

カンドルの離散剛要素法を用いた岩質粒状体の 重力流動の解析

APPLICATION OF CUNDALL'S DISCRETE BLOCK METHOD TO GRAVITY
FLOW ANALYSIS OF ROCK-LIKE GRANULAR MATERIALS

木 山 英 郎*・藤 村 尚**

By Hideo KIYAMA and Hisashi FUJIMURA

1. ま え が き

ビン, サイロ, バンカーなど容器構造物内に充填された岩質粒状体は, 排出流動(上部からの補給がない流動)の開始直後において, 静的な堆積圧の数倍とも, あるいは 10 倍以上ともいわれる局所的な過動圧(動的な過動圧)を壁面に作用するとされている^{1),2)}. この点に関し著者らは先に, 鉛直円管を用いた模型実験によって, 連続流動(上部から補給してヘッド一定にした流動)における壁面応力が静的な堆積圧の 3~4 倍の大きさであり, この程度の過動圧は流動圧そのものと考えらるべきであると報告した³⁾.

本報告は, このような岩質粒状体の重力流動の 2 次元数値解析に, カンドル (Cundall, P.A., 1971)^{4)~6)} の提案した離散剛要素法 (Discrete Block Method, 以下 DBM と略す) を応用する試みについて述べる.

ここに, カンドルの DBM は, 不連続面で区切られた要素の集合体に対し, 個々の要素が運動方程式を満足し, 要素間の力の伝達が作用・反作用の法則に従うことを条件として, 集合体の動力的挙動を数値解析する新しい提案である. しかしその原理や解析手法の一つ一つは決して目新しいものではなく, それらを合目的に選択し組み合わせることによって成り立っている. したがって, そこに用いられた仮定やその概念, 解析手順, 解析手法が唯一のものではなく, 対象あるいは目的に応じて異なった選択や有効な改良, 修正の方法があり得ると考えている.

2. DBM の概要と修正

(1) DBM の原理

2 つの岩塊が接触あるいは衝突するとき, 岩塊は完全な弾性体ではないし, また接触点近傍の局所的な塑性変形や破損などのために, 完全弾性的衝突とはならない. そこで, 岩塊を剛体とみなし, 岩塊のもつ弾性的および非弾性的性質は接触点間に挿入した弾性スプリング(剛性定数 K) と粘性 ダッシュポット (粘性定数 η) で表現する. このとき, 一つの岩塊 (質量 m , 慣性モーメント I) に注目すれば, その並進 (u) および回転 (φ) に関する運動方程式は式 (1) の形式に略記される.

$$m\ddot{u} + \eta\dot{u} + Ku = 0 \dots\dots\dots (1 \cdot a)$$

$$I\ddot{\varphi} + \eta r^2\dot{\varphi} + Kr^2\varphi = 0 \dots\dots\dots (1 \cdot b)$$

これらは減衰振動を表わし, 与えられたすべての岩塊についての同様な運動方程式を連立して解くことによって, 運動状態から静止状態に至る岩塊の挙動を解析できる.

しかしながら, 通常一つの岩塊は周囲の数個の岩塊と接触しているため, 式 (1) の η や K はそれら数個の接点に挿入されたスプリングやダッシュポットの合成されたものとなり, 未知変位 u と φ を陰に含む式 (1) の形式の連立方程式で解を得ることは難しい. そこでカンドルは式 (1) を時間増分 Δt によって差分近似するとともに, 未知変位 u と φ (直接には加速度 \ddot{u} と $\ddot{\varphi}$) を陽に含む式で近似する逐次解法を提案した. たとえば u についてそれを示すと, 式 (1・a) を変形して

$$m[\ddot{u}]_t = -\eta[\dot{u}]_{t-\Delta t} - K[u]_{t-\Delta t} \dots\dots\dots (2)$$

とおき, 新しい加速度 $[\ddot{u}]_t$ (これを数値積分して新しい変位 $[u]_t$ が求まる) を前回の変位 $[u]_{t-\Delta t}$ に基づく接触時の作用力 (右辺) の陽関数とみなして逐次計算する方法である.

* 正会員 工博 鳥取大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 鳥取大学助手 工学部土木工学科

(2) 接触判定と接触相対変位

カンドル⁵⁾は岩盤を節理で区切られた岩盤ブロックと想定し、多角形要素を用いて頂点一辺接触における作用力を与えている。このままでは、要素間の接触判定の演算操作が複雑となり、要素数の多い粒状体の流動解析には用いにくい。そこで、粒子を円形要素に仮定することによってこの難点を取り除いた。

任意の円形要素 i の時刻 $t-\Delta t$ から t に至る微小時間増分 Δt 間の変位増分 $\Delta u_i, \Delta v_i, \Delta \phi_i$ を Fig. 1 のように表示する。

Fig. 2 に示すように、要素 i (半径 r_i) が要素 j (半径 r_j) に接近するとき、接触開始の条件は次式となる。

$$r_i + r_j \geq R_{ij},$$

$$\text{ただし, } R_{ij} = \{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2\}^{1/2} \dots\dots (3)$$

また接触点の指標として、共通法線の x 軸となす角 (反時計回りを正) α_{ij} を用いると、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha_{ij} &= -(y_i - y_j) / R_{ij}, \\ \cos \alpha_{ij} &= -(x_i - x_j) / R_{ij} \end{aligned} \right\} \dots\dots (4)$$

接触する2要素 i, j の Δt 間の、法線方向ならびに

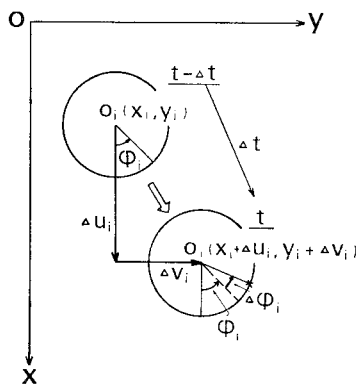


Fig. 1 Co-ordinates and displacements of a disc element.

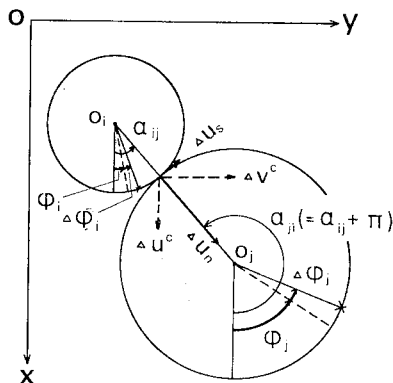


Fig. 2 Relative contact displacement between two elements.

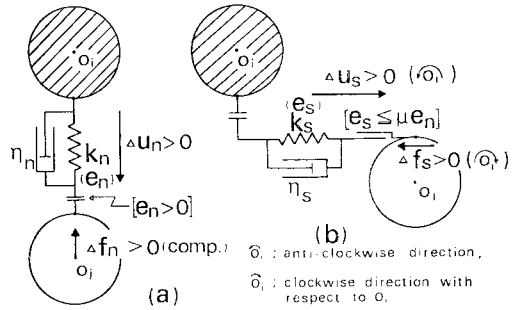


Fig. 3 Elastic spring (K) and viscous dashpot (γ) assumed for contact.

接線方向の相対変位増分, Δu_n (接近を正) および Δu_s (反時計回りを正) は次式で計算される。

$$\Delta u_n = (\Delta u_i - \Delta u_j) \cos \alpha_{ij} + (\Delta v_i - \Delta v_j) \sin \alpha_{ij} \dots\dots (5 \cdot a)$$

$$\Delta u_s = -(\Delta u_i - \Delta u_j) \sin \alpha_{ij} + (\Delta v_i - \Delta v_j) \cos \alpha_{ij} + (r_i \Delta \phi_i + r_j \Delta \phi_j) \dots\dots (5 \cdot b)$$

(3) 接触時の作用力⁵⁾

Fig. 3 に示すように2要素 i, j の接触面に作用する力を、法線方向に作用する圧縮力 f_n と接線方向に作用するせん断力 f_s (要素 i に関し時計方向を正) に分けて考える。

a) 法線方向の作用力

Fig. 3(a) に示すように、微小時間増分 Δt 間の法線方向の相対変位増分 Δu_n に比例した抗力増分 Δe_n を生じる弾性スプリング (剛性定数 K_n) と相対変位速度 $\Delta u_n / \Delta t$ に比例した抗力 Δd_n を生じる粘性ダッシュポット (粘性定数 η_n) の並列配置を仮定する。すなわち、

$$\Delta e_n = K_n \Delta u_n \dots\dots (6 \cdot a)$$

$$\Delta d_n = \eta_n \Delta u_n / \Delta t \dots\dots (6 \cdot b)$$

ただし、圧縮力を正とする (以下同じ)。

したがって、時刻 t において法線方向に作用する弾性抗力 $[e_n]_t$ と粘性抗力 $[d_n]_t$ は次式のようなになる。

$$[e_n]_t = [e_n]_{t-\Delta t} + \Delta e_n \dots\dots (7 \cdot a)$$

$$[d_n]_t = \Delta d_n \dots\dots (7 \cdot b)$$

しかし、粒子間の引張抗力を認めないため (図ではノーテンション・ジョイントで示す), 式 (7) には次式の条件が付される。

$$[e_n]_t < 0 \text{ のとき, } [e_n]_t = [d_n]_t = 0 \dots\dots (8)$$

以上より、時刻 t における2要素間の法線方向圧縮力 $[f_n]_t$ は次式で計算される。

$$[f_n]_t = [e_n]_t + [d_n]_t \dots\dots (9)$$

b) 接線方向の作用力

Fig. 3(b) に示すように、接線方向の相対変位増分 Δu_s (要素 i に関し反時計回りを正) に対しても同様に、せん断抗力を与える弾性スプリング (剛性定数 K_s) と

粘性 ダッシュポット (粘性定数 η_s) の並列配置を仮定する. 弾性抗力増分 Δe_s と粘性抗力 Δd_s は,

$$\Delta e_s = K_s \Delta u_s \dots\dots\dots (10. a)$$

$$\Delta d_s = \eta_s \Delta u_s / \Delta t \dots\dots\dots (10. b)$$

したがって, 時刻 t における接線方向の弾性抗力 $[e_s]_t$ と粘性抗力 $[d_s]_t$ (いずれも要素 i に関し時計回りを正) は次式ようになる.

$$[e_s]_t = [e_s]_{t-\Delta t} + \Delta e_s \dots\dots\dots (11. a)$$

$$[d_s]_t = \Delta d_s \dots\dots\dots (11. b)$$

上式には次の 2 つの条件が付される.

$$[e_n]_t < 0 \text{ のとき, } [e_s]_t = [d_s]_t = 0 \dots\dots\dots (12)$$

$|[e_s]_t| > \mu [e_n]_t$ のとき,

$$[e_s]_t = \mu [e_n]_t \times \text{SIGN}([e_s]_t) \dots\dots\dots (13. a)$$

$$[d_s]_t = 0 \dots\dots\dots (13. b)$$

ここに, μ は粒子間の摩擦係数, $\text{SIGN}(z)$ は変数 z の正負を表わすものとする.

これらの条件は接触点近傍のせん断変形が主として要素間の摩擦力によって生ずることを意味し, 条件式 (12) は非接触状態を, 条件式 (13) は摩擦力の限界を, それぞれ表わしている.

以上より, 時刻 t における 2 要素間の接線方向せん断力 $[f_s]_t$ は次式で計算される.

$$[f_s]_t = [e_s]_t + [d_s]_t \dots\dots\dots (14)$$

(4) 運動方程式の差分近似解

注目する要素 i と接触するすべての要素 j について, 式 (9) と式 (14) の形で接触力 $[f_n]_t$ および $[f_s]_t$ が求まると, 要素 i に関するそれらの x 方向分力 X_i , y 方向分力 Y_i ならびに中心回りのモーメント M_i (反時計回りを正) は次式で計算される.

$$[X_i]_t = \sum_j \{ -[f_n]_t \cos \alpha_{ij} + [f_s]_t \sin \alpha_{ij} \} + m_i g \dots\dots\dots (15. a)$$

$$[Y_i]_t = \sum_j \{ -[f_n]_t \sin \alpha_{ij} - [f_s]_t \cos \alpha_{ij} \} \dots\dots\dots (15. b)$$

$$[M_i]_t = -r_i \cdot \sum_j \{ [f_s]_t \} \dots\dots\dots (15. c)$$

ここに, \sum_j は要素 i に接触するすべての要素 j に関する総和を表わし, また m_i は要素 i の質量であり, $m_i g$ の項は重力が x 方向に作用することによる.

加速度を作用力の陽関数とみなして変形した運動方程式 (2) を時間増分 Δt で差分近似すれば, 右辺の作用力は式 (15) で与えられるから, 時刻 t における加速度は次式のように求まる.

$$[\ddot{u}_i]_t = [X_i]_t / m_i \dots\dots\dots (16. a)$$

$$[\ddot{v}_i]_t = [Y_i]_t / m_i \dots\dots\dots (16. b)$$

$$[\ddot{\phi}_i]_t = [M_i]_t / I_i \dots\dots\dots (16. c)$$

ここに, I_i は要素 i の慣性モーメントであり, 密度を ρ とし $I_i = \rho \pi r_i^4 / 2$ である.

時刻 t における変位速度は上式を時間増分 Δt に関し積分して,

$$[\dot{u}_i]_t = [\dot{u}_i]_{t-\Delta t} + [\ddot{u}_i]_t \cdot \Delta t \dots\dots\dots (17. a)$$

$$[\dot{v}_i]_t = [\dot{v}_i]_{t-\Delta t} + [\ddot{v}_i]_t \cdot \Delta t \dots\dots\dots (17. b)$$

$$[\dot{\phi}_i]_t = [\dot{\phi}_i]_{t-\Delta t} + [\ddot{\phi}_i]_t \cdot \Delta t \dots\dots\dots (17. c)$$

上式をさらに Δt で積分すれば, 時間増分 Δt 間の変位増分は次式となる.

$$[\Delta u_i]_t = [\dot{u}_i]_t \cdot \Delta t \dots\dots\dots (18. a)$$

$$[\Delta v_i]_t = [\dot{v}_i]_t \cdot \Delta t \dots\dots\dots (18. b)$$

$$[\Delta \phi_i]_t = [\dot{\phi}_i]_t \cdot \Delta t \dots\dots\dots (18. c)$$

このようにして定められた変位増分を時刻 t から $t + \Delta t$ までの新たな変位増分に仮定して, 再び式 (5) から式 (18) までの演算を繰り返す. このようにして時間増分 Δt ごとの変位増分が逐次計算できる.

以上がカンドルの提案した DBM⁹⁾ を円形要素に適用した場合の解析手順の大筋である. ただし, 後述するように, この差分近似法の収束性が時間増分 Δt にきわめて敏感であるため, 式 (18) に代えて式 (19) のようにわずかな修正を施すことによって解の安定性が増すといったように, 基礎的な面でもまだまだ改良の余地があると思われる.

$$[\Delta u_i]_t = \{ [\Delta u_i]_{t-\Delta t} + [\dot{u}_i]_t \cdot \Delta t \} / 2 \dots\dots (19. a)$$

$$[\Delta v_i]_t = \{ [\Delta v_i]_{t-\Delta t} + [\dot{v}_i]_t \cdot \Delta t \} / 2 \dots\dots (19. b)$$

$$[\Delta \phi_i]_t = \{ [\Delta \phi_i]_{t-\Delta t} + [\dot{\phi}_i]_t \cdot \Delta t \} / 2 \dots\dots (19. c)$$

なお, 上式は式 (18) と同様, 基本条件である弾性スプリングの接触変位と力の比例関係 (式 (7. a) および式 (11. a)) を維持している.

3. 材料定数 K , η と時間増分 Δt の決定法

弾性スプリング K と粘性ダッシュポット η を有する一自由度の振動方程式 (1) において, 最も減衰が速いのは,

$$\eta = 2\sqrt{mK} \dots\dots\dots (20)$$

のときである. 要素間の衝突によって生ずる跳ね反り現象をできるだけすみやかに減衰させるために, カンドルは K , η の決定に際し式 (20) の関係を考慮することを提案した⁹⁾.

また, 式 (1) を差分近似する際の解の収束性と安定性を得るための条件から, 時間増分 Δt を次式のようにとることを推奨した⁹⁾.

$$\Delta t < 2\sqrt{m}/K \dots\dots\dots (21)$$

以上いづれも, 一要素一接点に簡略化した運動方程式から導かれた条件であり, 実際には一要素が数接点を有するため, 両式を目安にして η , K および Δt の適当な組合せを試行錯誤によって決定するのがよいとしている⁹⁾.

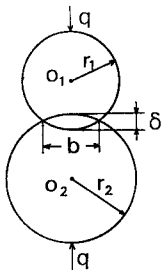


Fig. 4 Elastic contact of two cylinders.

ところで、DBM では要素を剛体とみなし、接触によって生ずる弾性力は接触点における相対変位量に関連して与える方式を採用し、両者を結ぶ係数として K を定義しているが、 K の材料定数としての意味については言及していない⁹⁾。

この点に関し著者らは、 K を本来弾性的性質を有する粒状体の変形係数に相当するものと解釈し、その算定法として対象とする粒子の弾性

接触における荷重-変位曲線の勾配を用いることを提案する。幸い円要素の場合には、Fig. 4 に示す弾性円柱の接触の理論解が利用できる。

ヤング率 E 、ポアソン比 ν の等しい2つの円柱（半径 r_1, r_2 ）が上下から単位厚さ当たり荷重 q で圧縮された場合の、両中心の接近量 δ と接触幅 b は次式で与えられる。

$$\delta = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi} \frac{q}{E} \left(\frac{2}{3} + \ln \frac{4r_1}{b} + \ln \frac{4r_2}{b} \right) \quad \dots\dots\dots(22 \cdot a)$$

$$b^2 = \frac{8}{\pi} \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \left(\frac{1-\nu^2}{E} \right) q \quad \dots\dots\dots(22 \cdot b)$$

したがって、法線方向の剛性定数 K_n は次式のようになる（ただし、 $r_1 = r_2 = r$ とする）。

$$K_n = \frac{4e_n}{4u_n} = \frac{q}{\delta} = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)(1.5 + 2 \ln(4r/b))} \quad \dots\dots\dots(23)$$

接線方向の剛性定数 K_s は簡単のため、 K_n に対する逓減率 s を導入して次式のように仮定する。

$$K_s = \frac{4e_s}{4u_s} = K_n \cdot s \quad \dots\dots\dots(24)$$

K_n, K_s を上記のように定めると、粘性定数 η_n, η_s は式 (20) を用いて次式のように定まる。

$$\eta_n = 2\sqrt{mK_n} \quad \dots\dots\dots(25 \cdot a)$$

$$\eta_s = \eta_n \cdot \sqrt{s} \quad \dots\dots\dots(25 \cdot b)$$

このとき Δt は、式 (21) に代えて次式のように K_n と η_n から定めるのが便利である。

$$\Delta t < \eta_n / K_n \quad \dots\dots\dots(26)$$

その際、 Δt をできるだけ小さくすれば、離散化誤差は減少し、安定性もよくなるが、そうすることによって所期の時刻 t に至るための計算ステップ数が増加し、演算時間の増大とステップごとの丸め誤差の累積による誤差増大を招くことに留意する必要がある。

4. 解析モデルの設定

(1) サイロ模型

サイロ模型は室内模型装置を念頭に粒子の存在領域を 40 cm × 40 cm の範囲と仮定し、Fig. 5 に示すように左上端点 O を原点とする x, y 座標上にとった。

Δt ごとに行う要素間の接触判定を能率よくするために、カンドルは全領域を適当な小区画に分割し、接触可能な粒子の存在領域を限定することによって演算数を大幅に削減する方法を提案した⁹⁾。本例では $\Delta x = \Delta y = 4$ cm の 100 分割を行い、区画番号 $k=1, 2, \dots, 100$ を付した。このとき、中心座標 (x, y) の要素の属する区画 k は次式で与えられる。

$$k = 91 - \text{FIX}(x/4) + \text{FIX}(y/4) \quad \dots\dots\dots(27)$$

ただし、FIX(Z) は Z の小数点以下切捨てによる整数化を表わす。

下端中央、点 L と点 R の間を排出スリットとし、スリット幅 D_s は 0~8 cm に可変とする。スリットから下方の解析領域を $k=101$ 、それより下方には $k=-102$ (図では $\bar{1}02$ と記す。以下同じ) を付して排出済み要素として解析を行わない領域を仮想する。

サイロ壁面は Fig. 5 に示すように、底壁 $\bar{A}B$ 区間を $k=-1$ 、側壁 $\bar{B}C$ および $\bar{O}A$ 区間をそれぞれ $k=-2, -3$ と名付け、接触時の特性 (K, η および μ) を識別する。充填時にはスリット $\bar{L}R$ 間は閉じており、区間 $\bar{A}B$ の一部として識別されるが、流動開始以降はスリット幅 D_s に応じた区間 $\bar{L}R$ は開かれたものとして要素の通過を許すように識別される。このとき、点 L ($k=-4$) と点 R ($k=-5$) は、他のサイロ壁が面として要

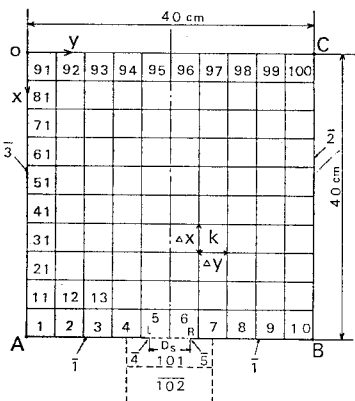


Fig. 5 Co-ordinate and geometry conventions of the analytical model of a silo.

Table 1 Values of K_n, η_n and Δt dependent on E .

E (kgf/cm ²) (kPa)	7.5×10^2 (7.35×10^4)	1×10^3 (9.80×10^4)	1×10^4 (9.80×10^5)	1×10^5 (9.80×10^6)	1×10^6 (9.80×10^7)
$K_n/\rho g$ (cm)	3.64×10^4	4.75×10^4	4.06×10^5	3.55×10^6	3.16×10^7
$\eta_n/\rho g$ (cm/s)	2.16×10	2.47×10^4	7.22×10^5	2.13×10^6	6.36×10^7
Δt (s) <	5.94×10^{-4}	5.20×10^{-4}	1.78×10^{-4}	6.01×10^{-5}	2.02×10^{-5}

素と接触するのに対し、点として周囲 360° にわたって任意方向に接触を許すものとする。

(2) K, η , および Δt

上記模型サイロに対し要素(粒子)約 350 個を配置することにし、要素半径 $r=1.0$ cm の等粒試料を仮定した。砂粒子を考え $\rho=2.65$ g/cm³ および $\nu=0.3$ を採用し、これらの数値を式 (23), (25・a), (26) に用いて、種々のヤング率 E に対する法線方向の定数 η_n, K_n および Δt の算定値を示したのが Table 1 である。 E の増加とともに、 K_n も比例的に増大し、それとともに計算ステップを示す時間増分 Δt を小さくする必要のあることがわかる。

健全な岩質材料の E は 5×10^9 kgf/cm² (4.9×10^7 kPa) 前後であり、この場合 $\Delta t < 1 \times 10^{-5}$ s となり 1 秒間程度の流動状況を追跡するのにステップ数が 10^5 回以上と大きくなる。そこで、実用的なステップ数の方から $\Delta t=1 \times 10^{-4}$ s と決定し、これを満たすものの中から E を選定すると、 $E=750$ kgf/cm² (7.35×10^4 kPa) といった小さい値注 1) となった。すなわち、 $K_n/\rho g=3.64 \times 10^4$ cm, $\eta_n/\rho g=2.16 \times 10$ cm/s となる。試算の結果は η_n の値を式 (25・a) によるものよりわずかに小さくした方が収束性が良好と判断されたので、 $1/\sqrt{2}$ 倍して $\eta_n/\rho g=1.53 \times 10$ cm/s に修正した。

これより、 $s=0.25$ と仮定し、式 (24), (25・b) を用いて接線方向の定数 $K_s/\rho g=0.91 \times 10^4$ cm, $\eta_s/\rho g=0.765 \times 10$ cm/s を得る。

また、Fig. 3 に示した摩擦スライダの定数 μ は、近似的に粒子の内部摩擦角 ϕ を用いて次式のように仮定する。

$$\mu = \tan \phi \dots\dots\dots (28)$$

本例では $\phi=30^\circ$ と仮定し、 $\mu=0.577$ とする。

以上は要素間(粒子間)の接触に関する定数であるが、サイロ模型では要素とサイロ壁との接触に関する定数も必要となる。本例ではすべてのサイロ壁 (Fig.

Table 2 Data of the analytical model of the silo.

silo		particle	
height : 40cm		radius r : 1.0 cm	
width : 40 cm		density ρ : 2.65 g/cm ³	
slit D_s : 8 cm		Young's modulus E : 750 kgf/cm ² (7.35×10^4 kPa)	
		Poisson's ratio ν : 0.3	
time step Δt : 1.0×10^{-4} s			
		particle to particle	particle to wall
$K_n/\rho g$ (cm) :		3.64×10^4	7.28×10^4
$\eta_n/\rho g$ (cm/s) :		1.53×10	3.06×10
$K_s/\rho g$ (cm) :		0.91×10^4	1.82×10^4
$\eta_s/\rho g$ (cm/s) :		0.765×10	1.53×10
μ :		0.577	0.176

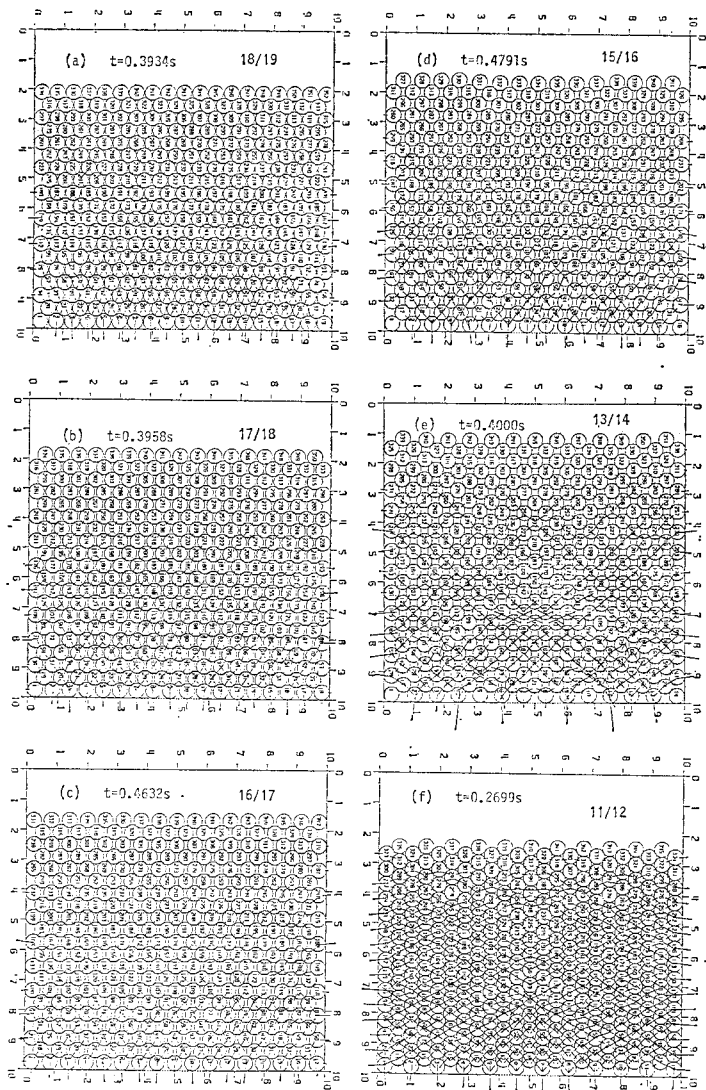


Fig. 6 Contact forces for different particle arrangements in the initial filling (the computer X-Y plotting output).

注 1) この値は土の見掛けのヤング率に近く、要素半径 $r=1$ cm と大きいことと併せて、各要素を粒子モデルとみるよりも土塊モデルと解釈する方がよいかも知れない。

5 の $k = -1 \sim -5$ を完全剛体と仮定して、 K_n , η_n , K_s , η_s を上述の粒子間の場合の 2 倍の大きさに設定した。また μ の値も砂の壁面摩擦角 $\phi_w = 10^\circ$ を式 (28) に用いて $\mu_w = 0.176$ とした。

以上、解析に用いた数値をまとめて Table 2 に示す。

5. 解析結果と考察

(1) 静止時粒状体圧

約 350 個の要素を左右対称にして最下段に s 個、その上に $(s-1)$ 個の順に規則正しく配列した場合（以下 $(s-1)/s$ 配列とよぶ）の静止時の接触力の作用状態を Fig. 6 に示す。

この解析は、要素間ならびに要素-壁面間にごくわずかな間隙^{注2)}を残した非接触の浮遊状態から計算を開始し、 $\Delta t = 10^{-4}$ s 間隔で図中に示すそれぞれの時刻 t まで繰り返すことによって静止状態^{注3)}に至らしめたものである。

図中の線分は接触点における法線方向および接線方向の弾性スプリングによる接触力の合力をベクトル表示したものであり、線分長（接点を挟んで作用力と反作用力の大きさは等しく、合わせて一本の線分とみなす）はベクトルの大きさを表わし、図中の要素直径分が約 $16 (= 50/\pi)$ 個の粒子重量に相当する。

Fig. 6 はこのサイロ模型における 1 要素 4 接点配列のすべてであり、11/12 配列は見た目にも最も偏平な配列、18/19 配列は最も高積み（ただし、6 列中充填密度最大）の配列となる。

粒子間の力の伝達は 11/12 配列が最も水平方向に近く、配列数 s の増加とともに鉛直成分を増し、18/19 配列が最も鉛直方向に近い。それとともに、サイロ側壁に作用する垂直力は 11/12 配列で大きく、 s の増加とともに減少し、18/19 配列において最も小さくなる。側壁面垂直力 (P_y) の分布図を Fig. 7 にまとめて示す。この壁面垂直力の深さ方向の分布は、ヤンセン式から推定されるように、深さとともに増大し、ある深さではほぼ一定値に収束する傾向を示すが、ただ底壁近くで減少の傾向が認められる。

これと共存する壁面せん断力（壁面摩擦力）は必ずしも正の摩擦力（粒子の沈下を抑制する方向）とは限らず、壁面粒子の浮上りを抑制する方向にわずかな負の摩擦力を生じる部分がある。これはサイロ下部の左右両隅

注2) 配列により要素間の最小間隔は異なるが、たとえば 0.004 cm (17/18 配列) とか 0.03 cm (11/12 配列) である。

注3) Δt 間の変位量 $|du_i|$ および $|dv_i|$ について全要素の平均値が、 Δt 間の自由落下距離 $(\Delta t)^2 g$ の 10^{-8} 倍（約 10^{-9} cm）以下になることを条件にしている。

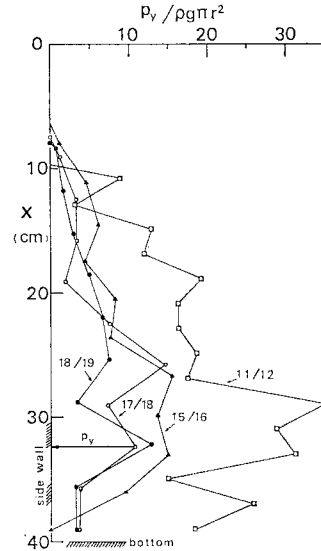


Fig. 7 Distributions of contact forces at the side wall (P_y) in the initial filling.

の粒子群が中央部の粒子からの横圧力を受けて押し上げられる傾向にあることを示している。

以上をまとめると、① 静止堆積圧は充填時の粒子配列によって異なり、18/19 配列から 11/12 配列に向かって、主働土圧傾向から受働土圧傾向に移行する。② サイロ側壁の垂直力はヤンセン式型の分布となるが、底部における垂直力の減少と負の壁面摩擦力の発生は新たな知見である。

(2) 流動時粒状体圧

17/18 配列の排出流動時における流動状況と接触力の作用状況を Fig. 8 に、11/12 配列のそれを Fig. 9 に示す。

たとえば、17/18 配列において、排出スリット（図中の破線 46 区間）を開き流動を開始すると、排出口上の粒子は無負荷状態となり自由落下を始め、応力伝達はそれを取り囲む形で排出口両端近くに足をもつアーチ状に行われる（以下、この種の応力伝達をアーチとよぶ）。しかしこのアーチは弱体で、天井部はしだいに崩れて高くなり、アーチの足も排出口近傍からしだいに奥へと後退する。

この排出流動中ほとんど粒子の移動を生じない領域、いわゆる死領域が形成され、その内側の漏斗状の領域を粒子が流下する。流動初期 ($t=0 \sim t=0.400$ s) においてこの死領域と接する 1~2 層の粒子層も大きな流動を示し（以下、滑動層とよぶ）、アーチの足の生成・破壊に關与し、この時期の流動に対し最も支配的である。そのため上表面はサイロ両端部において最大の沈下を示す。

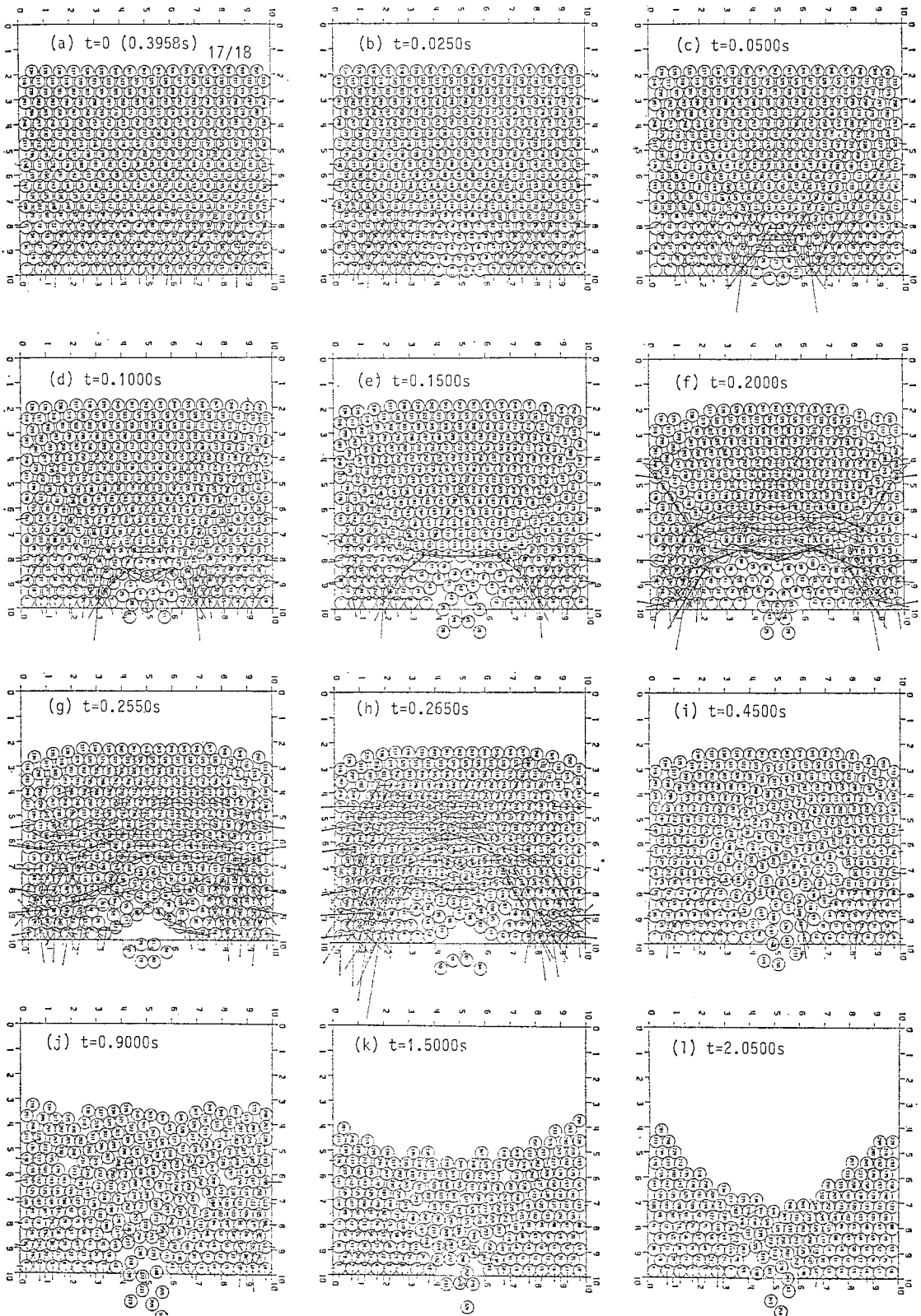


Fig. 8 Particle positions and contact forces in the discharge flow, for the case of 17/18 arrangement (the computer X-Y plotting output).

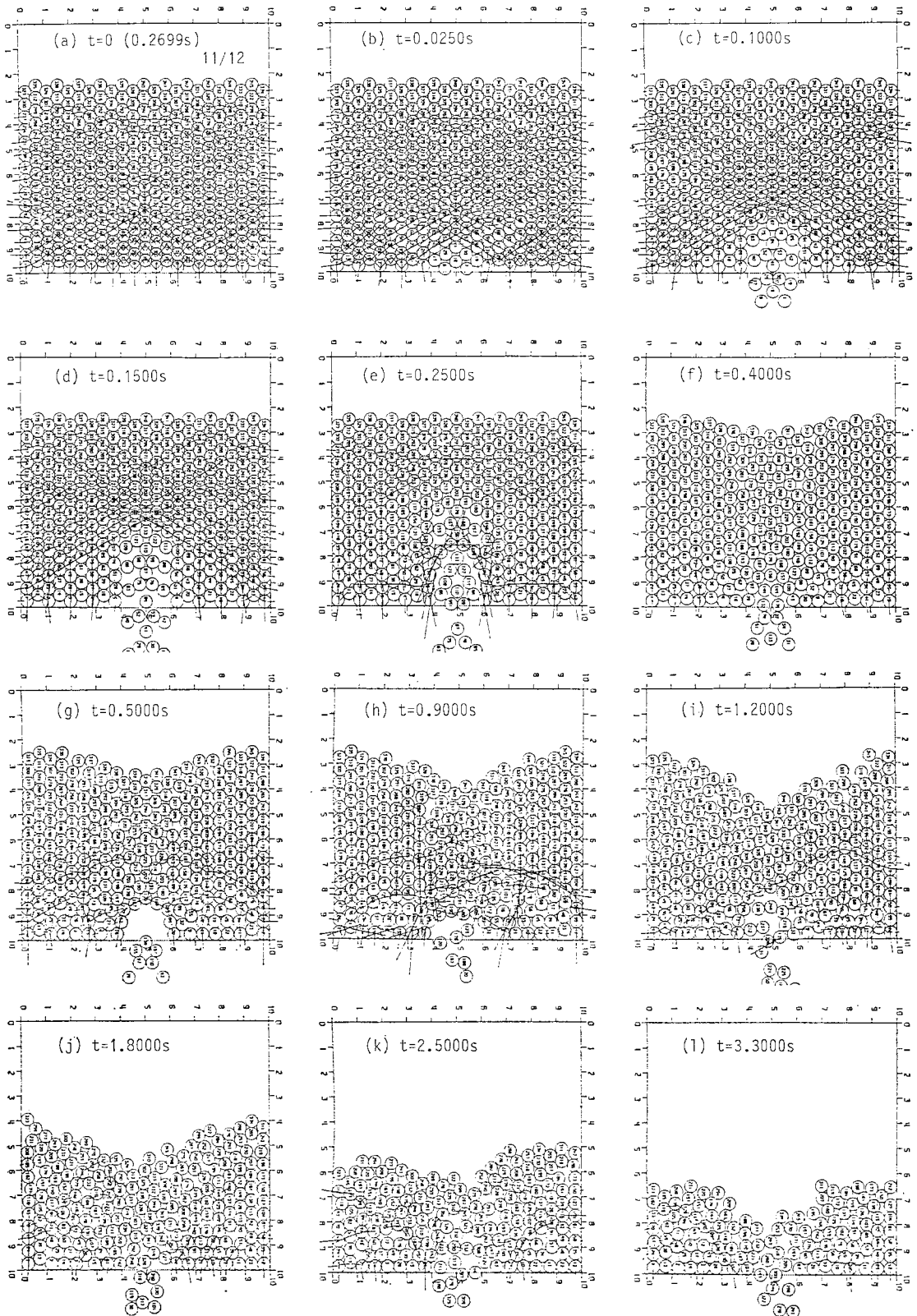


Fig. 9 Particle positions and contact forces in the discharge flow, for the case of 11/12 arrangement (the computer X-Y plotting output).

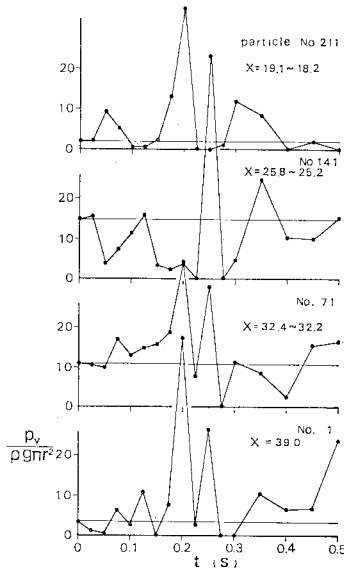


Fig. 10 Contact forces at the side wall (P_y) in the discharge flow.

アーチの後退が続き、アーチ天井が上表面に達する $t=0.400\text{ s}$ 付近において、初めて上表面にサイロ中心線上の沈下が発生する。それ以後、しだいにこの中心部の流下が卓越し、模型実験において排出流動終期によくみられる漏斗状の流動形態を呈する。

ところで、粒子間の接触力は、流動初期 $t=0.050\text{ s} \sim 0.300\text{ s}$ において滑動層の流下に伴うアーチの崩壊・生成の過程できわめて大きく、変動も激しい。サイロ壁面に作用する最大接触力はアーチの足部粒子が接する底壁に生じ、その大きさは静止時の約 10 倍に達する。サイロ側壁の接触力は、一例を Fig. 10 に示すようにアーチが小さいときは静止時よりやや大きい程度であるが、アーチが大きく水平に張り出したとき ($t=0.200\text{ s} \sim 0.300\text{ s}$) には、静止時の 2 倍から 5 倍と大きくなりかつ変動も激しい。またこのとき、大きな負の壁面摩擦力を伴うことが多い。

$t=0.400\text{ s}$ 以降、中心部の流動が支配的となる漏斗状流動においては、アーチの生成がほとんどみられず、粒子間および粒子-壁面間の摩擦力も、ごくまれに粒子の衝突による局所的な集中力の発生をみる以外は、静止時のそれとほぼ等しいか、それ以下となる。

Fig. 9 に示す 11/12 配列の場合、排出流動の初期からサイロ中央部の落下流動が卓越し、排出口両端からほぼ鉛直に上表面まで達する煙突状の流路が形成される (このような流動をパイピング (piping) とよぶ)。この間 ($t=0 \sim 0.400\text{ s}$)、この流路をせき止める形の小さなアーチがごくたまに生じて、アーチの足が接する排出口両端近傍に静止時の 2~3 倍の大きさの接触力を及ぼす

以外、側壁、底壁とも静止時の接触力とほとんど変わらない。

上表面の流下が生じた $t=0.400\text{ s}$ 以降注 4) も、煙突状の流路の両側に残された粒子が上方から倒れ込む形で中央部の落下流動が続き、17/18 配列にみたような安定な死領域に囲まれた漏斗状の流路は最後まで生じない。

以上、17/18 配列と 11/12 配列を比較することによって次の事実が確認される。

① 排出流動直後の大きな過動圧は、初期充填において主働土圧状態に堆積された場合に生じ、受働土圧状態に堆積された場合にほとんど生じないとされている²⁾ が、前者が 17/18 配列、後者が 11/12 配列とみることによって肯定される。両者の差異は、次項 ② に述べるアーチ生成の難易に関連する。

② 排出流動における過動圧は、排出直後のアーチの崩壊・生成の過程で生じ、アーチの足を受けるサイロ底壁において静止時の最大 10 倍程度が観察される。サイロ側壁の流動圧は静止圧より増大するが、最大 2~4 倍 (アーチの足が側壁方向へ張出した場合に生ずる) である。また、そのとき、比較的大きな負の壁面摩擦力を伴うのが特徴である。

③ 同一試料に対し、サイロの直径と排出スリットの幅との関係によって、パイピングを生じるか否かが決まると考えられてきた²⁾ が、11/12 配列で明らかなパイピングを生じ、17/18 配列においてはパイピングの傾向がみられず一般的な漏斗状の流動になることから、パイピング現象には試料の堆積状態の影響が卓越すると判断される。

6. 結 論

カンドルの開発した離散剛要素法 (DBM) の要素形状を円形に簡略化することによって、多数の粒子からなるサイロ内の粒状体の重力流動の解析に適用できることを示した。その際、弾性スプリングの剛性定数の決定に弾性接触論を用いることや解の収束性を高めるための変位増分の算定式を修正することなどを提案した。

解析例として、要素数約 350 のサイロ模型の静止状態と流動状態について考察し、サイロ内の粒子配列の差によって ① 静止堆積圧の主働傾向から受働傾向への移行、② 排出流動における漏斗状流路と煙突状流路 (パイピング) の出現、③ アーチの形状や生成の難易、④ 過動圧発生の多少、などの差が生じることを明らかにするとともに、⑤ サイロの側壁面における静止時ならば

注 4) $t=0.500\text{ s}$ で形成された小さなアーチが流れをせき止め、 $t=0.700\text{ s}$ に至るもすっかり安定してしまったので、強制的に天井の一要素を除去した形で $t=0.700\text{ s}$ 以降の解析を続けた。

に流動時の負の壁面摩擦力の存在や ⑥ アーチの崩壊・生成に伴う過動圧の発生状況と大きさなど、基本的事項に関する知見も得た。

なお、本計算は入・出力処理に鳥取大学電子計算機センターの HITAC M-150 を用い、計算処理を京都大学大型計算機センターの FACOM M-200 で行った。

参 考 文 献

- 1) Jenike, A.W. : Gravity Flow of Bulk Solids, Bulletin of the Uni. of Utah, Bull. No. 108, 1961.
- 2) Jenike, A.W. and J.R. Johanson : On the Theory of Bin Loads, Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, Series B, Vol. 91, No. 2, pp. 339~344, 1969;
Part 2, Vol. 95, No. 1, pp. 1~5, 1973;
Part 3, Vol. 95, No. 1, pp. 6~12, 1973;
- Part 4, Vol. 95, No. 1, pp. 13~16, 1973.
- 3) 木山英郎・藤村 尚：岩質粒状体の重力流動に関する基礎研究，土木学会論文報告集，No. 322，pp. 101~110，1982.
- 4) Cundall, P.A. : A Computer Model for Simulating Progressive, Large Scale Movements in Blocky Rock Systems, Symp. ISRM, Nancy, France, Proc. Vol. 2, pp. 129~136, 1971.
- 5) Cundall, P.A. : Rational Design of Tunnel Supports —A Computer Model for Rock Mass Behavior Using Interactive Graphics for the Input and Output of Geometrical Data, Technical Report [MRD-2-74, Missouri River Division, U.S. Army Corps of Engineers, 1974.
- 6) Cundall, P.A. : Explicit Finite-Difference Method in Geomechanics, Numerical Methods in Geomechanics (edited by Desai, C.S.), Vol. 1, pp. 132~150, 1976.
(1982.6.7・受付)