

中規模河床波の発生と河川の卓越蛇行波長について

ON THE FORMATION OF ALTERNATING BARS AND
BRAIDS AND THE DOMINANT MEANDER LENGTH

尾崎 幸男*・林 泰造**

By Sachio OZAKI and Taizo HAYASHI

1. はじめに

河川の河道形態は、直線河道、蛇行河道および網状河道の 3 つに大別できる。かつては、河川の蛇行は河岸の交互の浸食のみを意味すると思われてきたようである。

しかし、木下 (1957, 62)^{1), 2)} は、実験観察から、河道が蛇行する前にまず最初に河床の交互の洗掘と堆積によって水流の蛇行が生ずるという事実を明らかにした。

その後、Kennedy (1963)³⁾ の砂堆および反砂堆 (小規模河床形態) の発生に関する河床安定理論による研究の成功に刺激されて、交互砂州とうろこ状砂州の中規模河床形態の形成について安定理論に基づく理論的研究が発表されるようになってきた。Reynolds (1965)⁴⁾、林 (1969, 70, 73)^{5)~7)} および黒木・岸 (1977, 78)^{8), 9)} は Potential flow モデルを用いて研究を行い、また、Hansen (1967)¹⁰⁾、Callander (1969)¹¹⁾、鮭川 (1970, 71)^{12), 13)}、椿ら (1971)¹⁴⁾、林・尾崎 (1974, 76)^{15), 16)}、Parker (1976)¹⁷⁾ および Fredsøe (1978)¹⁸⁾ は Shallow-water shear flow モデルにより解析を行った。さらに Engelund & Skovgaard (1973)¹⁹⁾ は Turbulent-shear flow モデルに基づいて解析を行った。これらの研究では、中規模河床形態の発生機構、形成領域および卓越波長などが理論的に説明付けられているが、すべての理論において、移動床河床面の不安定性の要因は、“河道に沿っての河床せん断力 (Potential flow モデルでは掃流力) と河床波形との間の位相差”であるといえる。この位相差は、Potential flow モデルにおいては掃流力分布の非対称性等の仮定を設けることにより“人為的”に導入されるものであるが、Shear flow モデルにおいては、これ

は流れについての通常の運動方程式と連続方程式からなる式系の中に内在しているものである。

しかし、上記のいずれの蛇行発生理論においても、局所掃流砂量の表示式の中に何らかの新しい付加的な要素を導入しない限り、“3 次元的に不安定な河床においてはうろこ状砂州の次数 (水路幅方向の数) m が大きいものほどその発生率が大きい”という事実と反する理論結果を生むことになる。

Engelund & Skovgaard (1973)¹⁹⁾ はこのような理論上の難点を取り除くため、掃流砂量の横断方向成分に新たに“重力の効果” (横断方向の河床勾配の影響) の仮定を導入し、 $m\pi D_0/B$ (ここに、 m は網状性を示すモード、すなわち複列蛇行の列数、 D_0 は平均水深、 B は水路幅) のある値に対して不安定擾乱の成長率に最大値 (卓越モード) が存在することを示した。しかし、彼らの提案した“重力効果”の表示式中の比例定数についてはその定量化がなされていない。卓越モードの存在を Engelund & Skovgaard と同様に“重力効果”によるものとして行っている研究にはさらに Fredsøe (1978)¹⁸⁾ と黒木・岸 (1977, 78)^{8), 9)} によるものが挙げられる。

著者らは局所掃流力と局所掃流砂量との間の空間的遅れ距離 δ_{gr} が単列蛇行の形成に重要な役割をもつものであること、そしてこの δ_{gr} には Einstein (1950)²⁰⁾ によって初めて導入され林・尾崎 (1979)²¹⁾ によって修正された掃流粒子の 1 ステップ長 $100 \tau_* d$ (d : 砂の代表粒径、 τ_* : 無次元掃流力) を用いることができることを理論的に示し、これに基づいて解析を行い蛇行波長式を導き、数多くの実験値ならびに実際河川の実測値との比較を行った。その研究結果は土砂水理学日米科学協力セミナー (組織者: H.W. Shen および吉川秀夫両教授) (1978) で発表された。同セミナーのプロシーディングズにあたる単行本の中に集録されている²²⁾。

本論文は上述の論文の内容から中規模河床波の成因と蛇行波長についての著者らの研究の理論上の要点を抜粋

* 正会員 工博 (財) 電力中央研究所土木技術研究所 環境水理部原子力水理研究室 (元河川環境研究室) 担当研究員

** 正会員 工博・Dr.H.C. 中央大学教授 理工学部土木工学科、埼玉大学客員教授 工学部地盤水理実験施設

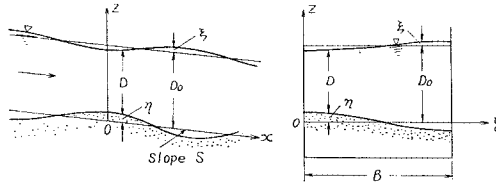


図-1 座標系

し、これに著者らのその後の研究結果および今後の問題点を付け加えてまとめ直したものである。

2. 河床面安定解析のための基本式

a) 基礎方程式

図-1 に示すような移動床長方形断面開水路流れについて考える。河床の時間的変化は緩やかであり、水流や水面変動は河床変動に対しすみやかに追隨して変化するものとして取り扱う。また、河床は非粘着性物質で構成されているものとする。

水深は発生する河床波の波長に比してかなり小さいものとする、 x および y 方向の水流の運動方程式、同連続方程式、および河床物質の連続方程式はそれぞれ次のように書き表わされる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \left(\frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\tau_x}{\rho D} - gS = 0 \dots\dots(1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \left(\frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \frac{\tau_y}{\rho D} = 0 \dots\dots(2)$$

$$\frac{\partial u D}{\partial x} + \frac{\partial v D}{\partial y} = 0 \dots\dots(3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} = 0 \dots\dots(4)$$

ここに、 u, v ：水深方向に平均化されたそれぞれ x および y 方向の流速成分、 D ：局所水深、 η, ξ ：それぞれ河床面および水表面の、平均位置からの鉛直変位、 τ_x, τ_y ：それぞれ x および y 方向の河床せん断力成分、 ρ ：水の密度、 g ：重力加速度、 S ：平均河床勾配、 G_x, G_y ：容積レート of 底質流砂量のそれぞれ x および y 方向成分。

局所底質流砂量式には、Einstein-Brown の式²⁴⁾に遅れの距離 δ_{gr} を考慮した次式を用いる。

$$\Phi_x(x, y) \equiv G_x / [\sqrt{(s-1)gd^3} F_f] = 40 [\tau_* (x - \delta_{gr}, y)]^3 \dots\dots(5)$$

$$\Phi_y(x, y) \equiv G_y / [\sqrt{(s-1)gd^3} F_f] = \Phi_x(x, y) \cdot v(x, y) / u(x, y) \dots\dots(6)$$

ここに、 Φ_x, Φ_y ：無次元底質流砂量成分、 s ：砂粒の比重、 d ：砂粒の平均粒径、 τ_* ： x 方向の無次元掃流力成分、で

$$\tau_* = \tau_x / [(s-1)\rho g d] \dots\dots(7)$$

また、 F_f ：粒子の無次元沈降速度、で Rubey の式²⁵⁾を

用いて次式で表わされる。

$$F_f = \frac{w_f}{\sqrt{(s-1)gd}} = \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{36\nu^2}{(s-1)gd^3}} - \sqrt{\frac{36\nu^2}{(s-1)gd^3}}$$

ただし、 w_f ：粒子の沈降速度、 ν ：水の動粘性係数。

式 (5) に導入した δ_{gr} は、 δ_{gr} ：局所掃流力と局所流砂量との間に生ずる遅れ距離、であり、これには著者らが先に理論的に導いた次式²¹⁾を使用する。

$$\delta_{gr} \cong l_0 \cong 100 \tau_* d = 100 D_0 S / (s-1) \dots\dots(8)$$

ただし、 l_0 ：粒子の1ステップの移動距離、 D_0 ：河床波がないときの水深。

河床せん断力 τ_x および τ_y としては、流れが shallow water flow とみなせることから、近似的に次式を採用する。

$$\tau_x = f \frac{1}{2} \rho u^2, \tau_y = (v/u) \tau_x \dots\dots(9)$$

ここに、 $f \equiv 2(u_* / U)^2 = 2S / F^2$ ：河床波がないときの河床摩擦係数、 u_* ：河床波がないときの水流の摩擦速度、 U ：水流の平均流速、 $F = U / \sqrt{gD_0}$ ：河床波がないときの水流の Froude 数、である。

以上を本解析のための基礎方程式として使用する。

b) 基礎方程式の線形化と無次元化

定常かつ等流状態の流れに以下の微小擾乱、 $\eta, \xi, u', v', \tau_x', \tau_y', G_x', G_y'$ を与える。

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \eta, \xi = \xi, D = D_0 + \xi - \eta \\ u &= U + u', v = v', \tau_x = \tau_0 + \tau_x' \\ \tau_y &= \tau_y', G_x = G_0 + G_x', G_y = G_y' \end{aligned} \right\} \dots\dots(10)$$

上式を式 (1)~(4)、式 (5)、(6) および (9) に代入し、微小擾乱量について線形化すると、

$$\left. \begin{aligned} U \frac{\partial u'}{\partial x} + g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\tau_x'}{\rho D_0} - \frac{\tau_0}{\rho D_0} \frac{\xi}{D_0} + \frac{\tau_0}{\rho D_0} \frac{\eta}{D_0} &= 0 \\ U \frac{\partial v'}{\partial x} + g \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\tau_0}{\rho D_0} \frac{v'}{U} &= 0 \\ U \frac{\partial \xi}{\partial x} - U \frac{\partial \eta}{\partial x} + D_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + D_0 \frac{\partial v'}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial G_x'}{\partial x} + \frac{G_0}{U} \frac{\partial v'}{\partial y} &= 0 \\ G_x' &= 3 G_0 \tau_{*x}' (x - \delta_{gr}) / \tau_{*0} \\ &= 3 G_0 \tau_{*x}' (x - \delta_{gr}) / \tau_0 \\ G_y' &= G_0 v' / U \\ \tau_x' &= 2 \tau_0 u' / U, \tau_y' = \tau_0 v' / U \end{aligned} \right\} \dots\dots(11)$$

ここに、

$$\tau_0 = f (1/2) \rho U^2 = \rho g D_0 S \dots\dots(12)$$

$$G_0 = 40 \sqrt{(s-1)gd^3} F_f \tau_{*0}^3 \dots\dots(13)$$

式 (11) から $\tau_x', \tau_y', G_x', G_y'$ を消去し、さらに無次元量、

$$\left. \begin{aligned} x_r &= x/D_0, \quad y_r = y/D_0, \quad \eta_r = \eta/D_0, \\ \xi_r &= \xi/D_0, \quad u_r = u'/U, \quad v_r = v'/U, \\ t_r &= t(g/D_0)^{1/2}, \quad \delta_r = \delta_{gr}/D_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

を用いると、以下の無次元線形方程式の組が得られる。

$$F^2 \frac{\partial u_r}{\partial x_r} + 2S u_r + \frac{\partial \xi_r}{\partial x_r} - S \xi_r + S \eta_r = 0 \dots\dots\dots(15)$$

$$F^2 \frac{\partial v_r}{\partial x_r} + S v_r + \frac{\partial \xi_r}{\partial y_r} = 0 \dots\dots\dots(16)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial x_r} + \frac{\partial v_r}{\partial y_r} + \frac{\partial \xi_r}{\partial x_r} - \frac{\partial \eta_r}{\partial x_r} = 0 \dots\dots\dots(17)$$

$$\frac{\partial \eta_r}{\partial t_r} + A_S \left[6 \frac{\partial u_r(x_r - \delta_r)}{\partial x_r} + \frac{\partial v_r}{\partial y_r} \right] = 0 \dots\dots\dots(18)$$

ここに、 $A_S = G_0/\sqrt{gD_0^3} = \sqrt{(s-1)d^3/D_0^3} F_f \Phi_0$,

$$\Phi_0 = 40 \tau_{*0}^3.$$

このようにして求められた式 (15)~(18) が本解析の基本式となる。

3. 中規模河床波の発生と卓越波長

河床波の発生を河床の安定理論の見地から考察する。

平坦河床上に、次式で表わされるような、 x, y 両方向にともに周期的な変位 (ただし、ここでは比値表示) を擾乱として加える。

$$\eta_r = \eta_0 \cos l y_r \exp[ik(x_r - ct_r)] \dots\dots\dots(19)$$

ただし、 η_0 : $t=0$ における η_r のノルム (すなわち振幅)、 k, l : 擾乱変位のそれぞれ x および y 方向の無次元波数、で

$$k = 2\pi D_0/L, \quad l = m\pi D_0/B \dots\dots\dots(20)$$

L : 擾乱変位の x 方向波長、 B : 水路幅、 m : 正の整数、 $c \equiv c_R + ic_I$: 無次元複素位相速度、である。

この擾乱に伴い、他の水理量にもそれぞれ波数 k および l を同じくする変動成分を生ずるはずであるので、それらを次のように仮定する。

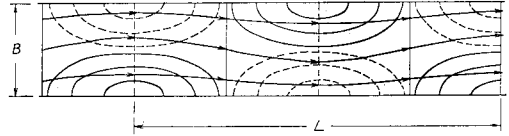
$$\left. \begin{aligned} u_r &= u_0 \cos l y_r \exp[ik(x_r - ct_r) + i\theta_u] \\ v_r &= v_0 \sin l y_r \exp[ik(x_r - ct_r) + i\theta_v] \\ \xi_r &= \xi_0 \cos l y_r \exp[ik(x_r - ct_r) + i\theta_\xi] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

ここに、 u_0, v_0, ξ_0 : $t=0$ におけるそれぞれ u_r, v_r, ξ_r の振幅、 $\theta_u, \theta_v, \theta_\xi$: u_r, v_r, ξ_r がそれぞれ η_r に対してもつ位相差で波形が上流側方向にシフトするような位相の進みを正とする。

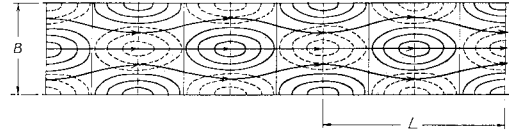
明らかに、式 (21) の v_r は両側壁の存在が与える境界条件、

$$y_r = 0 \text{ および } B/D_0 \text{ で } v_r = 0$$

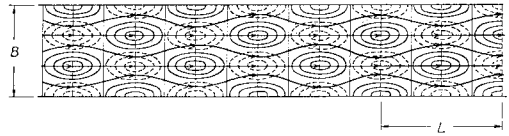
を満たしている。式 (20) 中の m は既述のように正の整数であるが、物理的には複列蛇行の列数を表わすものと説明することができるものである。以後この数を 2 重周期河床波の“モード”とよぶこととする。図-2 はモードが 1, 2 および 3 に対する形状 (河床変位等高



(a) $m=1$ (蛇行流)



(b) $m=2$ (モード2の網状流)



(c) $m=3$ (モード3の網状流)

図-2 2重周期河床波とモード

線および流線) を説明図的に画いたものである。モード 1 の場合が単列蛇行であり、モードが大になるほど複列性がふえることになる。

式 (19) と (21) を式 (15), (16), (17) および (18) に代入し、 $\eta_0, u_0 \exp(i\theta_u), v_0 \exp(i\theta_v), \xi_0 \exp(i\theta_\xi)$ の 4 個の量について考えると、これらが恒等的には 0 でない値をもつためには、これら 4 量の係数行列式が 0 であることが必要である。すなわち、

$$\begin{vmatrix} S & ikF^2 + 2S & 0 & ik - S \\ 0 & 0 & ikF^2 + S & -l \\ -ik & ik & l & ik \\ -ick/A_S & 6ik + 6k^2\delta_r & l & 0 \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots(22)$$

式 (22) をみると、複素位相速度 $c \equiv c_R + ic_I$ は行列式の第 4 行第 1 列の項にのみ入っている。したがって、式 (22) は c についての 1 次式であり、容易に c の値 (固有値) を求めることができる。

ところで式 (19) から明らかなように、河床擾乱 η_r の時間 $t=t$ における振幅は $\eta_0 \exp(kc_I t_r)$ であるから、 η_r の時間的初期増幅率は次のように表わされる。

$$\frac{1}{\eta_0} \left\{ \frac{d}{dt_r} \eta_0 \exp(kc_I t_r) \right\}_{t_r=0} = kc_I \dots\dots\dots(23)$$

したがってこの式から、河床面上に発生する河床波の卓越波長は kc_I の値を正かつ極大にするものとなると考えられる。

そこで、そのような卓越波長 (したがって卓越波数) を求めるために、式 (22) から c の値の虚数部 c_I を求めると次式を得る。

$$kc_I = \frac{A_S S}{F^2} \cdot \frac{R_N}{R_D} \dots\dots\dots(24)$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 R_N &= (9 F^2 S^2 l^2 + 5 F^4 l^4) k^2 - \{18 F^2 S^2 \\
 &\quad + (7 F^2 - 10) F^4 l^2\} k^4 - (18 F^6 + 18 \delta_r F^4 S \\
 &\quad + 6 \delta_r F^6 S^{-1/2}) k^6 - 6 \delta_r (1 - F^2) F^6 S^{-1} k^8 \\
 R_D &= 4 S^2 l^4 + \{9 S^4 + 2(2 - 5 F^2) S^2 l^2 + F^4 l^4\} k^2 \\
 &\quad + \{(1 - 2 F^2 + 10 F^4) S^2 + 2(1 - F^2) F^4 l^2\} k^4 \\
 &\quad + (1 - F^2)^2 F^4 k^6
 \end{aligned}$$

式 (24) を卓越波長を求める関係式 $\partial(kc_I)/\partial k=0$ に代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 A_0 k^{12} &+ (A_{11} l^2 + A_{12} S^2) k^{10} + (A_{21} l^2 + A_{22} l^4 \\
 &+ A_{23} S^2 + A_{24} l^2 S^2 + A_{25} S^4) k^8 \\
 &+ (A_{31} l^4 + A_{32} l^6 + A_{33} l^2 S^2 + A_{34} l^4 S^2 \\
 &+ A_{35} S^4 - A_{36} l^2 S^4 + A_{37} S^6) k^6 \\
 &+ (-A_{41} l^6 - A_{42} l^4 S^2 + A_{43} l^6 S^2 + A_{44} l^2 S^4 \\
 &+ A_{45} l^4 S^4 + A_{46} S^6) k^4 + (-A_{51} l^6 S^2 \\
 &+ A_{52} l^4 S^4) k^2 - (A_{61} l^8 S^2 + A_{62} l^6 S^4) = 0
 \end{aligned} \tag{25}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 6(\delta_r/S)(1 - F^2)^3 F^{10} \\
 A_{11} &= 24(\delta_r/S)(1 - F^2)^2 F^{10} \\
 A_{12} &= 12(\delta_r/S)\{(1 - F^2)^2 + 9 F^4\}(1 - F^2) F^6 \\
 A_{21} &= (10 + 19 F^2 + 7 F^4)(1 - F^2) F^8 \\
 A_{22} &= 30(\delta_r/S)(1 - F^2) F^{10} \\
 A_{23} &= 162 F^{10} \\
 A_{24} &= 6(\delta_r/S)(13 - 38 F^2 + 34 F^4) F^6 \\
 A_{25} &= 18(\delta_r/S)(1 + 7 F^2 + F^4) F^4 \\
 A_{31} &= 2(5 + 8 F^2 + 5 F^4) F^8 \\
 A_{32} &= 12(\delta_r/S) F^{10} \\
 A_{33} &= 18(9 - 22 F^2 + F^4) F^6 \\
 A_{34} &= 36(\delta_r/S)(4 - 6 F^2 + F^4) F^6 \\
 A_{35} &= 324 F^6, \quad A_{36} = 36(\delta_r/S)(4 + 7 F^2) F^4 \\
 A_{37} &= 324(\delta_r/S) F^4, \quad A_{41} = 3 F^{10} \\
 A_{42} &= (35 - 370 F^2 + 38 F^4) F^4 \\
 A_{43} &= 72(\delta_r/S) F^6 \\
 A_{44} &= 9(9 - 32 F^2 + 17 F^4) F^2 \\
 A_{45} &= 216(\delta_r/S) F^4, \quad A_{46} = 162 F^2 \\
 A_{51} &= 8(10 - 7 F^2) F^4, \quad A_{52} = 144 F^2 \\
 A_{61} &= 20 F^4, \quad A_{62} = 36 F^2
 \end{aligned} \tag{26}$$

ただし、 $\delta_r/S=100/(s-1)$ で $s=2.65$ に対しては $\delta_r/S=60.6$ 。

式 (25) は k の 12 次式であるので、この厳密解を解析的に求めることは不可能である。そこで本研究では 1 に比べて十分小さい無次元パラメーター S^2 または l^2 についての摂動法により解析近似解を求めた。

その計算結果は次のようである。

$(BS/m\pi D_0)^2 \ll 1$ の場合

卓越波長：

$$\frac{L}{B} = \frac{2}{m} \left[\frac{(10 + 19 F^2 + 7 F^4)(1 - F^2)}{-(5 + 8 F^2 + 5 F^4) + \sqrt{25 + 110 F^2 + 141 F^4 + 44 F^6 + 4 F^8}} \right]^{1/2} \tag{27}$$

$$\approx \frac{3.65}{m} \left(\frac{1}{F} + 0.9 F \right) \tag{28}$$

初期増幅率：

$$kc_I = \begin{cases} A_5(S/F^2) \{5 - (27/50)(m\pi D_0/B)^2(\delta_r/S) F^6\} \\ \text{for } F^2 \ll 1 \dots\dots\dots (29 \cdot a) \\ A_5(S/F^2) \{ (49/8) - (9/56)(m\pi D_0/B)^2(\delta_r/S)/F^2 \} \\ \text{for } F^2 \gg 1 \dots\dots\dots (29 \cdot b) \end{cases}$$

$(BS/m\pi D_0)^2 \approx 1$ の場合

卓越波長：

$$\frac{L}{B} = (2\sqrt{2}/m) [(18 - 10 F^2 + 7 F^4)/(9 + 5 F^2)]^{1/2} \tag{30}$$

初期増幅率：

$$kc_I = \begin{cases} A_5 S \{ (9/58) - (3 \cdot 903/107 \cdot 648)(m\pi D_0/B)^2 \\ \cdot (\delta_r/S) \} \text{ for } F^2 \ll 1 \dots\dots (31 \cdot a) \\ A_5(S/F^2) \{ (5/2) - (3 \cdot 713/1 \cdot 568)(m\pi D_0/B)^2 \\ \cdot (\delta_r/S)/F^2 \} \text{ for } F^2 \gg 1 \dots\dots (31 \cdot b) \end{cases}$$

$(BS/m\pi D_0)^2 \gg 1$ の場合

卓越波長：

$$\frac{L}{B} = (6/\sqrt{2\pi})(1/m^{3/2})(BS/D_0)^{1/2} \tag{32}$$

初期増幅率：

$$kc_I = A_5 S m^2 \pi^2 (BS/D_0)^{-2} \cdot \{1 - (4\sqrt{2}\pi m/3)(BS/D_0)^{-1}\} \tag{33}$$

4. 卓越蛇行波長

a) 理論結果

発生河床波の初期増幅率を与える式 (29), (31), (33) から、その初期増幅率はいずれもそのモード数 m に関係していることが注目される。すなわち、まず式 (29) からは、その初期増幅率は明らかに $m=1$ のときに最大となる。それは同式の { } の中の第 2 項が m が小さいほど小さくなることから明らかである。このことは $(BS/m\pi D_0)^2 \ll 1$ の場合において最も発生しやすい河床波は単列蛇行河床波であることを示している。このときの卓越波長(すなわち卓越蛇行波長)は式 (27) または式 (28) において $m=1$ とおいた次の式より与えられる。

$$\frac{L}{B} = 2 \left[\frac{(10 + 19 F^2 + 7 F^4)(1 - F^2)}{-(5 + 8 F^2 + 5 F^4) + \sqrt{25 + 110 F^2 + 141 F^4 + 44 F^6 + 4 F^8}} \right]^{1/2} \tag{34}$$

$$\approx 3.65 \left(\frac{1}{F} + 0.9 F \right) \tag{35}$$

$(BS/m\pi D_0)^2 \approx 1$ の場合には、式 (31) から、やはり m

=1 のときが初期増幅率が最大であり、最も発生しやすい河床波はやはり単列蛇行河床波であることがわかる。この場合の卓越波長、すなわち卓越蛇行波長、は式 (30) から次式のようになる。

$$\frac{L}{B} = 2\sqrt{2} \left[\frac{18 - 10F^2 + 7F^4}{9 + 5F^2} \right]^{1/2} \dots\dots\dots (36)$$

最後に、 $(BS/m\pi D_0)^2 \geq 1$ の場合には、式 (33) に認められるようにその初期増幅率には m^2 が同式中の { } にかかる係数として入っており、初期増幅率はモード数 m が1より大きいときに最大値をとる。このことから、この場合にはそのようなモード数の網状流路が最も形成されやすいものであることがわかる。

b) 理論と実験・実測値との比較

上述のように、発生河床波の初期増幅率において単列蛇行河床波 ($m=1$) は、

$$(BS/m\pi D_0)^2 \ll 1 \text{ と } (BS/m\pi D_0)^2 \approx 1$$

の場合に最も発生しやすいものであることがわかった。

したがって、単列蛇行波長に関する卓越蛇行波長式としては式 (34) または (35)、と式 (36) を用いればよいことになる。ここで、本研究で対象としている河川中流部から下流部にかけての沖積河川では流れの Froude 数 F は洪水時においてもほとんど $F \sim O(10^{-1})$ であることが知られている。したがって、このときには $(BS/m\pi D_0)^2 \ll 1$ となり、卓越波長式としては式 (34) またはその近似式 (35) を用いることができる。

一方、実験室内実験においては、流れの Froude 数は、 $F \sim O(1)$ であることより、この場合には $(BS/m\pi D_0)^2 \leq 1$ となり、したがって、実験室内実験データと比較する卓越波長式は式 (34) と式 (36) の両者である。

本理論結果を室内実験による交互砂州（単列蛇行河床波）のデータだけでなく、自然河川の蛇行波長との比較も行う。図-3 は蛇行河川の蛇行波長を示す。木下 (1961)²⁶⁾ や Charlton & Benson (1966)²⁷⁾ らの野外観測や室内実験による研究によれば、初めに直線であった河道が自由蛇行に発達してゆく過程は図-4 に示すようであって、この間その蛇行波長は、最初に直線河道の河床に形成された交互砂州の波長とほとんど変わらないものであることが示されている。本研究において、卓越波長式 (34) を自然河川の蛇行波長と直接比較するのはこのような理由に基づいている。

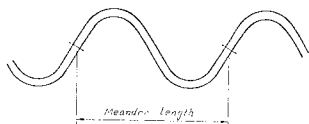


図-3 自由蛇行している河川の蛇行波長

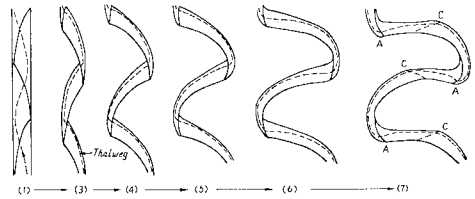


図-4 直線河道の自由蛇行への発達 (木下, 1961)²⁶⁾

なお、実際河川においては、河床形態の形成に関する流量を把握することが非常に難しいことから、式 (34) とデータとの比較にあたっては横座標および縦座標として幾何学的な量である水面幅 B と蛇行波長 L をとり、流量に関係される量である流れの Froude 数 F はパラメーターとして採用することとする。

このようにして示した比較が図-5 にみられる。実測データ〔文献 13), 28), 29), 30), 31), 32)〕はほとんど $F=0.1 \sim 1.0$ に対して理論により予測された範囲内にあり、理論式 (34) (ただし、ここでは近似式 (35) を用いた) とデータとの一致の度合は満足すべきものである。

次に、卓越波長式 (34) および (36) と室内実験データ〔文献 13), 26), 33), 34), 35), 36), 37)〕とを比較すると図-6 のようである。この図は、実験においては交互砂州形成時の流れの Froude 数 F が明確にわかっているため、 L/B と F との関係を示したものである。

同図には $(BS/m\pi D_0)^2 \ll 1$ のときの理論式 (34) と $(BS/m\pi D_0)^2 \approx 1$ のときの理論式を実線で、また、理論

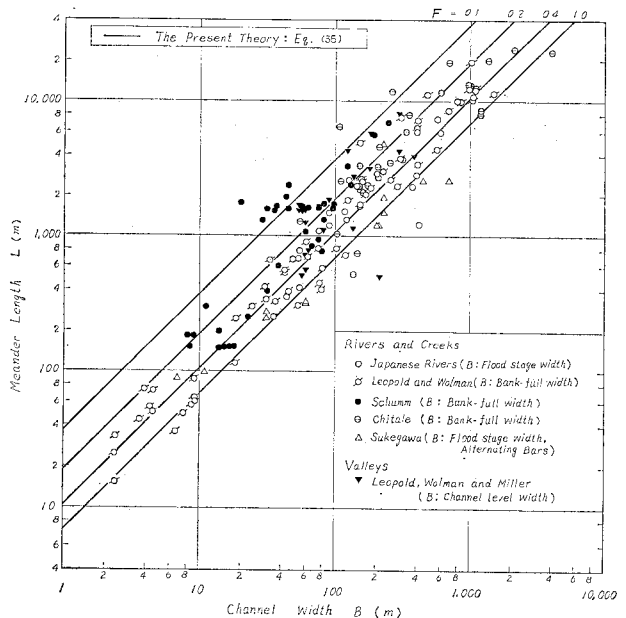


図-5 蛇行波長の実測値と理論値との比較

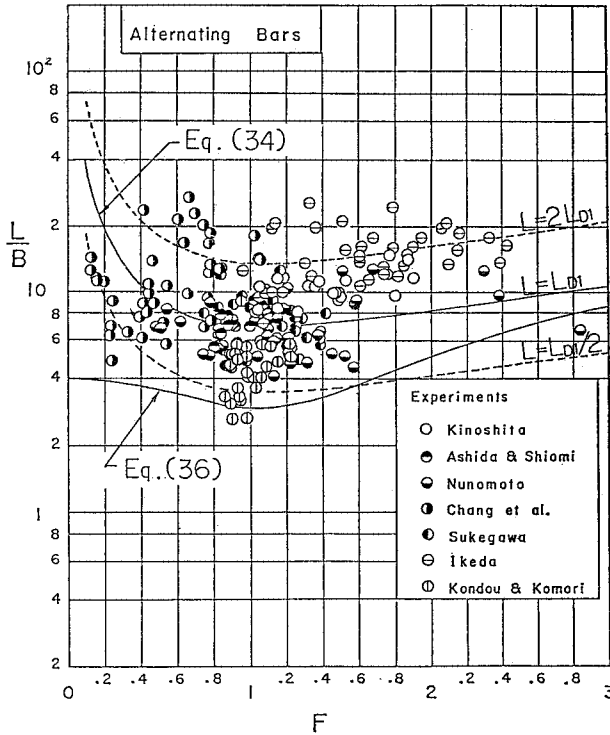


図-6 蛇行波長の実験値と理論値との比較

表-1 卓越蛇行波長の理論値

Froude 数 F	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.5	2.0	
L/B	式 (34)	36.9	19.0	10.5	8.1	7.2	6.9	7.2	8.1
	式 (36)	4.0	3.9	3.7	3.4	3.1	2.9	3.5	5.0
式 (34) の近似式 (35)	36.8	18.9	10.4	8.1	7.2	6.9	7.4	8.4	

式 (34) で与えられる波長 $L=L_{D1}$ の2倍および1/2倍の波長の線を破線で示してある。実験値は $F \approx 0.1 \sim 2.8$ の範囲にあり、同一の F の値に対して L/B の値はかなりのばらつきをみせているが、実験値の大部分は $L=2L_{D1}$ と $L=L_{D1}/2$ の間に収まっており、この範囲からかなり外れているのは $F=0.6 \sim 0.8$ の間の Chang らの8個のデータと $F=1.1 \sim 2.2$ の間の池田 (宏) のデータの一部となっている。この外れていることの原因は次のように考えられる。

1) $F=0.41 \sim 0.79$ の間の Chang らの実験は $s=1.80$, $d_{50}=0.68$ mm の膨張粘土 (expanded clay) を使用して行われたものである。その粒子は扁平であり、その1ステップの移動距離 l_s は、球形に近い粒子を念頭において立てられた本理論の l_s とはかなり異なったものとなっているはずである。このためこの粒子についての d_{gr} の値が本理論で用いた式 (8) による値からかなり隔たったものとなり、この影響が L/B の値についてかなりの相違の原因と考えられる。図-6 中には $F=$

0.13~0.54 の間に $s=1.05$, 直径 1/8 in, 長さ 1/8 in のプラスチック粒子による実験値, および $F=0.61 \sim 1.06$ の間に $s=2.65$, $d_{50}=0.69$ mm の普通砂でなされた実験値もプロットされているが、それらのすべての値が $L=2L_{D1}$ と $L=L_{D1}/2$ の間に入っていることからしても上述のように考えられるのである。

2) 池田の実験は $d_{50}=0.55$ mm および $d_{50}=0.33$ mm の普通砂により行われたものであり、90分以上一定流量を流し、十分発達した交互砂州の波長を求めたものである。この実験では最も長い波長と短い波長の比は6倍にもなり、形成される交互砂州の長さは変動範囲が広く、ある条件に対応する特定の交互砂州長というものは簡単には決定し得ないものである、と著者は述べている。図-6 にプロットした池田の実験値 L は池田の論文の表中に記載されている値をそのまま用いたものであるが、これを L_{50} の値と考えれば、 L の値としてはこの値の周りにある程度の幅をもたせて考えてもよいように思われる。本理論のように線形理論で記述される3次元河床波がいったん発生すると、これはしだいに波高を増し、波形は非線形性を強めながら発達してゆく。そしてこの非線形性のために初めの波長はしだいに伸び、このことは $F > 1$ の Froude 数の範囲で特に著しく、これが池田のデータの一部分が本線形理論による予測値より大きく出ていることの原因であると考えられるが、この点についての定量的な検討はさらに今後の研究に待たねばならない。

以上のように考えると、ともかく、理論式 (34) あるいは (35) は全体のデータの平均的な傾向を示しており、また、 $(BS/m\pi D_s)^2 \approx 1$ のときの理論式 (36) はデータの下限を示しているといえることができる。

そこで、卓越波長式 (34) と (36) による L/B の理論値を示すと表-1 のようになる。

この表あるいは図-6 から、卓越蛇行波長は $F < 1.0$ の範囲では Froude 数の増加に伴って単調減少し、 $F=1.0$ で最小値をとり、 $F > 1.0$ では Froude 数の増加に伴って単調増加することがわかる。また、表-1 に式 (34) の近似式 (35) も併せて示したが、表からわかるように同式は近似式として妥当な結果を与えている。

ここで、今までに提案されている蛇行波長に関する種類の公式を取りまとめると表-2 のようである。

本研究の式 (34) およびその近似式 (35) と式 (36) はともに表-2 の $L=K_2 B^{n_2}$ 型に属しており、本理論式は $n_2=1.0$, $K_2=\text{func.}(F)$ とした場合に相当する。そして本理論により、この経験定数 K_2 の物理的内容を知

表-2 従来の蛇行波長公式の一覧

公 式	提 案 者
$L = K_1 Q^{n_1}$ $n_1 = 0.34 \sim 0.67$	Inglis (1938, 49) ^{38), 39)} , Dury (1965) ⁴⁰⁾ , Carlston (1965) ⁴¹⁾ , Schumm (1967, 69) ^{42), 43)} , Ackers & Charlton (1970 a, 1970 b) ^{43), 44)} , Ferguson (1975) ⁴⁵⁾ , et al.
$L = K_2 B^{n_2}$ $n_2 = 0.98 \sim 1.27$	Inglis (1938, 49), Leopold & Wolman (1957, 60) ^{30), 31)} , Speight (1965) ⁴⁶⁾ , Zeller (1967) ⁴⁷⁾ , Yalin (1971) ⁴⁸⁾ , 移動床小委員会 (JSCE Task Committee, 1973) ²³⁾ , Ferguson (1975) ⁴⁵⁾ , et al.
$\frac{L}{d} = K_3 \left(\frac{Q^b}{g d^5} \right)^{n_3}$ $n_3 = 0.186 \sim 0.279$	Charlton & Benson (1966) ²⁷⁾ , Ackers & Charlton (1970 a, 70 b) ^{43), 44)} , 増田ら (1974) ⁴⁹⁾
$\frac{L}{\sqrt{BD_0}} = K_4 F^{1/2}$	藤芳 (1949) ⁵⁰⁾ , Anderson (1967) ⁵¹⁾ , 林 (1973) ⁷⁾ , Parker (1976) ¹⁷⁾
$L = \frac{2BF}{\sqrt{K_5 - F^2}}$	Werner (1961) ⁵²⁾
$\frac{LS}{D_0} = K_6 F^2$	Hansen (1967, $K_6 = 2.25 \pi^{10}$) 林・尾崎 (1974, $K_6 = \pi$) ¹⁵⁾
$\frac{LS}{D_0} = K_7 F$	池田・日野・吉川 (1976, $K_7 = \sqrt{6} \pi$) ³³⁾

* $K_1 \sim K_3$: 経験定数

ることができたわけである。また、自然河川では、水面幅 B の Q^b であると考え、指数 b の値に Leopold & Maddock (1953)⁵⁴⁾ による $b=0.50$ 、あるいは Brush (1961)⁵⁵⁾ による $b=0.55$ を用いると、本理論式は、

$$L \propto \text{func.}(F) Q^{0.50 \sim 0.55} \propto Q^{0.50 \sim 0.55} \dots \dots \dots (37)$$

となる。したがって、自然河川に適用する場合の本理論式は $L = K_1 Q^{n_1}$ 型にも書き直せることがわかる。

5. 各種位相差と河床の不安定性

河床の不安定性は 3. の式 (24) により定量的に把握することができる。この式の中に入っているパラメータは流れに関係するものとして F と S 、河床波の波長と複列次数に関係するものとして k と l 、このほかに局所せん断力からの局所流砂量の遅れ距離の無次元値 δ_r の5個だけである。しかし、遅れ距離としてはこの δ_r のほかに、 $u, v, \xi, \tau_x, \tau_y, G_x, G_y$ がいずれも河床波形に対してもつ x 方向の遅れ距離 $\delta_u, \delta_v, \delta_\xi, \delta_{\tau_x}, \delta_{\tau_y}, \delta_{G_x}, \delta_{G_y}$ がある。これらを河床波形に対する x 方向の位相の進みで書き表わしたものをそれぞれ $\theta_u, \theta_v, \theta_\xi, \theta_{\tau_x}, \theta_{\tau_y}, \theta_{G_x}, \theta_{G_y}$ とおくと、

$$\theta_u = k\delta_u, \theta_v = k\delta_v, \theta_\xi = k\delta_\xi, \dots, \dots \dots (38)$$

と書き表わされる。これらの位相の符号は、いずれもその遅れ距離を生ずるだけの位相の進みを正とする。これらの諸量は、基本式で記述される現象の結果として現われる量であって、現象の系に関係する遅れ距離あるいは位相差として独立な量は δ_r あるいは θ_δ だけである。このように、 $\theta_u, \theta_v, \theta_\xi, \theta_{\tau_x}, \theta_{\tau_y}, \theta_{G_x}, \theta_{G_y}$ はいずれも

現象の系における従属変数であるが、これらの量と河床の安定性との関係を調べることは河床安定性の細部機構を理解するうえで必要なことである。そこで、いま式 (19) と (21) とを式 (18) に代入すると次式を得る。

$$k c_I = 6 A_S \frac{u_0}{\eta_0} k \left[\sin(\theta_u - k\delta_r) - \frac{1}{6} \frac{v_0}{u_0} \frac{l}{k} \cos \theta_v \right] \dots \dots \dots (39)$$

この式から、中規模河床波の発生条件は

$$\sin(\theta_u - k\delta_r) - \frac{1}{6} \frac{v_0}{u_0} \frac{l}{k} \cos \theta_v > 0 \dots \dots \dots (40)$$

で与えられることがわかる。小規模河床形態においては $v_0=0$ のため、式 (40) の左辺の第2項が0となるから河床の安定性は $\theta_u - k\delta_r$ の値のみに支配されるが、中規模河床形態ではこのほかに左辺第2項も寄与することになるわけである。式 (40) 中の $\theta_u, v_0/u_0$ および θ_v は、前報²³⁾の解析で求められており下に記すようである。また、後の考察で必要となる θ_ξ についての前報²³⁾の解析結果も下に併せて記す。

$$\frac{v_0}{u_0} = \left\{ \frac{\Delta_v R^2 + \Delta_v I^2}{\Delta_u R^2 + \Delta_u I^2} \right\}^{1/2} \dots \dots \dots (41)$$

$$\theta_u = \arctan \left\{ \frac{\Delta_u I \Delta_{44} R - \Delta_u R \Delta_{44} I}{\Delta_u R \Delta_{44} R + \Delta_u I \Delta_{44} I} \right\} \dots \dots \dots (42)$$

$$\theta_v = \arctan \left\{ \frac{\Delta_v I \Delta_{44} R - \Delta_v R \Delta_{44} I}{\Delta_v R \Delta_{44} R + \Delta_v I \Delta_{44} I} \right\} \dots \dots \dots (43)$$

$$\theta_\xi = \arctan \left\{ \frac{\Delta_\xi I \Delta_{44} R - \Delta_\xi R \Delta_{44} I}{\Delta_\xi R \Delta_{44} R + \Delta_\xi I \Delta_{44} I} \right\} \dots \dots \dots (44)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{uR} &= (k^2 - l^2) S, & \Delta_{uI} &= k^3 F^2 \\ \Delta_{vR} &= -k^2 l F^2, & \Delta_{vI} &= 3 k l S \\ \Delta_{\xi R} &= -4 k^2 S F^2, & \Delta_{\xi I} &= k(3 S^2 - k^2 F^4) \dots \dots (45) \\ \Delta_{44R} &= \{k^2(1 - 4 F^2) + 2 l^2\} S \\ \Delta_{44I} &= k[\{k^2(1 - F^2) + l^2\} F^2 + 3 S^2] \end{aligned} \right\}$$

そこで、これらの結果に基づいて θ_u, θ_v および θ_ξ の大きさについて考察を行う。式 (45) を式 (41) ~ (44) に代入すると次式を得る。

$$\frac{v_0}{u_0} = a \left\{ \frac{F^4 + 9 a^2}{F^4 + (1 - a^2)^2 (S/k)^2} \right\}^{1/2} \dots \dots \dots (46)$$

$$\theta_u = \arctan (M_u/N_u) = \text{arccot} (N_u/M_u) \dots \dots (47)$$

$$M_u = k^6 [F^2 \{1 - 4 F^2 + 2 a^2 + (a^2 - 1) \cdot (1 - F^2 + a^2)\} (S/k) - 3(1 - a^2) (S/k)^3] \dots \dots \dots (48)$$

$$N_u = k^6 [F^4 (1 - F^2 + a^2) + \{1 - a^2\} \cdot (1 - 4 F^2 + 2 a^2) + 3 F^2] (S/k)^2 \dots \dots (49)$$

$$\theta_v = \arctan (M_v/N_v) = \text{arccot} (N_v/M_v) \dots \dots (50)$$

$$M_v = k^6 [F^4 a (1 - F^2 + a^2) + 3 a (1 - 3 F^2 + 2 a^2) (S/k)^2] \dots \dots (51)$$

$$N_v = k^6 [F^2 a (2 + F^2 + a^2) (S/k) + 9 a (S/k)^3] \dots \dots \dots (52)$$

$$\theta_\xi = \arctan (M_\xi/N_\xi) = \text{arccot} (N_\xi/M_\xi) \dots \dots (53)$$

$$M_{\xi} = k^6 [F^4(3+4a^2)(S/k) + (3+2a^2)(S/k)^2] \dots\dots\dots(54)$$

$$N_{\xi} = k^6 [-F^6(1-F^2+a^2) - F^2(1-10F^2+5a^2)(S/k)^2 + 9(S/k)^4] \dots\dots\dots(55)$$

ただし、 $a=l/k=mL/2B \dots\dots\dots(56)$

式 (47), (50), (53) を満足する θ の値は関数 \arctan の周期性のゆえに無限個あり、 $-\pi \leq \theta \leq \pi$ の範囲で各 2 個ずつあるが、本場合にはこのうち次の範囲にある値、したがって 1 個だけとればよいことは明らかである。すなわち、

$$\theta = \arctan \frac{M}{N} = \operatorname{arccot} \frac{N}{M}$$

の θ の存在範囲は

$$\left. \begin{array}{l} M \leq 0, N \leq 0 \text{ のとき } -\pi \leq \theta \leq -\frac{\pi}{2} \\ M \leq 0, N \geq 0 \text{ のとき } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0 \\ M \geq 0, N \geq 0 \text{ のとき } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ M \geq 0, N \leq 0 \text{ のとき } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \end{array} \right\} \dots\dots\dots(57)$$

そこで、まず θ_v の値について考えてみると、一般的に $S/k \ll 1$ であることを考慮し、 S/k についての高次のべき項を無視すると、式 (51) および (52) から

$$1 - F^2 + a^2 \geq 0 \text{ のとき } M_v \geq 0 \text{ (複号同順)} \dots\dots\dots(58)$$

$$F \text{ の値に関せず } N_v > 0 \dots\dots\dots(59)$$

よって、式 (57) から

$$F \text{ の値に関せず } -\frac{\pi}{2} < \theta_v < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{したがって } \cos \theta_v > 0 \dots\dots\dots(60)$$

このことから、式 (39) 右辺第 2 項は F の値のいかんに関せず常に河床攪乱の減衰に寄与するものであることがわかる。

次に θ_u については、式 (48) および (49) から、やはり $S/k \ll 1$ の関係を考慮すると次式を得る。

$$1 - 4F^2 + 2a^2 + (a^2 - 1)(1 - F^2 + a^2) > 0 \text{ のとき } M_u > 0 \dots\dots\dots(61)$$

$$1 - F^2 + a^2 > 0 \text{ のとき } N_u > 0 \dots\dots\dots(62)$$

そこで、式 (61) と (62) が成り立つ範囲の F, k, l の組合せの系に対しては式 (57) から

$$0 < \theta_u < \frac{\pi}{2}, \text{ よって } \sin \theta_u > 0 \dots\dots\dots(63)$$

したがって、式 (39) 右辺第 1 項の中の θ_u が河床波の発生に寄与するものであることがわかる。また、同項中の $k\delta_r$ は θ_u の値を差し引く形で入っており、これは河床の安定化に寄与する因子であることがわかる。

さらに、 θ_{ξ} については、 $S/k \ll 1$ の関係を考慮すると式 (54) および (55) から

$$F \text{ の値に関せず } M_{\xi} > 0 \dots\dots\dots(63 \cdot a)$$

$$1 - F^2 + a^2 \geq 0 \text{ に対して } N_{\xi} \leq 0 \text{ (複号同順)} \dots\dots\dots(64)$$

よって

$$1 - F^2 + a^2 > 0 \text{ に対して } \frac{\pi}{2} < \theta_{\xi} < \pi \dots\dots\dots(65)$$

$$1 - F^2 + a^2 < 0 \text{ に対して } 0 < \theta_{\xi} < \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots(66)$$

であることがわかる。

そのほか、 $\theta_{rx}, \theta_{ry}, \theta_{Gx}, \theta_{Gy}$ と $\theta_u, \theta_v, \theta_{\xi}$ との間には次の関係が存在する。まず式 (11) の第 7 式より明らかに

$$\theta_{rx} = \theta_u \dots\dots\dots(67)$$

$$\text{および } \theta_{ry} = \theta_v \dots\dots\dots(68)$$

また、式 (11) の第 5 および第 6 式よりそれぞれ

$$\theta_{Gx} = \theta_{rx} - \theta_{\delta} = \theta_{rx} - k\delta_r \dots\dots\dots(69)$$

$$\theta_{Gy} = \theta_v \dots\dots\dots(70)$$

を得る。そこで、式 (67), (69) および (70) を使用すると、式 (39) は次のように書くことができる。

$$kc_l = 6 A_S \frac{u_0}{\gamma_0} k \left(\sin \theta_{Gx} - \frac{1}{6} \frac{v_0}{u_0} a \cos \theta_{Gy} \right) \dots\dots\dots(71)$$

したがって、河床面の 3 次元的攪乱に対する安定性をこの式で解釈すれば、河床面の不安定性に寄与するものが θ_{Gx} であり、安定性に寄与するものが θ_{Gy} であるということが出来る。

本研究では流れが shallow water flow とみなしてもよい中規模河床波の場合について取り扱ったのであるが、本理論は shallow water flow の前提が成り立たなくなる小規模河床波の場合に対しては使用することができない。小規模河床波の増幅機構として重要な影響を与えるものが θ_{ξ} であることを考えると、 θ_{ξ} と θ_u との関係を結ぶ式 (9) の第 1 式の理論的精度が小規模河床波の場合には不十分となる。このため本理論では、小規模河床波については、河床攪乱に対する θ_{ξ} が正しく求められず、 $F < 1$ の場合の攪乱は発達せず常に安定化に向かうという不合理な結果を生ずることになる。したがって、中規模河床波と小規模河床波の発生を統一的に取り扱うためには流速分布を考慮したせん断流理論によることが必要となり、これについては今後さらに研究を進めていくつもりである。

6. 結 論

水深に比べて河床波の波長が長く、流速は鉛直方向には変化しないとする shallow water 流れの仮定を用い、

中規模河床波の発生に関して河床安定理論の立場からの研究を行い、その発生機構を明らかにするとともに中規模河床形態の形状特性のうち卓越波長を定式化しそれに最も関係する水理量を明らかにした。本研究の結果得られたおもな結論は次のようである。

(1) 中規模河床波の発生増幅率は式(71)で表わされる。河床波形に対する x 方向局所流砂量成分 G_x の位相の進み、言い換えれば遅れ距離、が河床面の不安定化に貢献し、 y 方向流砂量成分 G_y の x 方向の位相の進み、すなわち x 方向の距離的な遅れ、が安定化に寄与する。

(2) 中規模河床波の発生増幅率は式(39)のようにも書き表わされる。河床波形に対する x 方向流速成分の位相の進み θ_u が河床面の不安定化に貢献し、粒子の1ステップ長に等しい大きさの遅れ距離 δ_{gr} と v の x 方向の位相の進み、すなわち x 方向の距離的な遅れ、が安定化に貢献する。

(3) 中規模河床波の卓越波長は、河床安定理論からはその初期増幅率が極大となるものとして、式(25)を解くことにより求められる。その無次元波数 k を記述する外部的パラメーターは、本理論においては、 F 、 S 、 B/mD_0 および δ_{gr} となっている。 $m=1$ の河床波が交互砂州、2以上の整数の m に対する河床波が複列砂州、あるいはうろこ状砂州といってもよい、にあたる。 F 、 S および δ_{gr} の値を変化させずに B/D_0 の値のみを2倍、3倍、…と整数倍に変化させてゆくときには、その水路中に発生するそれぞれ $m=2, 3, \dots$ の複列砂州の L/D の理論値が相互に等しくなる。

(4) 中規模河床波の初期増幅率は $(BS/m\pi D_0)^2 \ll 1$ の場合には式(29・a, b)で、 $(BS/m\pi D_0)^2 \approx 1$ の場合には式(31・a, b)で、また $(BS/m\pi D_0)^2 \gg 1$ の場合には式(33)で表わされる。式(29・a, b)および(31・a, b)は、同一の F 、 S 、 δ_r 、 B/D_0 の値に対してはモード数 m が小さいほど初期増幅率が大きくなることを示しており、これらの場合には交互砂州が最も発生しやすいものであることを示している。他方、式(33)で与えられる初期増幅率は、同一の S 、 B/D_0 および δ_{gr} の値について m が1より大きいある特定の値に対して極大となり、この場合にはその次数のうろこ状砂州が最も発生しやすいものであることを示している。

これらの式に示されているように、モードによる初期発生増幅率の値の不等は $\delta_{gr} \approx 0$ であるために生じているものである。

(5) 木下らにより示された蛇行波長はほぼ交互砂州の波長に等しいという経験的事実に基づき、長方形断面で直線状の水路中に発生する交互砂州の波長を河床面の安定解析により求めた。得られた蛇行波長は $(BS/m\pi D_0)^2 \ll 1$ の場合には式(34)あるいは(35)であり、

また $(BS/m\pi D_0)^2 \approx 1$ のときには式(36)である。

式(35)と自然河川のデータとの比較、および式(34)、(36)と室内実験による交互砂州に関するデータとの比較をそれぞれ図-5および図-6に示した。 $F < 1$ の自然河川の場合には一致の度合は満足すべきものである。しかし $F > 1$ のデータが多い実験室実験との比較ではばらつきがかなりあるが、卓越波長の2倍および1/2倍の範囲内には大部分のデータが収まっていることから、 $F > 1$ の場合のデータに対する理論の適合性はある程度満足すべきものであると考えられる。

謝辞：本研究の遂行中には木下良作博士より種々有益な討議をいただいた。ここに記して深甚なる謝意を表する。

なお、本論文は著者の一人(尾崎)の学位論文(中央大学)の一部を取りまとめて作成したものである。

参考文献

- 1) 木下良作：河床における砂礫堆の形成について，土木学会論文集，第42号，pp. 1~21, 1957.
- 2) 木下良作：石狩川河道変遷調査一参考編一，科学技術庁資源局資料，第36号，p. 174, 1962.
- 3) Kennedy, J.F.: The mechanics of dunes and antidunes in erodible bed channels, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 16, part 4, pp. 521~544, 1963.
- 4) Reynolds, A.J.: Waves on the erodible bed of an open channel, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 22, part 1, pp. 113~133, 1965.
- 5) 林 泰造・川上克巳：移動床に生ずる二、三の不安定現象，土木学会第13回水理講演会講演集，pp. 109~116, 1969.
- 6) 林 泰造：河川蛇行の成因についての研究，土木学会論文報告集，第180号，pp. 61~70, 1970.
- 7) Hayashi, T.: On the cause of meandering of rivers, IAHR Symposium on River Mechanics, Bangkok, Vol. 1, pp. 667~678, 1973.
- 8) 黒木幹男・岸 力・荒井信行：砂州河床の発生限界と流れの特性，土木学会第32回年次学術講演会講演概要集II-232, pp. 448~449, 1977.
- 9) 黒木幹男・岸 力：砂州河床の発生限界について，土木学会第33回年次学術講演会講演概要集II-420, pp. 812~813, 1978.
- 10) Hansen, E.: On the formation of meanders as a stability problem, Hydraulic Laboratory, Technical Univ. of Denmark, Basic Research Progress Report No. 13, pp. 9~13, 1967.
- 11) Callander, R.A.: Instability and river channels, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 36, part 3, pp. 465~480, 1969.
- 12) 鮎川 登：河川蛇行の発生限界に関する研究，土木学会論文報告集，第181号，pp. 66~76, 1970.
- 13) 鮎川 登：直線河道における蛇行現象に関する水理学的研究，科学技術庁資源調査所資料，p. 427, 1971.
- 14) 樺東一郎・渡辺訓甫・定村寛文：砂れき堆の形成について，土木学会第26回年次学術講演会講演概要集II-68, pp. 185~188, 1971.
- 15) 林 泰造・尾崎幸男：河川蛇行の成因と卓越蛇行波長，土木学会第29回年次学術講演会講演概要集II-121, pp. 269~270, 1974.

- 16) 林 泰造・尾崎幸男：河床安定理論の立場からみた河川蛇行の卓越波長について，土木学会第20回水理講演会論文集，pp. 89~96, 1976.
- 17) Parker, G. : On the cause and characteristic scales of meandering and braiding in rivers, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 76, part 3, pp. 457~480, 1976.
- 18) Fredsøe, J. : Meandering and braiding of rivers, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 84, part 4, pp. 609~624, 1978.
- 19) Engelund, F. and O. Skovgaard : On the origin of meandering and braiding in alluvial streams, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 57, part 2, pp. 289~302, 1973.
- 20) Einstein, H.A. : The bed-load function for sediment transportation in open channel flows, *Technical Bulletin No. 1026*, U.S. Dept. of Agric., Washington, D. C., 1950.
- 21) 林 泰造・尾崎幸男：掃流砂量に関する基礎的研究，土木学会第23回水理講演会論文集，pp. 157~167, 1979.
- 22) Hayashi, T. and S. Ozaki : Formation of alternating bars and braids, "Application of Stochastic Processes in Sediment Transport" edited by H.W. Shen and H. Kikkawa (Water Resources Publications), Chapter 7, pp. 7.1~7.40, 1978.
- 23) 土木学会 水理委員会 移動床流れの抵抗と河床形状研究小委員会：移動床流れにおける河床形態と粗度，土木学会論文報告集，第210号，pp. 65~91, 1973.
- 24) Brown, C.B. : *Engineering Hydraulics*, edited by H. Rouse, John Wiley & Sons, p. 796, 1950.
- 25) Rubey, W.W. : Settling velocities of gravel, sand and silt particles, *Amer. Journ. Science*, 5th series, Vol. 25, No. 148, pp. 325~338, 1933.
- 26) 木下良作：石狩川河道変遷調査，科学技術庁資源局資料，第36号，p. 138, 1961.
- 27) Charlton, F.G. and R.W. Benson : Effect of discharge and sediment charge on meandering of small streams in alluvium, *Hydraulic Research Station, Wallingford*, pp. 285~290, 1966.
- 28) Schumm, S.A. : River metamorphosis, *Proc. ASCE*, HY 1, pp. 255~273, 1969.
- 29) Chitale, S.V. : River channel patterns, *Proc. ASCE*, HY 1, pp. 201~221, 1970.
- 30) Leopold, L.B. and M.G. Wolman : River channel patterns : braided, meandering, and straight, *U.S. Geological Survey Prof. Paper No. 282-B*, pp. 39~85, 1957.
- 31) Leopold, L.B. and M.G. Wolman : River meanders, *Bulletin of the Geological Society of America*, Vol. 71, pp. 769~794, 1960.
- 32) Leopold, L.B., M.G. Wolman and J.P. Miller : *Fluvial processes in Geomorphology*, W.H. Freeman and Company, p. 522, 1964.
- 33) 芦田和男・塩見靖国：水路における砂礫堆の水理特性について，京大防災研年報第9号，pp. 457~477, 1966.
- 34) 布本 博：河川蛇行性の研究，中央大学修士論文，1967.
- 35) Chang, H.Y., D.B. Simons and D.A. Wolhiser : Flume experiments on alternating bar formation, *Proc. ASCE*, WW 1, pp. 155~165, 1971.
- 36) 池田 宏：実験水路における砂礫堆とその形成条件，地理学評論，No. 46-7, pp. 435~451, 1973.
- 37) 近藤幸雄・小森保数：交互砂州に関する基礎的実験，北海道開発局土木試験所月報，No. 251, pp. 1~10, 1974.
- 38) Inglis, C.C. : The relationship between meander belts, distance between meanders on axis of stream width and discharges of rivers in flood plains and incised rivers, *Central Board of Irrigation, India, Annual Report (Technical)*, L. 49, 1938-39.
- 39) Inglis, C.C. : The behaviour and control of rivers and canals, *Central Waterpower Irrigation and Navigation Research Sta., Poona, India, Research Pub. 13*, pt. 1, p. 298, 1949.
- 40) Dury, G.H. : Theoretical implications of underfit streams—General theory of meandering valleys, *U.S. Geological Survey Prof. Paper 452-C*, p. 43, 1965.
- 41) Carlston, C.W. : The relation of free meander geometry to stream discharge and its geomorphic implication, *Amer. J. Sci.*, 263, pp. 864~885, 1965.
- 42) Schumm, S.A. : Meander wavelength of alluvial rivers, *Science*, 157, pp. 1549~1550, 1967.
- 43) Ackers, P. and F.G. Charlton : Dimensional analysis of alluvial channels with special reference to meander length, *Journ. Hydraulic Research, Internat. Assoc. for Hydraulic Research*, Vol. 8, No. 3, pp. 287~316, 1970 a.
- 44) Ackers, P. and F.G. Charlton : Meander geometry arising from varying flows, *Journ. Hydrology*, Vol. 11, pp. 230~252, 1970 b.
- 45) Ferguson, R.I. : Meander irregularity and wavelength estimation, *Journ. Hydrology*, Vol. 26, pp. 315~333, 1975.
- 46) Speight, J.G. : Meander spectra of the Angabunga River, *Journ. Hydrology*, Vol. 3, pp. 1~15, 1965.
- 47) Zeller, J. : Meander channels in Switzerland, *Internat. Assoc. Sci. Hydrology Symposium on River Morphology, Bern, Publ. No. 75*, pp. 174~186, 1967.
- 48) Yalin, M.S. : On the formation of dunes and meanders, *Proc. 14th IAHR Congress, Parris*, Vol. 3, pp. 101~108, 1971.
- 49) 増田 隆・上月 晃・後藤 哲：護岸根固工に関する調査研究，北海道開発局土木試験所月報 No. 253, pp. 1~15, 1974.
- 50) 藤芳義男：河川の蛇行と災害，佐々木図書，p. 250, 1949.
- 51) Anderson, A.G. : On the development of stream meanders, *Proc. 12th IAHR Congress*, Vol. 1, pp. 370~378, 1967.
- 52) Werner, P.W. : On the origin of river meanders, *Trans. Amer. Geophy. Union*, Vol. 32, No. 6, pp. 898~902, 1961.
- 53) 池田駿介・日野幹雄・吉川秀夫：河川の自由蛇行に関する理論的研究，土木学会論文報告集，第255号，pp. 63~73, 1976.
- 54) Leopold, L.B. and T. Maddock Jr. : The hydraulic geometry of stream channels and some physiographic implications, *U.S. Geological Survey Prof. Paper 252*, p. 56, 1953.
- 55) Brush, L.M. Jr. : Drainage basins, channels and flow characteristics of selected streams in Central Pennsylvania, *U.S. Geological Survey Prof. Paper 282 F*, pp. 145~181, 1961.