振動数が接近する場合を除いて rms 応答は十分に近似されることがわかる．また1次と2次の固有振動数が接近するとき，対角化された減衰定数を用いた応答は約 5% の増加を示している．β_P が 20% になると，rms 応答は1次と2次の固有振動数の接近する場合だけでなく全体的に若干の相違がみられる．

Fig. 8 は k=20 のとき質点 M_4 の rms 応答を減衰定数 β_P が 10% と 20% について示したものである．複素固有値解析を適用して求めた rms 応答と減衰マトリックスの対角化から得られた減衰定数を用いて近似的に求めた rms 応答との間には，1次と2次の固有振動数が接近するとき相違がみられる．この場合，近似的に求めた応答の増加は β_P が 10% のとき約 15%，β_P が 20% のとき約 20% 程度である．また非比例減衰マトリックスの対角化の違いが rms 応答に及ぼす影響はわずかであり，ほとんど式 (11) で示した非減衰時のモーダルマトリックスによる対角化を用いて近似されることがわかる．さらに非比例減衰マトリックスの対角化による応答は，複素固有値解析を適用して求めた応答値に比べて大きな評価を与えることになり誤差を伴うことがわかる．

また **Fig. 9** は k=40 のときの応答を示したものであるが，同様の傾向を表わすことがわかる．このため減衰マトリックスの対角化から求めた減衰定数が式 (20) の条件式を満足したとしても1次と2次の固有振動数が接近する場合，連成系を表わす式 (17) の形を用いて応答評価に対する検討を加えておく必要のあることを示している．

Fig. 10 は減衰定数 β_P が 10% と 30% のとき質点 M_P の rms 応答を k が5と 40 の場合について示したものである．複素固有値解析を適用して求めた rms 応答と，減衰マトリックスの対角化から得られた減衰定数

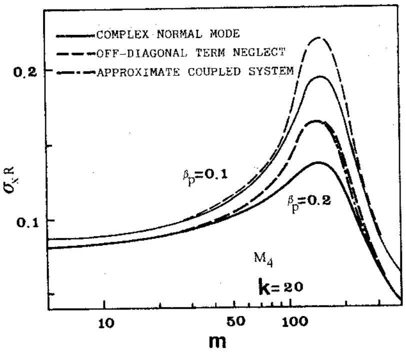

Fig. 8 rms Response vs Mass Ratio m.

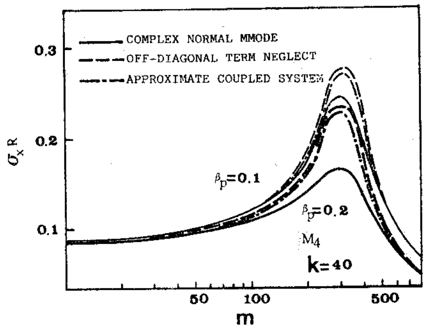

Fig. 9 rms Response vs Mass Ratio m.

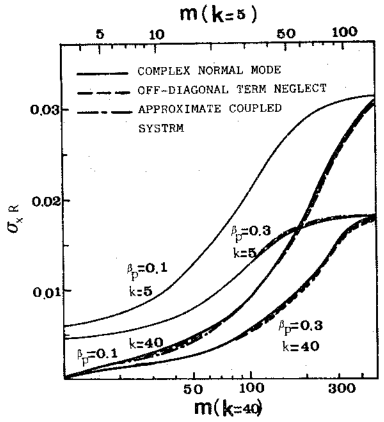

Fig. 10 rms Response vs Mass Ratio m.

を用いて求めた rms 応答の間にはわずかな相違がみられる．また減衰マトリックスの対角化による減衰定数から求めた rms 応答は厳密な応答に比べ若干小さく評価されることがわかる．

このように非比例減衰系の応答解析は，非減衰時の固有値解析から得られる減衰定数や振動モードを用いた解析を適用する場合，近似的な応答を与えていることがわかる．R.W. Clough らは非比例減衰系の応答解析は連成系の方程式として解くことをすすめている[16]．このような振動系に関しては，式（10）で示すように非減衰時の固有値解析に基づいて応答に及ぼす影響の大きな振動モードのみによる振動系の自由度の低減を行った後，連成系として解くことが有用であると考えられる．しかしながら式（10）のように変換された振動系の運動方程式を連成系として解くとき，入力地震動が設定されている場合を除いて，一般には標準的な応答スペクトルの適用が問題になる．このような連成系の応答解析に応答スペクトルを適用する方法として複素固有値解析の利用が研究されている[18]．この方法を用いる場合でも複素固有値解析の適用は非減衰時の固有値解析を行い式（10）に示すように自由度を低減した形にして行うことが有用であると考えられる．これは大きな自由度を有する非比例減衰系に直接複素固有値解析を適用すると計算上の困難が予想されるとともに，動的応答は低次の振動にほとんど支配されているためである．このように非比例減衰マトリックスを対角化して扱うことは多くの構造物の動的応答解析において重要なことであり，その適用範囲について把握しておくことは有用であると考えられる．

4．結　　言

動的応答解析で扱われる減衰マトリックスは一般に比例形と非比例形に分けられる．本研究ではこのような減衰マトリックスの特性を明らかにし，動的応答解析における扱い方について検討を加えたものである．その結果を要約すると次のようになる．

（1） 質量や剛性マトリックスに比例した形の減衰マトリックスだけでなく各次振動の減衰定数が一定になるような減衰マトリックスも自明な形で含む比例形の減衰マトリックスを示した．またこの減衰マトリックスに対応する Caughey Series が固有振動数のそれぞれのベキ乗項の和となる形を示し，これより任意の比例形の減衰マトリックスが表わされることを示した．

（2） 非減衰時の固有値解析により非比例減衰マトリックスを有する振動系の固有振動数は，低次の固有振動数が接近する場合も含めて比較的よく近似される．しかし非比例減衰マトリックスの対角化から得られた各次の減衰定数は，特に固有振動数が接近するとき若干誤差を伴う．

（3） 非比例減衰マトリックスを有する振動系の応答は卓越した振動モードの固有振動数が接近する場合を除き対角化法により十分近似される．一方これらの固有振動数が接近する場合，振動モード間の連成の影響が増加し減衰マトリックスの対角化による応答は，モード間の連成を考慮した応答に比べて，振動系の中で減衰の小さな部分の応答を大きく評価するのに対し，減衰の大きな部分の応答としては若干小さな評価を与える．

（4） 非減衰時の固有値解析から得られたモーダルマトリックスにより応答に卓越した影響を及ぼす振動モードを用いて自由度の低減化を行うことは，非比例減衰マトリックスを有する振動系の動的応答解析において非常に有用である．特にこれらの振動モード間で固有振動数が接近する場合，この変換された振動系に対する複素固有値解析の適用は比較的容易である．このため非比例減衰マトリックスの対角化による応答解析だけでなく連成系としての応答評価を行い，その近似程度については検討を加えておく必要があると考える．

参　考　文　献

1) Caughey, T.K.: Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems, J. Applied Mechanics, ASME, Vol. 27, pp. 269～271, 1960.
2) Caughey, T.K. and M.E.J. O'Kelly: Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems, J. Applied Mechanics, ASME, Vol. 32, pp. 583～588, 1965.
3) Clough, R.W.: Analysis of Structural Vibrations and Dynamic Response, Recent Advances on Matrix Methods in Structural Analysis and Design, Proc. of U.S.-Japan Seminar, The University of Alabama Press, Huntsville, Alabama, 1971.
4) Clough, R.W. and K.J. Bathe: Finite Element Analysis of Dynamic Response, Second U.S.-Japan Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design, Berkeley, California, University of Alabama Press, Huntsville, Alabama, 1972.
5) Yamada, Y.: Dynamic Analysis of Structures, Second U.S.-Japan Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design, Berkeley, California, University of Alabama Press, Huntsville, Alabama, 1972.
6) Jennings, P.C. and J. Bielack: Dynamics of Building-Soil Interaction, Bulletin Seismological Society of America, Vol. 63, pp. 9～48, 1973.
7) Roësset, J.M., R.V. Whitman and R. Dobry: Modal Analysis for Structures with Foundation Interaction, J. Structural Division, ASCE, Vol. 99, pp. 399～415, 1973.
8) Tsai, N.C.: Modal Damping for Soil-Structure Interaction, J. Engineering Mechanical Division, ASCE, Vol. 100, pp. 323～341, 1974.
9) Yamada, Y. and K. Kawano: Dynamic Response Analysis of Systems with Non-Proportional Damping, Proc. of the Fourth Japan Earthquake Engineering Symposium, Tokyo, pp. 823～830, 1975.

10) Warburton, G.B. and S.R. Soni : Errors in Response Calculations for Non-Classically Damped Structures, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 5, pp. 365～376, 1977.
11) Idriss, I.M., H.B. Seed and N. Serff : Seismic Response by Variable Damping Finite Elements, J. of Geotechnical Engineering Division, ASCE, No. GT 1, pp. 1～13, 1974.
12) Gutierrez, J.A. and A.K. Chopra : A Substructure Method for Earthquake Analysis of Structures Including Structure-Soil Interaction, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 6, pp. 51～69, 1978.
13) 山田善一・後藤洋三：長大つり橋主塔橋脚の振動特性と地震応答解析に関する諸考察，土木学会論文報告集，No. 207, pp. 1～12, 1972.
14) 山田善一・竹宮宏和：不規則外力による多自由度系の応答解析とその長大つり橋タワー・ピア系の耐震解析への応用，土木学会論文報告集，No. 163, pp. 17～27, 1969.
15) Yamada, Y., H. Takemiya and K. Kawano : Random Response Analysis of a Non-Linear Soil-Suspension Bridge, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 7, pp. 31～47, 1979.
16) Clough, R.W. and S. Mojtahedi : Earthquake Response Analysis Considering Non-Proportional Damping, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 4, pp. 489～496, 1976.
17) Yamada, Y. and H. Takemiya : Random Response Analyses of Multi-Degree-of- Freedom Systems with Non-Proportional Damping and its Application to the Tower-and-Pier System of Long-Span Suspension Bridge, Proc. of the Japan Earthquake Engineering Symposium, Tokyo, pp. 373～380, 1973.
18) Villaverde, R. : Earthquake Response of Systems with Nonproportional Damping by the Conventional Response Spectrum Method, Proc. of the Seventh World Conference on Earthquake Engineering, Istanbul, Turkey, Vol. 5, pp. 467～474, 1980.

（1982.5.17・受付）