

境界要素法による薄肉構造解析に関する研究

APPLICATION OF BOUNDARY ELEMENT METHOD TO THE ANALYSIS
OF THIN-WALLED STRUCTURES

小松定夫*・長井正嗣**・坂本保彦***

By Sadao KOMATSU, Masatsugu NAGAI
and Yasuhiko SAKAMOTO

1. まえがき

近年、境界値問題における一近似解析手法として境界要素法 (Boundary Element Method; BEM) が注目を浴び始めた。この手法は図-1 に示すとおり対象とする領域内部に節点を設ける必要がなく、領域境界のみに節点あるいは要素を設けて解析する手法である。この手法の特長として^{1)~3)}、すでに述べられている点は、

① 境界のみに節点を設けて解析することから、方程式の次元を一つ下げて取り扱うことができる。併せて、入力に要するデータ量の減少が期待できる。

② 領域を支配する偏微分方程式の特解を重み関数として利用するため、他の解法に比して精度の向上が期待できる。

③ 未知力学量が領域内で連続的に求まる。

④ 構造力学、流体力学あるいは土質力学でしばしば遭遇する無限領域あるいは半無限領域の問題の解析に適している。

などが挙げられる。

本法の工学問題への応用としてはポテンシャル問題における Jaswon・Ponter⁴⁾、Symm⁵⁾ の研究に始まり、弾性問題においては Rizzo⁶⁾ が初めて線形代数方程式の定式化を示し、その後 Oliverira⁷⁾、Riccardella⁸⁾、Cruse^{9)~11)}、Besuner¹²⁾、Lachat・Watson¹³⁾、Watson¹⁴⁾、Alarcon・Brebbia・Dominguez¹⁵⁾、Brebbia・Nakaguma¹⁶⁾、Chaudonneret¹⁷⁾、丹羽・小林・福井¹⁸⁾、小林・西村¹⁹⁾ の研究がみられる。弾性問題においては Cruse¹⁰⁾ 以来解法の効率化を旨とした研究が主体で Lachat・Watson¹³⁾ は境界の要素にアイソパラメトリック要素²⁰⁾を導入する

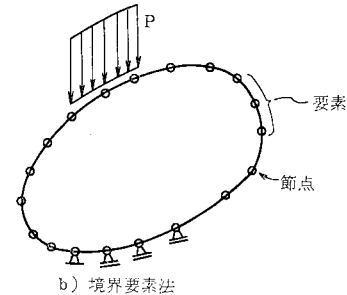
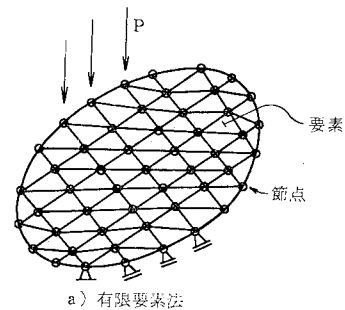


図-1 境界要素法と有限要素法の要素分割

など離散化解析手法において有限要素法で開発された手法を拡張する試みが活発になり、1970 年後半になってようやく有限領域を有する実用問題の解析が実施され始めた。特に Brebbia^{11)~13)} は従来の Green の定理あるいは Betti の相反定理に基づく定式化に対し、重み付き残差法に基づき逆問題 (inverse problem) に変換して、重み関数として基本解を採用する定式化を示すことにより本法の数値計算手法における位置づけを明確にした。以上のように、Cruse, Lachat・Watson, 丹羽・小林, Brebbia の精力的な研究により、ようやく実用化段階に到達した手法といえる。また、板曲げおよびシェルの問題、材料定数の異なる物体より成る問題、接触問題、動弾性問題、固有値問題、弾塑性問題、有限要素法との結

* 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 工博 川崎重工業(株)鉄構機器事業部橋梁設計部第一設計課部員(昭和 54, 55 年度大阪大学受託研究員)

*** 正会員 日本国有鉄道(前・大阪大学大学院前期課程)

合問題等，本法は各種の問題に積極的に応用されつつある。

さて，本手法により工学的な実用問題を解析するうえではあらかじめ解決しておかねばならない種々の障壁が現われる。特に，従来のように境界の特定点のみで解を求める手法（選点法）あるいは境界の区間内で形状および未知力学量を一定とした離散化手法では一般に生じなかった問題が存在するためにこれらをあらかじめ解決しておく必要がある。すなわち，1次以上の補間関数で形状および未知力学量を近似して解法の効率化，精度の改良を計るうえで現われる問題として，① 隅角点（境界接線あるいは接面に不連続性が現われる節点）における特異積分の評価の問題，② 表面力の不連続性の処理の問題が挙げられる。また，数値積分により計算する場合，境界のごく近傍で解が乱れる問題が存在する。本法は比較的近年に実用化段階に入った解法であって，解法そのものもまだまだ洗練されなければならないと考える。また，実用上十分な精度の解析が可能であるか，あるいは要素分割手法と精度の関連はどうか，更に進んで本手法の特長が有限領域の問題において十分発揮し得るものであるかについて知見を得るのは興味あることと考える。

以上より，本論文は境界要素法を薄肉構造解析に適用し，工学的実用性について考察を加え種々の検討を実施するものである。まず，簡単に基礎理論を紹介する。次に，実用化に関する幾つかの問題の処理方法を示し，更に数値計算例からその妥当性を明らかにする。また本法の特長について種々の観点から考察を加える。一方，薄肉構造物の解析に関しては，実用的観点から板厚の異なる弾性体より成る構造物の解析が重要となることから，薄肉立体構造解析へ本法を拡張し，その適用性を検討する。もとより，この種の離散化解析手法に関しては今日有限要素法が最も一般的であることから有限要素法との比較を通して本法の特長について考察を加える。

2. 基礎理論

(1) 基礎方程式

2次元弾性問題における境界要素法の基礎方程式は以下のように与えられる。

$$S_{mi}u_i + \int_s p_{mi}^* u_i ds = \int_s u_{mi}^* p_i ds + \int_v u_{mi}^* B_i dv \quad (m=1, 2) \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここで， u_i ， p_i および B_i はそれぞれ i 方向の変位，応力

度および容積力， $\int_s ds$ および $\int_v dv$ は境界 および 領域に関する積分を意味する。また， S_{mi} は滑らかな境界上で，

$$S_{mi} = \delta_{mi}/2 \quad \left(\begin{matrix} m=i \text{ で } \delta_{mi}=1 \\ m \neq i \text{ で } \delta_{mi}=0 \end{matrix} \right) \quad \dots\dots\dots(2)$$

と算定される。 u_{mi}^* および p_{mi}^* はそれぞれ基本解およびその導関数として与えられ，等方弾性体の平面応力問題に対して，

$$u_{mi}^* = \frac{1+\nu}{8\pi G} \left\{ \frac{3+2\nu}{1+\nu} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{mi} + \frac{\partial r}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} \right\} \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$p_{mi}^* = -\frac{1+\nu}{4\pi\nu} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} \right) \delta_{mi} + 2 \frac{\partial r}{\partial x_m} \frac{\partial r}{\partial x_i} - \frac{1-\nu}{1+\nu} \left(\frac{\partial r}{\partial x_m} n_i - \frac{\partial r}{\partial x_i} n_m \right) \right\} \quad \dots\dots\dots(4)$$

と算定される。ここで， G はせん断弾性係数， ν はポアソン比， r はソース点から観測点までの距離， n は境界法線方向の単位ベクトルである。

更に，領域内部の変位および応力度成分は以下のように与えられる。

$$u_m = \int_s u_{mi}^* p_i ds - \int_s p_{mi}^* u_i ds + \int_v u_{mi}^* B_i dv \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + G \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (k=1, 2) \quad \dots\dots\dots(6)$$

(2) 離散化手法

いま， $x-y$ 座標系を考え，容積力を無視して議論を進める。

式(1)は以下のようにマトリックスおよびベクトル記号を用いて表示される。

$$[S]\{u\} + \int_s [p^*]\{u\} ds = \int_s [u^*]\{p\} ds \quad \dots\dots\dots(7)$$

ここに， $[S]$ は特異積分に関するマトリックスである。いま，境界 S を M 個の要素に分割し，任意の要素 j についてベクトル $\{u\}$ および $\{p\}$ が内挿関数より成るマトリックス $[\phi]$ および $[\psi]$ を用いて次のように近似できると仮定する。

$$\{u\} = [\phi]\{u_j\}, \{p\} = [\psi]\{p_j\} \quad \dots\dots\dots(8)_{a,b}$$

ここで， $\{u_j\}$ および $\{p_j\}$ は要素 j を構成する節点での変位および応力より成るベクトルである。

式(8)を式(7)に代入すると，境界上の特定の節点 i について次式が得られる。

$$[S]\{u_i\} + \sum_j \int_{s_j} [p^*][\phi] ds_j \{u_j\} = \sum_j \int_{s_j} [u^*][\psi] ds_j \{p_j\} \quad \dots\dots\dots(9)$$

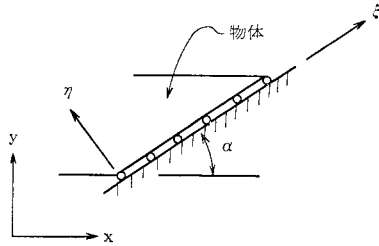


図-2 斜め支持状態

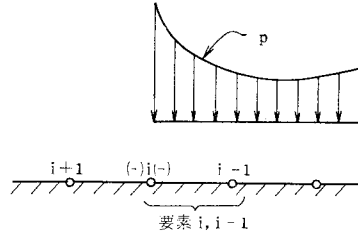


図-3 不連続表面力の取扱

ここで、 $\{u_i\}$ は節点 i での変位ベクトル、 \sum_j^M は境界 M 個の要素についての総和、 s_j は要素 j での表面である。

式 (9) を境界上の総節点 (N 個) について計算すると以下の弾性方程式が得られる。

$$[H]\{u\} = [G]\{p\} \dots\dots\dots(10)$$

さて、 x - y 座標系に対して 図-2 に示すような角度 α 方向に斜め支持される場合の取扱いは以下のような座標変換操作により処理される。

$$[H][T]\{u_{\xi-\eta}\} = [G][T]\{p_{\xi-\eta}\} \dots\dots\dots(11)$$

ここで、 $\{u_{\xi-\eta}\}$ および $\{p_{\xi-\eta}\}$ は ξ - η 座標系での変位および応力ベクトル、また、座標変換マトリックス $[T]$ は、

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \dots\dots\dots(12)$$

と定義される。

(3) 数値計算上の諸問題の処理方法

1. でも述べたとおり、本手法を用いて具体的な計算を実施する場合には解決しておかねばならない問題が幾つかみられる。ここではそのような点について考察を加える。

a) 隅角点の特異積分評価

式 (2) は境界形状が滑らかな場合に成立するもので、角を有する場合にはもはや適用できない。従来、この点に関する処理方法としては、

- ① 隅角点を丸めて形状を変更する。
 - ② 実境界からわずかに離れた仮想境界を設けて特異積分を避ける。
 - ③ 剛体運動の概念を利用して式 (2) の特異積分を間接的に評価する。
 - ④ 隅角点を中心に微小半径 ϵ の円の積分経路に沿って積分する。
- が挙げられる。

今日、③の手法が一般的であることから、この手法を用いることとする。

式 (7) において、

$$[S]\{u\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{s_\epsilon} [p^*]\{u\} ds \dots\dots\dots(13)$$

とする。ここで、 s_ϵ は境界上に設けた半径 ϵ の半円である¹⁶⁾。式 (7) において $\{p\} = \{0\}$ を考えると、

$$[S]\{u\} + \int_{s-s_\epsilon} [p^*]\{u\} ds = 0 \dots\dots\dots(14)$$

となる。ここで $\{u\}$ に剛体移動 ($\{u_k\}$: 一定) を与えると、

$$\left([S] + \int_{s-s_\epsilon} [p^*] ds \right) \cdot \{u_k\} = \{0\} \dots\dots\dots(15)$$

より、

$$[S] = - \int_{s-s_\epsilon} [p^*] ds \dots\dots\dots(16)$$

を得る。式 (16) が特異積分の間接評価式である。

b) 表面力の不連続問題

図-3 に示す表面力の不連続問題の処理は以下のように取り扱う。

式 (10) において、不連続点 (節点) に関して、マトリックス $[G]$ を次のように書き改めて処理する。

$$[H]\{u\} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \vdots & p_{i(-)} & p_{i(+)} & \vdots \\ \vdots & [g_{(-)}] & [g_{(+)}] & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ p_{i-1} \\ p_{i(-)} \\ p_{i(+)} \\ p_{i+1} \\ \vdots \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(17)$$

ここで、 $\{p_i\}$ は節点 i での応力ベクトル、 $[g_{(-)}]$ は要素 $i, i-1$ より得られる弾性係数より成るマトリックス、 $[g_{(+)}]$ は要素 $i, i+1$ より得られる弾性係数より成るマトリックスである。

また、隅角点で4つの物理量が合成される場合は、文献17) に示すように、この節点を2重点とし、節点より得られる2個の弾性方程式に応力テンソルの対称条件およびひずみテンソルの一次不変量が座標変換に伴って変化しないという2個の付帯条件より処理できる。

c) 境界近傍の変位および応力度の解の改良法

一般に、数値積分 (たとえば、ガウスの積分公式) により領域内部の力学量を求める場合、境界の近傍において解の精度が劣化することが知られている。そこで、この点の改良方法について考察を加える。

領域内の変位ベクトル $\{u_{(i)}\}$ は式 (7) に戻って、

$$[S]\{u_{(i)}\} = \int_s [u^*]\{p\} ds - \int_s [p^*]\{u\} ds \dots\dots\dots (7)'$$

と定義される。ここに、 $[S]$ は理論的に

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (18)$$

と与えられる。

ここで、剛体移動の概念を導入する。 $\{p\} = \{0\}$ および $\{u_{(i)}\} = \{u\} = \{u_k\}$: 一定とすれば、

$$[S] = - \int_s [p^*] ds \dots\dots\dots (19)$$

が成立する。ところが、後程の計算でも示すように、式(19)は式(18)を満足しないことがわかった。いずれにしても式(19)は物理的には成立するはずであるから、内部力学量の評価には式(19)のマトリックス $[S]$ を使用することとした。したがって、内部変位ベクトル $\{u_{(i)}\}$ は

$$\{u_{(i)}\} = [S]^{-1} \left[\int_s [u^*]\{p\} ds - \int_s [p^*]\{u\} ds \right] \dots\dots\dots (20)$$

と与えられることになる。次に、内部応力度は $\{u_{(i)}\}$ を微分して、

$$[S]\{u_{(i),k}\} - \int_s [p_{,k}^*] ds \{u_{(i)}\} = \int_s [u_{,k}^*]\{p\} ds - \int_s [p_{,k}^*]\{u\} ds \dots\dots\dots (21)$$

$$\{u_{(i),k}\} = [S]^{-1} \left[\int_s [p_{,k}^*] ds \{u_{(i)}\} - \int_s [p_{,k}^*]\{u\} ds + \int_s [u_{,k}^*]\{p\} \right] \dots\dots\dots (22)$$

を得る。ここに、 $(,)_k$ は k に関する微分で $k=x, y$ である。式(22)よりひずみ成分が求まれば内部応力度は容易に求まることになる。

(4) 数値計算例

本手法の妥当性を検討する意味で、また 2. (3) で議論した諸問題が精度よく処理されているかを確認するためにあわせて本手法の特長を検討するために数値計算を実施した結果の報告を行う。

a) 本手法の妥当性の確認

① 一様圧縮正方形板モデルの解析

図-4 に示す正方形板を一様圧縮する。境界形状は線形近似、力学量は 2 次関数近似した境界要素 (8 節点 4 要素) を用いて解析する。また、弾性マトリックスの係数の計算および内部力学量に必要な積分はすべて解析的に実施した。

表-1 に結果の一部を示すが、すべて厳密解に一致することが確認された。本例題より、隅角点の特異積分評

価ならびに外力として作用する表面力および反力の不連続性が適切に処理されていることが確認された。ちなみに、表面応力等の不連続性が適切に処理されない場合、領域内部のすべての点で厳密解と一致せず、特に角点の近傍では厳密解との差異は 25% 程度になっていた。

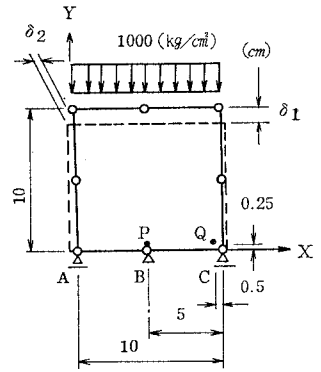


図-4 一様圧縮正方形板

② 一様圧縮円板モデルの解析

図-5 に示す円板を一様圧縮する。境界形状および力学量を 2 次関数で近似し、それぞれ 4, 8, 12, 16, 20, 24 および 28 節点 (全円周分割) モデルの解析を実施した。積分は Gauss の 4 点積分²¹⁾ を用いた。また、比較のために形状および力学量を線形近似し、積分を解析的に実施した 28 節点モデルの解析も実施した。

表-2 に円板周辺の半径方向変位を示す。図中、(Q) は 2 次関数近似モデル、(L) は 1 次関数近似モデルによる結果である。(Q) モデルで 4 節点の場合に解は乱れるが、8 節点で十分な精度の解が得られている。また、

表-1 境界要素法による結果と解析解の比較

a) 変位		10 ⁻³ (cm)	
	解析解	BEM	
δ ₁	4.7483	4.7483	
δ ₂	0.7123	0.7123	
b) 反応力		(kg/cm ²)	
A	R _y *	1000.	1000.
B	R _x *	0.	0.
	R _y *	1000.	1000.
C	R _y *	1000.	1000.
c) 内点		(kg/cm ²)	
P	σ _x	0.	0.
	σ _y	-1000.	-1000.
	τ _{xy}	0.	0.
Q	σ _x	0.	0.
	σ _y	-1000.	-1000.
	τ _{xy}	0.	0.
		10 ⁻⁴ (cm)	
P	δ _x	0.	0.
	δ _y	-1.187	-1.187
Q	δ _x	6.410	6.410
	δ _y	-1.187	-1.187

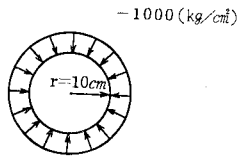


図-5 法線方向に一様圧縮された円板

表-2 円板端の法線方向変位 (cm)

解析解 = 3.3238×10^{-3}		
節点数	$\times 10^{-3}$ 誤差 (%)	
4 (Q)	3.3680	(1.32)
8 (Q)	3.3219	(0.06)
12 (Q)	3.3223	(0.05)
16 (Q)	3.3231	(0.02)
20 (Q)	3.3235	(0.00)
24 (Q)	3.3237	(0.00)
28 (Q)	3.3237	(0.00)
28 (L)	3.3248	(0.03)

(Q) : 2次要素, (L) : 1次要素

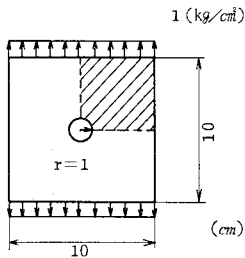


図-6 半径 1 cm の円孔を有する一様引張り板モデル

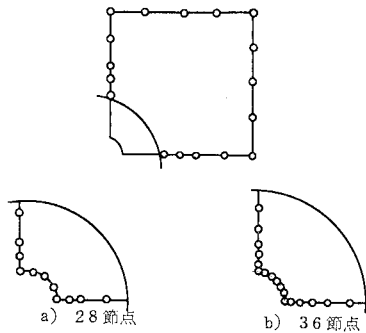


図-7 境界要素分割

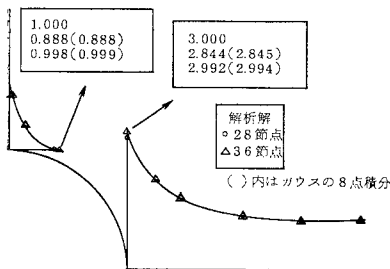


図-8 応力度 σ_θ の分布 (ガウスの 4 点積分)

(L) モデル 28 節点は (Q) モデルの 16 節点とほぼ同一精度を有していた。本例題より、円曲線を放物線で近似する場合、2 次要素の端節点位置では接線が不連続になるが、この不連続性に伴う特異積分評価が精度よく実施されていることがわかった。併せて、形状に応じて適切な近似関数を採用することによって計算の効率化が達成できることが確認された。

③ 応力集中問題

③-1 円孔を有する平板

図-6 に示す半径 1 cm の円孔を有する正方形板に引張り応力度を作用させる。境界形状および力学量は 2 次関数で近似する。要素分割は 1/4 モデルを対象に 図-7 に示す 28 および 36 節点の 2 ケースを考える。

図-8 に境界表面応力度 σ_θ の分布を示す。36 節点モデルではほぼ解析解と一致していた。この場合も、特異積分の評価および表面応力の不連続性の処理が十分な精度で実施されていることが確認された。あわせて、特異関数を重み関数として採用した本手法により応力集中の問題が十分な精度で取り扱えることが確認された。

③-2 隅を丸めた長方形孔をもつ帯板の面内曲げ

図-9 に示す長方形孔を有する平板の両端に曲げ応力度を作用させる。そして、隅角部の曲率半径 R を変化させて図中 A 点の応力集中係数を計算する。構造の対称条件より図中の斜線部を対象にして、境界形状および力学量を 2 次関数で近似して解析する。節点数は各曲率半径に応じて 50~66 節点とした。参考のために、図-10 に $R/b=0.1$ における節点配置状況あわせて支点条件を示す。

図-11 に応力集中係数 σ_A/σ_0 を示す。図中の実線は

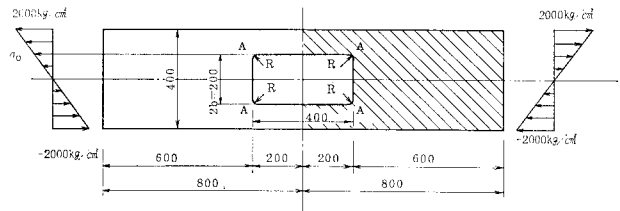


図-9 隅を丸めた長方形孔をもつ帯板の面内湾曲

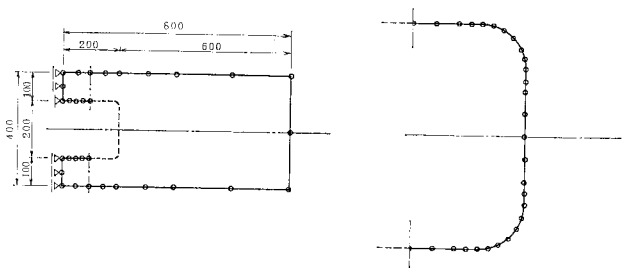


図-10 境界要素分割 ($R/b=0.1$)

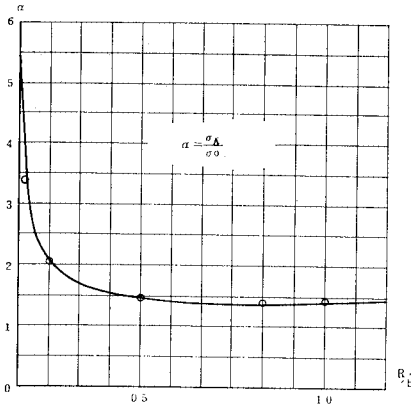


図-11 応力集中係数 (σ_A/σ_0)

文献 22) で与えられる光弾性試験による実験式を意味する。この場合も、本法により応力集中の解析が十分な精度で実施し得ることが確認された。

b) 境界近傍における力学量の改良

図-4 に示す正方形板を 16 節点 8 要素に分割して再度解析する。積分はすべて Gauss の数値積分を用いた。

図-12 に x =板幅 (B^*)/2 での変位の結果を示す。図中、縦軸は内部変位、横軸は内部位置を板幅で無次元化したものである。また、○および△印は式 (7)', ●および▲印は式 (20) による結果を意味する。式 (7)' を用いる場合、内部変位の評価に Gauss の 4 点積分を用いると、 y/B^* が 0.9~1.0、また Gauss の 8 点積分を用いると、0.97~1.0 にかけて解が乱れている状況がわかる。一方、式 (20) を用いる場合、Gauss の 4 点積分では y/B^* が 0.98~1.0 で若干解が乱れるものの、

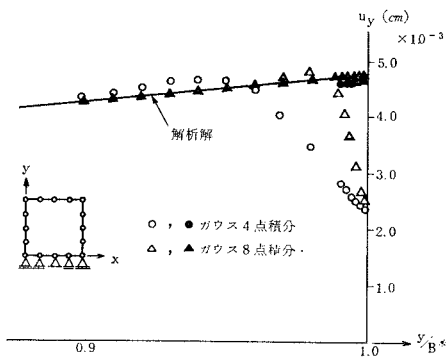


図-12 変位精度の改善 (正方形板モデル)

表-3 y 方向垂直応力度が 3% 以内の誤差で求まる範囲

ガウスの積分点数	y/B^* (Eq. 6)	(Eq. 22)
4	0.91	(0.930)
6	0.93	(0.960)
8	0.96	(0.980)
12	0.97	(0.990)
16	0.98	(0.992)

Gauss の 8 点積分では十分な精度の解が得られることがわかった。

表-3 に内部応力度が誤差 3% 以内の領域を示す。Gauss の積分点数として、4, 6, 8, 12 および 16 点を考え、要素数は 16 とした。この表より、応力度は変位に比して若干精度が劣るようであるが、従来手法に対してはかなり改善されている様子が確認できた。

図-5 に示す円板についても同様の検討を実施したが正方形板の場合とほぼ同様の結果を得た。

さて、領域内部での未知力学量の精度は境界の要素分割数および Gauss の積分点数に密接に関連していると考えられる。そこで、これらの因子と精度の関係について本文には記述しなかった種々の数値計算より検討を実施した。その結果を要約すると以下のとおりである。

- ① 内部変位は物理的考察に基づく式 (20) によりほぼ正解が得られる。それに反して、応力度は変位ほどには改善されていない。
- ② Gauss の積分点を 8 点として議論を進めると、応力度は境界から要素長の約 1/4 程度を除く領域で正解が得られた。また、Gauss の積分点数を増加させるとその点数にほぼ比例して精度が改善された。
- ③ 演算時間の面からは、節点数よりも Gauss 積分点数を増加させる方が有利であった。

なお、例題 (a) ①のように積分を解析的に実施すると、 $y/B^*=x/B^*=0.999$ でも完全に厳密解に一致した。これにより、本法においては積分を解析的に実施することが精度の面できわめて有利であることがわかった。

c) 要素分割手法に関する考察

境界要素法を構造工学的諸問題に應用するにあたって、境界要素の分割と精度および演算時間の関連を明確にすることは重要な問題と考える。本章で取り扱う問題は演算時間がたかだか 2 秒程度 (ACOS-900) であるため、この点についての議論は 3. に譲るとして、おもに要素分割と精度の関係について特定のモデルの数値計算結果を通して考察を加える。

図-13 に示す斜め支持板モデルについて検討を実施する。図-14 (b), (c) に境界要素分割モデルを示すが、形状は 1 次関数、力学量は 2 次関数で近似した 10 節点および 50 節点モデルを考える。図-14 (a) は有限要素

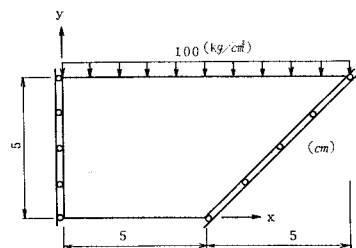


図-13 斜め支持板モデル

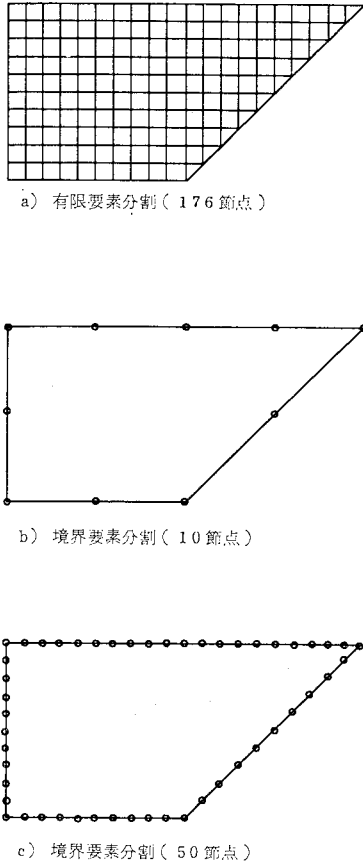


図-14 要素分割

法モデルで、176 節点で矩形および3角形の要素を用いている。

計算結果の一部を 図-15 に示す。図中、実線は有限要素法解、○印は境界要素 10 節点モデルの解、△印は境界要素 50 節点モデルの解である。これより、直支持された近傍では3つのモデルとも同程度の精度を有していることがわかった。一方、応力集中の生じる近傍では3つのモデルともそれぞれ異なる結果を示しており、特に境界要素 10 節点モデルの解の精度が悪いようである。これらの結果より、境界要素法においては境界応力の乱れない領域ではかなり粗い分割で十分な精度の解が得られ、一方、応力の乱れる領域ではある程度細分割する必要のあることがわかった。

そこで、境界要素長を種々変化させて、領域内部の応力度と要素長の関連を検討した。その結果、 図-16 に示す 22 節点モデルと 50 節点モデルがほぼ同一精度を有することが確認された。また、このとき境界要素 22 節点モデルによれば、鈍角側コーナー部に着目した場合有限要素法における3角形要素の重心位置での応力度より本法の結果が若干大きい値を示していた。

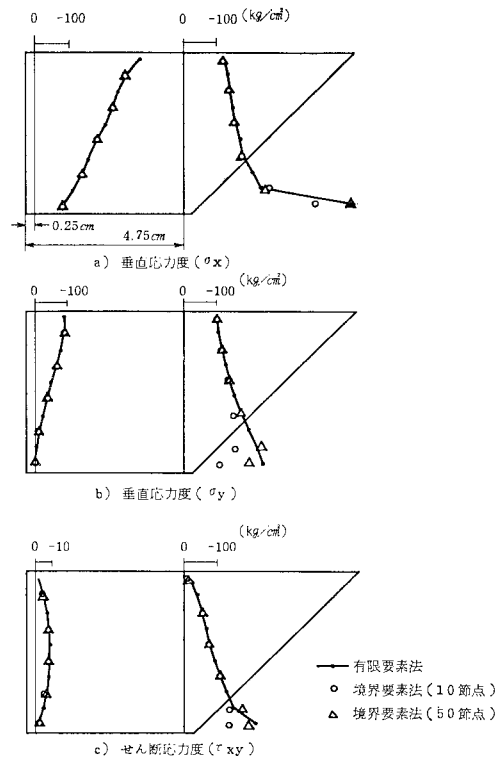


図-15 領域内部応力度に対する境界要素法による結果と有限要素法による結果の比較

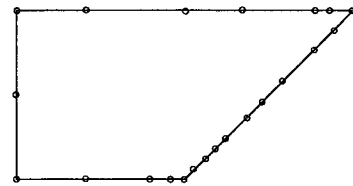


図-16 22 節点境界要素分割モデル

3. 薄板立体構造解析への拡張

(1) 基礎理論

図-17 に示す立体構造を考える。また、板面内変位および応力分布に及ぼす板の面外変形の影響は小さいので無視して議論を進める。図-18 に境界力学量を示す。全体座標系を $x-y-z$ 座標系とし、各平板について $\xi-\eta-\zeta$ 座標系を定義する。節点 i において、 $x-y-z$ 座標系について変位が 9 個、各平板での $\xi-\eta-\zeta$ 座標系に対して表面応力が 6 個の計 15 個の未知量が存在する。さて、変位の適合条件より、

$$u_i^{(1)} = u_i^{(2)} = u_i^{(3)} \quad (i=x, y, z) \dots\dots\dots (23)$$

が成立する。ここで肩付 (k) は領域 k を意味する。表面応力については、まず ξ 方向に対して

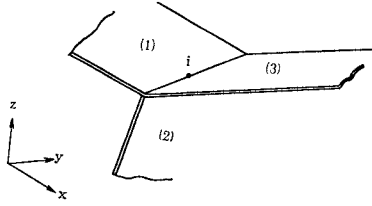


図-17 薄板が立体的に交差した構造

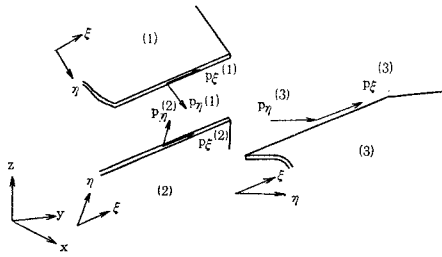
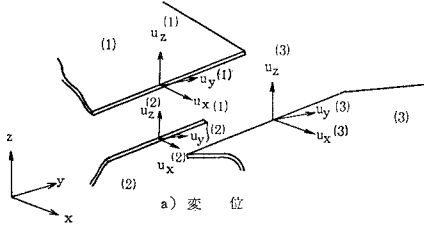


図-18 境界上の未知力学量

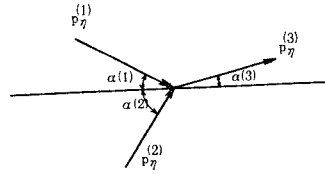


図-19 表面力のつり合い

$$\sum_i^3 t^{(i)} p_{\xi}^{(i)} = 0 \dots\dots\dots (24)$$

また、図-19 に示す \xi 軸と垂直な平面内で

$$\left. \begin{aligned} \sum_i^3 t^{(i)} p_{\eta}^{(i)} \cos \alpha^{(i)} &= 0 \\ \sum_i^3 t^{(i)} p_{\eta}^{(i)} \sin \alpha^{(i)} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)_{a,b}$$

が成立する。以上、変位の適合条件式 6 個および表面力のつり合い条件式 3 個を考慮すると、節点 i での基本未知量は 6 個となり、\xi-\eta 座標系にある各平板に対して得られる 2 個の弾性方程式計 6 個と対応させて解析することとした。

次に、図-18 に示す節点 i に対して具体的マトリックスを表示する。各平板が N^{(i)} (i=1~3) 個の節点を有しているとして、まず各平板に対して以下の座標変換を施す。節点 i での変位について、

$$\begin{Bmatrix} u_{\xi} \\ u_{\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{\xi,x} & n_{\xi,y} & n_{\xi,z} \\ n_{\eta,x} & n_{\eta,y} & n_{\eta,z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (26)$$

ここで、n_{i,j} は i 軸と j 軸のなす方向余弦である。さて、各平板に対して \xi-\eta 座標平面内で式 (10) が成立する。すなわち、

$$\left[\begin{array}{c} \overbrace{\{h_{\xi}\} \{h_{\eta}\}}^i \\ \dots \\ \{u\} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \overbrace{\{g_{\xi}\} \{g_{\eta}\}}^i \\ \dots \\ \{p\} \end{array} \right] \dots\dots\dots (27)$$

式 (27) に対して式 (26) の座標変換マトリックスを乗じると、

$$\left[\begin{array}{c} \overbrace{[n_{\xi,x} \{h_{\xi}\} + n_{\eta,x} \{h_{\eta}\} \quad n_{\xi,y} \{h_{\xi}\} + n_{\eta,y} \{h_{\eta}\} \quad n_{\xi,z} \{h_{\xi}\} + n_{\eta,z} \{h_{\eta}\}]^i} \\ \dots \\ \{u\} \end{array} \right] \{ \bar{u} \} = \left[\begin{array}{c} \overbrace{\{g_{\xi}\} \{g_{\eta}\}}^i \\ \dots \\ \{p\} \end{array} \right] \dots\dots\dots (28)$$

を得る。ここで、\{u\}^T = \{u_{\xi}^1, u_{\eta}^1, \dots, u_{\xi}^i, u_{\eta}^i, \dots, u_{\xi}^N, u_{\eta}^N\}, \{p\}^T = \{p_{\xi}^1, p_{\eta}^1, \dots, p_{\xi}^i, p_{\eta}^i, \dots, p_{\xi}^N, p_{\eta}^N\}, \{\bar{u}\}^T = \{u_{\xi}^1, u_{\eta}^1, \dots, u_x^i, u_y^i, u_z^i, \dots, u_{\xi}^N, u_{\eta}^N\} で、\{h\} および \{g\} は弾性係数より成るベクトルである。また、式 (28) の左辺は正方マトリックスでないが何ら一般性を失うものでない。

各平板に対して同様の操作を施し、全体系でのマトリックスを作成すると以下のような正方マトリックスを得る。

$$\begin{array}{c} \overbrace{\hspace{15em}}^i \\ \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{10em}}^{u_x} \quad \overbrace{\hspace{10em}}^{u_y} \quad \overbrace{\hspace{10em}}^{u_z} \quad \overbrace{\hspace{10em}}^{p_{\xi}^{(1)}} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ 2N^{(1)} \\ \downarrow \\ \dots \\ \uparrow \\ 2N^{(2)} \\ \downarrow \\ \dots \\ \uparrow \\ 2N^{(3)} \\ \downarrow \end{array} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} \dots & n_{\xi,x} \{h_{\xi}^{(1)}\} + n_{\eta,x} \{h_{\eta}^{(1)}\} & n_{\xi,y} \{h_{\xi}^{(1)}\} + n_{\eta,y} \{h_{\eta}^{(1)}\} & n_{\xi,z} \{h_{\xi}^{(1)}\} + n_{\eta,z} \{h_{\eta}^{(1)}\} & -\{g_{\xi}^{(1)}\} \\ \dots & n_{\xi,x} \{h_{\xi}^{(2)}\} + n_{\eta,x} \{h_{\eta}^{(2)}\} & n_{\xi,y} \{h_{\xi}^{(2)}\} + n_{\eta,y} \{h_{\eta}^{(2)}\} & n_{\xi,z} \{h_{\xi}^{(2)}\} + n_{\eta,z} \{h_{\eta}^{(2)}\} & \{0\} \\ \dots & n_{\xi,x} \{h_{\xi}^{(3)}\} + n_{\eta,x} \{h_{\eta}^{(3)}\} & n_{\xi,y} \{h_{\xi}^{(3)}\} + n_{\eta,y} \{h_{\eta}^{(3)}\} & n_{\xi,z} \{h_{\xi}^{(3)}\} + n_{\eta,z} \{h_{\eta}^{(3)}\} & \frac{t^{(1)}}{l^{(3)}} \{g_{\xi}^{(3)}\} \end{array} \right] \end{array}$$

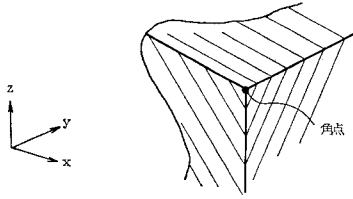


図-20 薄肉立体構造物の隅角点

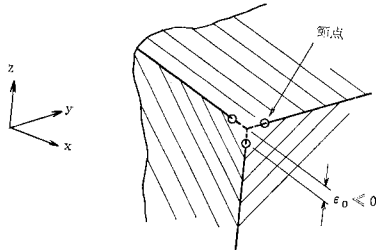


図-21 隅角点から微小量 ε₀ だけ離して配置した節点

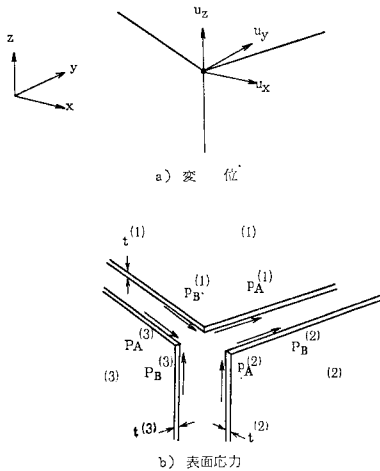


図-22 隅角点 *i* での未知力学量

ここで、 $\tilde{\alpha}_1$ および $\tilde{\alpha}_2$ は式 (25) より、 $p_q^{(2)}$ および $p_q^{(3)}$ を $p_q^{(1)}$ で表示する際に得られる座標値より成る係数である。

(2) 数値計算上の問題点

平板が立体的に接合し、図-20 に示す隅角点を形成する場合、図-21 に示す微小量 ϵ_0 だけ離して節点を配

$$\begin{bmatrix} p_\xi^{(2)} & p_\eta^{(1)} \\ \{0\} & -\{g_\eta^{(1)}\} \\ -\{g_\xi^{(2)}\} & \tilde{\alpha}_1 \{g_\eta^{(2)}\} \\ \frac{t^{(2)}}{t^{(3)}} \{g_\xi^{(3)}\} & \tilde{\alpha}_2 \{g_\eta^{(3)}\} \end{bmatrix} \cdot \{\tilde{\delta}\} = \{\tilde{f}\} \dots (29)$$

置する手法がとられている。本文では基本的には同一の考え方であるが、無用の自由度の増大を避けるために隅角点に1個の節点を配置することとし、その際の数値計算上の取扱いについて検討を実施する。

図-22 に隅角点での未知力学量を示す。さて、つり合い条件より以下の3式が得られる。

$$t^{(k)} p_A^{(k)} + t^{(l)} p_B^{(l)} = 0 \quad (k=1, 2, 3; l=2, 3, 1) \dots (30)$$

これより、隅角点 *i* での基本未知量は変位および表面応力度それぞれ3個の計6個となり、隅角点より各平板に対して得られる合計6個の弾性方程式と対応させることとする。しかしながら、この場合応力度 $p_A^{(i)}$ ($i=1\sim3$) および $p_B^{(i)}$ ($i=1\sim3$) のつり合い条件が厳密に満足されないという不都合が生じる。本文では隅角点付近の節点配置を細かくしてこの影響を除去することとした。

(3) 数値計算例

本法の妥当性および特長を検討する意味でダイアフラムの狭い領域に等分布荷重を載荷させた図-23 に示す片持ち箱ばりモデルの解析を実施する。また、有限要素法が今日近似解法として最も洗練を受けている解法であることおよびこの種の問題に対する解法として一般的であることから、有限要素法による解との比較を実施することとした。

具体的な解析では対称性を考慮して1/2モデルの解析を実施する。図-24 に境界要素分割モデルを示すが、境界形状を1次関数で、境界力学量を2次関数で近似し81節点43要素分割とした。節点配置は部分荷重載荷位置付近および角点付近を細かくした。図-25 に有限要素法の要素分割モデルを示すが、一定ひずみの3角形および4角形要素を用いて898節点837要素とした。

以下に結果の一部を示す。図-26 にダイアフラムの変位図を示すが、両者はよい一致を示すことが確認され

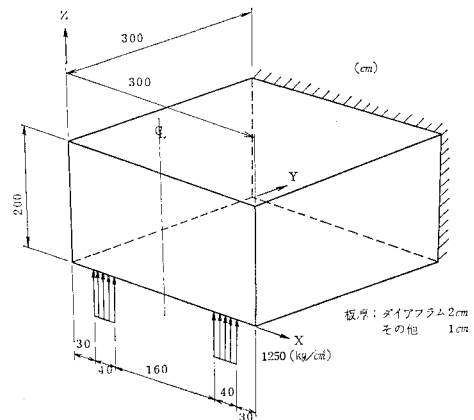


図-23 片持ち箱ばり

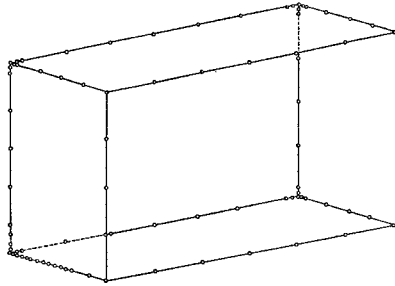
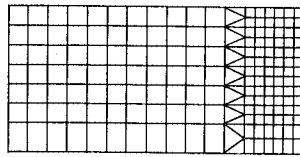
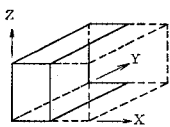
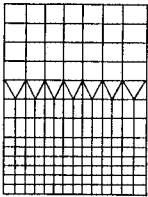


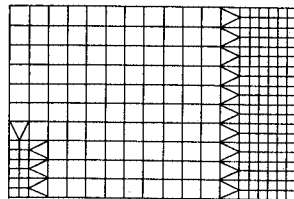
図-24 境界要素分割 (81 節点, 43 要素)



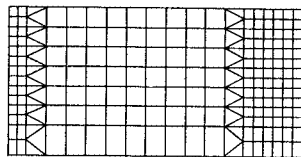
b) 上フランジ



a) ダイアフラム



c) 腹板



d) 下フランジ

図-25 有限要素分割 (898 節点, 837 要素)

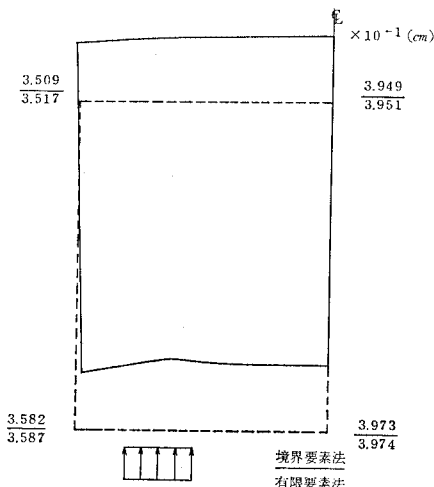


図-26 ダイアフラムの変位

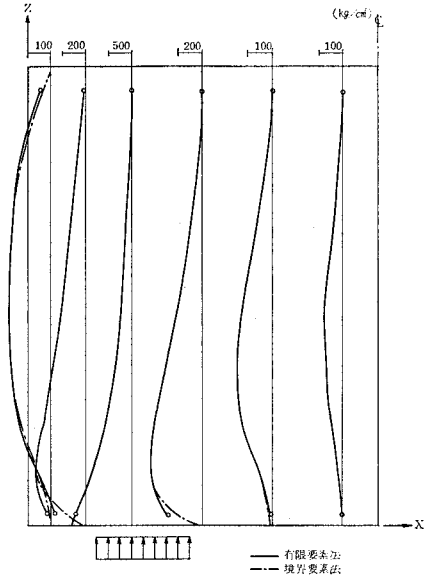


図-27 ダイアフラムの垂直応力度 (σ_z)

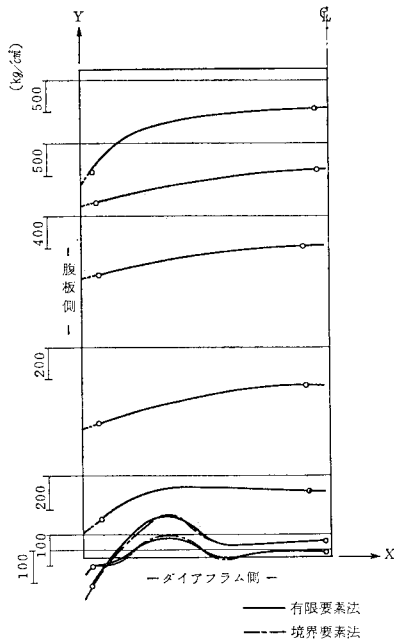
た。

図-27 にダイアフラムの垂直応力度 (σ_z) の分布を示す。図中、実線は有限要素法解、一点鎖線は境界要素法解である。また、図中の○印は有限要素法による解で領域の縁に一番近い要素の重心位置での値である。両者は境界付近を除いてよい一致を示していることが確認された。本手法によれば、境界近傍まで比較的スムーズな応力度分布が得られる。一方、有限要素法では境界近傍まで解を得るには要素分割をより細分化する必要がある。また、ダイアフラムの垂直応力度 (σ_x) およびせん断応力度 (τ_{xz}) についても同様のことがいえる。

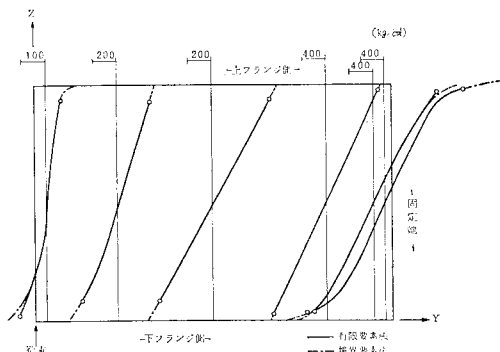
図-28, 29 に下フランジの垂直応力度 (σ_y) 分布および腹板の垂直応力度 (σ_y) 分布を示す。この場合も、ダイアフラムの応力度について議論したのと同様のことがいえる。

以上、境界要素法は応力勾配の激しい領域に適していることから本法を適用したが、その特性が十分発揮されていることが確認された。また、3. (2) で議論した問題については、節点配列を細かくすることによって実用上十分な精度の解を得ることも確認された。

最後に、本法と有限要素法との演算時間の比較を表-4 に示す。この表より、この程度の要素分割数であれば両者にほとんど差異のみられないことがわかる。もとより、両解法とも近似解法であることから演算時間も要素分割数次第で変動することが予想される。特に、本法は非対称のスパースマトリックスを解くわけであるから、節点数を減少させると演算時間も大幅に減少する。したがって、ここでの比較は両解法とも同程度の精度の解を得るという意味での比較である。その意味では、本法は



図—28 下フランジせん断応力度 (τ_{XY})



図—29 腹板垂直応力度 (σ_Y)

表—4 演算時間の比較

	有限要素法	境界要素法
要素数	837	43
節点数	898	81
演算時間	31.7 (秒)	30.1 (秒)

注) 計算機: IBM-3033

境界付近まで連続的な応力分布の解を得ており、これに見合う有限要素法の解を得るには要素の一層の細分化が要求され、したがってそれに伴う大幅な CPU タイムおよびインプットデータ作成時間の増加が生じることは明らかである。

4. 結 論

境界要素法の薄肉連続体構造解析への適用を通して得

られた結果を要約すると以下のとおりである。2次元連続体の解析において、

(1) 境界形状および未知力学量を高次関数で近似する際に生じる a) 隅角点の特異積分評価法, b) 表面応力の不連続性に対する具体的処理方法に基づき数値計算を行ったが、2~3 の数値計算例からその妥当性が確認された。

(2) また、このことより任意形状および境界条件を有する薄肉連続体の構造解析が実用上十分な精度で実施し得ることが確認された。

(3) 境界形状および未知力学量の近似関数に高次関数を導入することにより精度の向上あわせて計算の効率化が期待できることが明確になった。

(4) 応力集中の問題に対しても十分な精度の解を得られることが確認された。

(5) 境界要素分割手法に対して一知見を与えることができた。境界力学量の変化状態があらかじめ定性的に推測し得る場合には、その変化を表わす適切な節点配置で十分な精度が得られる。また、領域内で応力の乱れる部分と比較的スムーズな部分を同時に解析する際には、境界上の節点の配置に注意を施すことにより十分対処し得る。

(6) 本手法固有の問題である境界近傍での力学量の精度の劣悪化を改善する手法が、剛体運動の概念を導入した物理的考察に基づいて示された。そして、変位に対しては十分な精度の得られる手法であることを示した。応力度の精度は変位の精度ほど改善されなかったが、剛体移動の概念を導入しない場合に比較すると大幅に改善された。次に、薄肉立体構造物解析への拡張を通して、

(7) 本手法により板厚の異なる平板より成る薄肉立体構造物の解析が十分な精度で実施し得ることが確認された。また、隅角点に関する数値計算上の問題点も適切に処理できることが確認された。

(8) 有限要素法との比較より、部分的な外力が作用した付近の乱れに対して本法がスムーズな解を得ることが確認された。

以上、境界要素法を有限領域をもつ薄肉構造物の弾性問題に適用する試みを通して、数値計算上の諸問題の処理方法を示すとともにその妥当性を確認した。併せて、本法の特長について検討を加えた。また、ここで述べた概念は3次元弾性体にも容易に拡張されるものと考えられる。

境界要素法は、特殊な解法ということではなく、有限要素法、差分法と並ぶ一離散化解析法として位置づける必要がある。更にその特長を利用して各種の問題に応用することが重要である。現在、本法はまえがきでも述べたとおり各種の問題に応用されているが、本文で検討した

項目が各種の実用問題を取り扱う際に具体的な数値計算を実施するうえで一助になるものと考える。

参 考 文 献

- 1) Brebbia, C.A. : The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, 1978.
- 2) Brebbia, C.A. and S. Walker : Introduction to Boundary Element Method, Recent Advances in Boundary Element Method, Pentech Press, 1978.
- 3) Brebbia, C.A. and S. Walker : Boundary Element Techniques in Engineering, Butterworth & Co. LTD., 1980.
- 4) Jaswon, M.A. and A.R. Ponter : Integral Equation Methods in Potential Theory, Proc. of Royal Society, Series A, Vol. 273, 1963.
- 5) Symm, G.T. : Integral Equation Method in Potential Theory, Proc. of Royal Society, Series A, Vol. 275, 1963.
- 6) Rizzo, F.J. : An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics, Quart. Appl. Math., 25, 1967.
- 7) Oliveira, E.A.R. : Plane Stress Analysis by a General Integral Method, Proc. of ASCE, Vol. 94, No. EM 1, 1968.
- 8) Riccardella, P.C. : An Improved Implementation of the Boundary Integral Technique for Two Dimensional Elasticity Problems, Carnegie-Mellon Institute of Technology, Pittsburgh, 1972.
- 9) Cruse, T.A. : Numerical Solutions in Three Dimensional Elastostatics, Int. J. Solids and Structures, Vol. 5, 1969.
- 10) Cruse, T.A. : Improved Boundary-Integral Equation Method for Three Dimensional Elastic Analysis, Computers and Structures, Vol. 4, 1974.
- 11) Cruse, T.A. : Two-and Three-Dimensional Problems of Fracture Mechanics, Developments in Boundary Element Method-1, Appl. Science Publisher, LTD. 1979.
- 12) Besuner, P.M. : Application of Boundary-Integral Equation Method to Solution of Engineering Stress Analysis and Fracture Mechanics Problems, Nuclear Engineering and Design, Vol. 43, 1977.
- 13) Lachat, J.C. and J.O. Watson : Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations-A formulation for Three Dimensional Elastostatics, Int. J.N.M. in Engineering, Vol. 11, 1977.
- 14) Watson, J.O. : Advanced Implementation on the Boundary Element Method for Two-and Three-Dimensional Elastostatics, Development in Boundary Element Method-1, Appl. Science Publishers, LTD., 1979.
- 15) Alarcon, E., C.A. Brebbia and J. Domínguez : Boundary Element Method in Elasticity, Int. J. Mechanical Science, Vol. 20, 1978.
- 16) Brebbia, C.A. and R. Nakaguma : Boundary Elements in Stress Analysis, Proc. of ASCE, Vol. 105, No. EM 1, 1979.
- 17) Chaudonneret, M. : On the Discontinuity of the Stress Vector in Boundary Integral Equation Method for Elastic Analysis, Recent Advances in Boundary Element Method, Pentech Press, 1978.
- 18) 丹羽義次・小林昭一・福井卓雄 : 積分方程式法による空洞周辺の三次元応力解析, 土木学会論文報告集, 第 266 号, 1977 年 10 月.
- 19) 小林昭一・西村直志 : 積分方程式における表面クラック周辺の応力解析, 土木学会論文報告集, 第 288 号, 1979 年 8 月.
- 20) Zienkiewicz, O.C. : The Finite Element Method in Engineering Science, McGRAW-HILL, 1971.
- 21) Stroud, A.H. and D. Secrest : Gaussian Quadrature Formulas, Prentice-Hall, Inc., 1966.
- 22) 西田正孝 : 応力集中, 森北出版, 1967 年.

(1982.3.24・受付)