

吊 橋 架 設 系 の 近 似 解 法

AN APPROXIMATE SOLUTION OF SUSPENSION BRIDGE
UNDER CONSTRUCTION

岩 城 康 雄*

By Yasuo IWAKI

1. ま え が き

近年、有限変位理論による吊橋の解析法は各界で研究開発され、本州四国連絡橋をはじめとする大型プロジェクトの実施計画に広く利用されている（たとえば文献 1)～5)）。特に架設計画の解析計算において、その精度、信頼性、実用性および応用の面で十分その機能を全うしており、一応完成の域に達したものと思われる。

一般に、これらの解析法のほとんどは、離散化モデルについての変位法に基づいてマトリックス表示し、大型電子計算機の機能を有効に利用しているので、いったんインプットすれば比較的短時間で計算し図形表示してくれる。しかしながら、その前段階であるインプットまでの作業などかなりの時間と労力を要すること、更にまた多くのパラメーターを変化させて定性的、定量的に構造物の力学特性について検討を要する基本設計の段階においては、多くの時間と費用を消費せざるを得ないことになる。このような段階では、精度よりも吊橋性状の概要を把握することが必要な場合が多い。その意味では、まず机上でパーソナルコンピューターなどを利用し、担当技術者自らでも簡単にプログラミングでき、計算機との対話形式による試行錯誤の繰返しを簡易に実施することが賢明であると考えられる。そしてまず可能な架設工法についてその性状の概要を把握し、ある程度の結論を見出してから、最終的に有限変位理論などにより精算を行うのが望ましいと思われる。

以上の主旨からすれば、撓度理論をいま一度見直すことも解決の一手段と思われる。撓度理論による解法は、完成系では従来から比較的厳密な解あるいは線形解が数多くの文献でみられ、今日でも設計段階で多用されているが^{6)～8)}、架設系のうち特に補剛桁の曲げ剛性を考慮した逐次剛結法のような場合については、文献 9)、10) を

除いてはあまり見受けられず、しかもかなりの計算手数を要するようになる。

本研究は、撓度理論を拡張し、特に架設系におけるケーブルの鉛直大変形および水平変位を考慮に入れ、更にこれを積分可能にするための仮定を設けて、簡単な実用的近似解を求める一つの手法を提案したものである。更に標準的な吊橋を取り上げ、その架設基本計画立案時に、本解法が通常の架設工法、架設順序等の適正化のための検討などに適用できることを示した。

2. 水平張力の基本式

(1) ケーブルのつり合い方程式

吊橋の完成系から、除荷により得られる架設系のある段階におけるケーブルの変形を考えよう。そのときのケーブル微小要素は、図-1 に示す状態にあるものとする。

いま、完成系のケーブルにかかる総死荷重を w_d 、変形後（架設系）の位置におけるケーブルの全鉛直分布荷重を q_v 、そのときの全水平張力を H として、ケーブルの微小要素のつり合い条件から q_v を求めると次のとおりになる¹¹⁾。

$$q_v(x+\xi, y+\eta) = -H \cdot \left[\frac{\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2\eta}{dx^2}}{\left(1 + \frac{d\xi}{dx}\right)^2} - \frac{\frac{dy}{dx} + \frac{d\eta}{dx}}{\left(1 + \frac{d\xi}{dx}\right)^3} \cdot \frac{d^2\xi}{dx^2} \right]$$

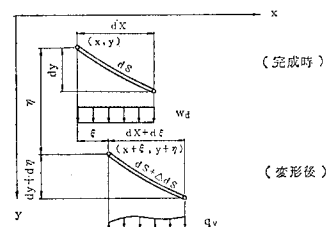


図-1 ケーブル要素

* 正会員 三井造船(株)本社鉄構土木事業本部技師長

$$-\frac{dH}{dx} \cdot \frac{\frac{dy}{dx} + \frac{d\eta}{dx}}{\left(1 + \frac{d\xi}{dx}\right)^2}$$

いま、 H は橋軸方向に一定であると仮定すれば、 $\frac{dH}{dx}=0$ 、また完成系の座標に関するケーブルの鉛直分布荷重を \bar{q}_v とすれば、 $\bar{q}_v dx = q_v(dx + d\xi)$ でなければならないから、

$$\bar{q}_v(x) = -H \left[\frac{\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2\eta}{dx^2}}{1 + \frac{d\xi}{dx}} - \frac{\frac{dy}{dx} + \frac{d\eta}{dx}}{\left(1 + \frac{d\xi}{dx}\right)^2} \cdot \frac{d^2\xi}{dx^2} \right] \dots\dots\dots (1)$$

ここで撓度理論で常用されている Melan の基礎方程式⁶⁾から導いたものは、上式において $\frac{d\xi}{dx}=0$ 、 $\frac{d^2\xi}{dx^2}=0$ であり、次のような慣用の式が得られる。

$$\bar{q}_v = -H \left(\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2\eta}{dx^2} \right) \dots\dots\dots (1)'$$

次にケーブル全体系のつり合い条件から、

$$\eta = \frac{\mathfrak{M}(x)}{H} - y = \frac{\mathfrak{M}_P - H_P y}{H} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $\mathfrak{M}(x)$ はケーブルに作用する鉛直荷重による全モーメントを表わし、 H_P 、 \mathfrak{M}_P はそれぞれ完成系からの水平張力およびモーメントの変化分を示す。

(2) ケーブルの適合条件

ケーブルの微小要素について、図-1 に示すとおり変形前後の関係から

$$ds = (dx^2 + dy^2)^{1/2}$$

$$(ds + \Delta ds)^2 = (dx + d\xi)^2 + (dy + d\eta)^2$$

ここに、 Δds はケーブルの応力および温度変化による伸びであるから、

$$\Delta ds = \frac{H_P}{E_c A_c} \cdot \frac{ds}{dx} \cdot dx + \alpha \cdot t \cdot ds \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 $E_c A_c$ はケーブルの伸び剛性、 α 、 t はそれぞれケーブルの線膨張係数および温度変化を示す。

上式の $d\xi$ を dx に関してテイラー展開を行い、高次の微小量を省略すると、

$$d\xi = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{\Delta ds}{dx} \cdot dx - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d\eta}{dx} \cdot dx$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\Delta ds}{dx} \right)^2 - \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right\} \cdot dx \dots\dots\dots (4)$$

上式の最終項は微小であり、完成系の場合には一般に無視している。しかし架設系の場合には、変位の絶対量が完成系のそれよりも1桁くらい大きくなるため、その影響は後述のとおり数%にも及ぶことがあり一般に無視することはできない。したがって式(4)の最終項も考慮することにした。

いまケーブルの固定点間を CC' とすれば、

$$\int_C^{C'} d\xi = 0 \dots\dots\dots (5)$$

これより水平張力を求めることができるわけであるが、一般には困難であるので、次節のような仮定を設けることにより簡易化される。

(3) 仮 定

式(5)には、未知関数 \bar{q}_v が入り直接積分することはできない。架設系の場合、 \bar{q}_v はケーブルの自重あるいは実際にはキャットウォークの自重等を含む w_c と補剛桁部分の吊材にかかる分布荷重 q よりなり、 $\bar{q}_v = w_c + q$ とおくことができる。ここで w_c は一般に等分布荷重と考えて差し支えない。図-2 は逐次剛結法の架設系における有限変位理論による吊材張力の計算例を示すが、図からわかるとおり吊材張力は架設された補剛桁の両端のわずかな領域を除いた中間部ではほぼ等しく、しかもその絶対量は小さい。したがって中間部の吊材張力に相当する q の値は、等分布荷重と考えて差し支えないものと推定される。

以上の考えから q は未知の等分布荷重と仮定した。なおその他の仮定は、一般の撓度理論と同じであり、たとえば、水平張力は全径間一定、吊材は常に鉛直であり、伸びは無視するものとする。また完成系のケーブル形状は放物線と仮定する。

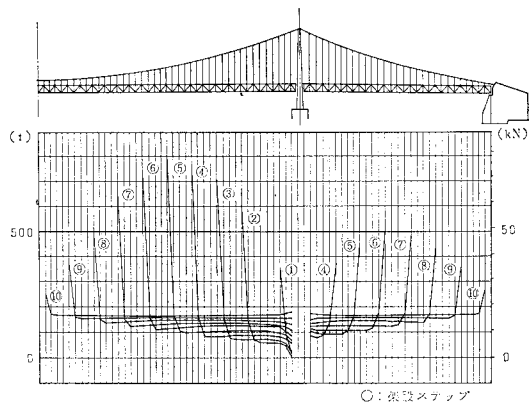


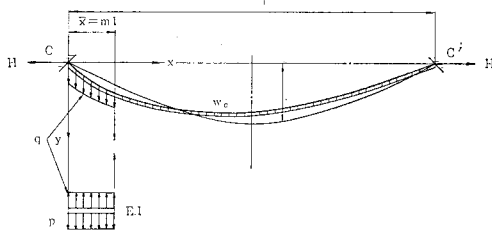
図-2 吊材張力の分布

(4) 吊材張力 q

いま簡単な例として、図-3 の場合について説明する。 q を吊材張力とし、 \bar{p} を完成系から除荷される等分布荷重とすれば、式(1)の \bar{q}_v は次のように表わされる。

$$\bar{q}_v = w_a - \bar{p} + q = w_c + q$$

これを式(1)に代入して q を求める。 $q = kp$ において、 p を架設時に補剛桁にかかる全等分布死荷重とすれば、補剛桁の死荷重に対するケーブルの荷重分担率 k は、次のように求められる。



図—3 ケーブルにかかる荷重

その際式 (1) の $\frac{d^2\eta}{dx^2}$ は補剛桁にかかる等分布荷重 $(p-q)$ による曲げモーメントに対応し、2 次曲線になるが、 q を一定と仮定したので $\frac{d^2\eta}{dx^2}$ も一定の代表値で示す必要がある。そのため $\frac{d^2\eta}{dx^2}$ の値は、 $(p-q)$ による補剛桁長の中央のたわみが等しくなるような等曲げモーメントに置換することにした。

$$k = \frac{1}{\left(1 + \frac{d\xi}{dx}\right) + am^2} \cdot \left[8n \left(\frac{j}{i} \right) + am^2 - \left(\frac{j}{i} \right) \left(1 + \frac{d\xi}{dx} \right) + \left(\frac{j}{i} \right) \frac{\frac{dy}{dx} + \frac{d\eta}{dx}}{1 + \frac{d\xi}{dx}} \left(\frac{d^2\xi}{dx^2} \cdot l \right) \right] \dots\dots\dots (6)$$

ここに、

$$n = f/l, m = \bar{x}/l, i = p/\bar{p}, \bar{i} = w_c/\bar{p}, j = H/\bar{p}l$$

l : ケーブル支間

f : 完成系ケーブルのサグ

EI : 補剛桁の曲げ剛性

$$a = \bar{a}H, \bar{a} = \frac{5l^2}{48EI}$$

\bar{a} は補剛桁架設長 ml の中央点の等分布荷重によるたわみに等しいたわみを与える等曲げモーメントから求められる値である。また式 (6) 中の $d\xi/dx$, $d^2\xi/dx^2$, dy/dx , $d\eta/dx$ は、 q の値を架設長について一定と仮定したから、その代表値として補剛桁架設長の中央点、すなわち $x = \frac{\bar{x}}{2} = \frac{1}{2}ml$ 点の値をとるものとする。これ

らの式は後述する。

(5) 水平張力 H_P

(5) の条件式に式 (2)~(4) を代入すると、一般に y , η が 2 次曲線で両端において 0 となる場合、水平張力 H_P の基本式は次のように得られる。

$$H_P = \frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2\eta}{dx^2} \right) \int_C^{C'} \mathfrak{M}_P dx + H(L_t + L_t') \cdot \Delta t}{-\left(\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2\eta}{dx^2} \right) \int_C^{C'} y dx + \frac{H}{E_c A_c} (L_E + L_E')} \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 L_E , L_t はそれぞれ後述のとおりケーブルの伸びおよび温度変化の項にかかる定着点 CC' 間にわたる定積分であり、 L_E' , L_t' は第 1 項に比し高次の微小項を示す。また $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{d^2\eta}{dx^2}$ はそれぞれの積分区間で一定値または 0 となり、 $\frac{1}{2} \cdot \frac{d\eta^2}{dx^2}$ は第 1 項に比し高次の微小項に相当する。

また式 (7) の \mathfrak{M}_P は前述の仮定から等分布荷重と集中荷重によるそれぞれの対象とする径間を単純支持とするモーメントを表わしているため積分可能である。それゆえ一般に式 (7) より H_P を求めることは可能である。したがってまた本解法は一般的な荷重ケースおよび径間割についても適用可能なことは自明の理であろう。

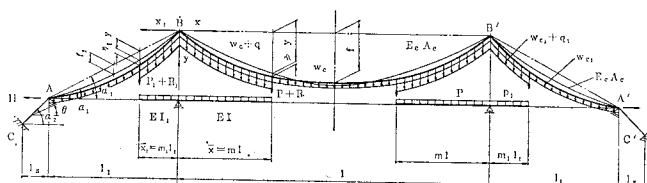
3. 標準的な吊橋の解

(1) 水平張力 H_P

図—4 に示すような 3 径間吊橋を想定し、塔側より逐次剛結工法で架設していく場合の水平張力 H_P を求める。ただし実際の架設においては、施工管理の簡明さと応力変形のバランスをよくするため、一般に左右対称に架設される場合が多いので、解析においても簡単のための対称荷重の場合について述べることにする。

図—4 の場合について式 (7) を具体的に誘導すると、

$$H_P = \frac{8n\bar{p}l(1-\varepsilon)\mathfrak{M} + 8\tau n_1\bar{p}_1l_1(1-\varepsilon_1)\mathfrak{M}_1 + (\delta + \delta_1) - H\left(\frac{L_t}{l}\right)(1+\varepsilon_t)\Delta t}{\frac{16}{3}\{n^2(1-\varepsilon) + 2\tau n_1^2(1-\varepsilon_1)\} + (D + D_1) + \frac{H}{E_c A_c} \left(\frac{L_E}{l}\right)(1+\bar{\varepsilon})} \dots\dots\dots (8)$$



図—4 標準的な吊橋

ここに、側径間に関する記号にはサフィックス 1 をつけて表わすことにすると、上式について

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathfrak{M}} &= \frac{1}{2} m^2 \left(1 - \frac{3-k}{3} m \right) i + m(1-m) i_P - \frac{1}{12} \\ \bar{\mathfrak{M}}_1 &= \frac{1}{2} m_1^2 \left(1 - \frac{3-k_1}{3} m_1 \right) i_1 + m_1(1-m_1) i_{P_1} - \frac{1}{6} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)_{1,2}$$

ここに、 $i_P = P/\bar{p}l$, P は架設機械などを想定した等価集中荷重を示す。また水平張力 H , H_P を含む高次微小項としては、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{16n} \cdot (1+8nj) \left(\frac{\bar{p}l}{H} \right) \\ \varepsilon_1 &= \frac{1}{16n_1} (1+8n_1j_1) \left(\frac{\bar{p}_1l_1}{H} \right) \\ \bar{\varepsilon} &= \frac{L_{E'}}{L_E}, \quad \varepsilon_t = \frac{L_t'}{L_t} \\ \delta &= \frac{1}{2} k \cdot i \left(\frac{\bar{p}l}{H} \right) \cdot \bar{p}l \cdot \bar{\mathfrak{M}}_\delta \\ \delta_1 &= \frac{1}{2} \cdot r k_1 \cdot i_1 \left(\frac{\bar{p}_1l_1}{H} \right) \cdot \bar{p}_1l_1 \cdot \bar{\mathfrak{M}}_{\delta_1} \\ \bar{\mathfrak{M}}_\delta &= \left[\frac{3+k}{6} mi + i_P - \frac{1}{6} (3-2m) \right] \cdot m^2 \\ \bar{\mathfrak{M}}_{\delta_1} &= \left[\frac{3(1-m_1) + k_1}{6} m_1 i_1 + (1-m_1) i_{P_1} - \frac{1}{6} (3-2m_1) \right] \cdot m_1^2 \\ \Delta &= \frac{2}{3} knm^2 (3-2m) \left(\frac{\bar{p}l}{H} \right) \cdot i \\ \Delta_1 &= \frac{2}{3} r k_1 n_1 m_1^2 (3-2m_1) \left(\frac{\bar{p}_1l_1}{H} \right) \cdot i_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)_{3 \sim 12}$$

ここに、

$$j = H_P/\bar{p}l, \quad j_1 = H_P/\bar{p}_1l_1, \quad r = l_1/l$$

定数項として (ただし $L_{E'}/l$, L_t'/l は H_P の 1 次式),

$$\left. \begin{aligned} \frac{L_E}{l} &= 1 + 8n^2 + \Delta\varepsilon + 2r \left(1 + \frac{3}{2} \tan^2 \alpha_1 + 8n_1^2 + \Delta\varepsilon_1 \right) \\ &\quad + 2r_s \cdot C_s \cdot \sec \bar{\alpha}_1 \\ \frac{L_{E'}}{l} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{H_P}{E_c A_c} \left\{ 1 + \frac{32}{3} n^2 + \frac{8}{3} \Delta\varepsilon \right. \\ &\quad \left. + 2r \left(1 + 2 \tan^2 \alpha_1 + \frac{32}{3} n_1^2 + \Delta\varepsilon_1 \right) \right. \\ &\quad \left. + 2r_s \cdot C_s \cdot \sec^2 \bar{\alpha}_1 \right\} \\ \Delta\varepsilon &= \frac{96}{5} n^4, \quad \Delta\varepsilon' = \frac{96}{5} n_1^4 \\ \Delta\varepsilon_1 &= \frac{3}{8} \tan^4 \alpha_1 + 12 n_1^2 \cdot \tan^2 \alpha_1 + \Delta\varepsilon' \\ \Delta\varepsilon_1' &= \frac{8}{3} \Delta\varepsilon_1 \\ C_s &= \frac{1 + \tan \frac{1}{2} (\bar{\alpha}_1 + \alpha_2) \cdot \tan \alpha_1}{1 + \tan \frac{1}{2} (\bar{\alpha}_1 + \alpha_2) \cdot \tan \alpha_2} \cdot \sec^2 \alpha_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)_{13 \sim 19}$$

ここに、 $r_s = l_s/l$, $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon_1$, $\Delta\varepsilon_1'$ はケーブル伸びによる 2 次ひずみの項を示す。 C_s はスプレーサドルの境界条件から求められる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{L_t}{l} &= 1 + \frac{16}{3} n^2 + 2r \left(1 + \tan^2 \alpha_1 + \frac{16}{3} n_1^2 \right) + 2r_s \cdot C_s \\ \frac{L_t'}{l} &= \frac{H_P}{E_c A_c} \left\{ 1 + 8n^2 + \Delta\varepsilon + 2r \left(1 + \frac{3}{2} \tan^2 \alpha_1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 8n_1^2 + \Delta\varepsilon_1 \right) + 2r_s \cdot C_s \cdot \sec \bar{\alpha}_1 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{16}{3} n^2 + 2r \left(1 + \tan^2 \alpha_1 + \frac{16}{3} n_1^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + 2r_s \cdot C_s \right\} \cdot \alpha t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)_{20,21}$$

側径間の k_1 の値については、中央径間の k の式 (6) にサフィックスをつけて次のように表わされる。

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{\left(1 + \frac{d\xi_1}{dx_1} \right) + a_1 m_1^2} \\ &\quad \cdot \left[8n_1 \left(\frac{\bar{j}_1}{i_1} \right) + a_1 m_1^2 - \left(\frac{\bar{i}_1}{i_1} \right) \left(1 + \frac{d\xi_1}{dx_1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\bar{j}_1}{i_1} \right) \frac{\frac{dy}{dx_1} + \frac{d\eta_1}{dx_1}}{1 + \frac{d\xi_1}{dx_1}} \left(\frac{d^2\xi_1}{dx_1^2} \cdot l_1 \right) \right] \end{aligned} \dots\dots\dots (6)'$$

ここに、

$$\begin{aligned} i_1 &= p_1/\bar{p}_1, \quad \bar{i}_1 = w_{c1}/\bar{p}_1, \quad \bar{j}_1 = H/\bar{p}_1l_1, \quad a_1 = \bar{a}_1H, \\ \bar{a}_1 &= \frac{5}{48} \cdot \frac{l_1^2}{EI_1} \end{aligned}$$

また $d\xi_1/dx_1$, $d^2\xi_1/dx_1^2$, $d\eta_1/dx_1$ は式 (2)~(4) から求められる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dx_1} &= \frac{H_P}{E_c A_c} \cdot \left(1 + \frac{3}{2} \bar{\beta}_1^2 \right) - \bar{\beta}_1 (1-m_1) \left(\frac{\bar{p}_1l_1}{H} \right) \\ &\quad \cdot \bar{\mathfrak{M}}_1 + (1 + \bar{\beta}_1^2) \cdot \alpha t \\ \frac{d^2\xi_1}{dx_1^2} \cdot l_1 &= -2A \left(\frac{H_P}{E_c A_c} \right) \cdot n_1 \bar{\beta}_1 \left(1 + \frac{1}{2} \bar{\beta}_1^2 \right) \\ &\quad + 8n_1 (1-m_1) \left(\frac{\bar{p}_1l_1}{H} \right) \cdot \bar{\mathfrak{M}}_1 \\ &\quad + \bar{a}_1 (\bar{p}_1l_1) (1-k_1) i_1 \cdot m_1^2 \cdot \bar{\beta}_1 - 8n_1 \bar{\beta}_1 \cdot \alpha t \\ \frac{d\eta_1}{dx_1} &= -(1-m_1) \left(\frac{\bar{p}_1l_1}{H} \right) \cdot \bar{\mathfrak{M}}_1 \\ \frac{dy}{dx_1} &= \bar{\beta}_1 = \tan \alpha_1 + 4n_1 (1-m_1) \\ \bar{\mathfrak{M}}_1 &= \frac{1}{2} m_1 \cdot i_1 + i_{P_1} - \frac{1}{2} - 4n_1 j_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)'_{1 \sim 5}$$

なお中央径間の k の値は式 (6) で与えられるが、式中の $d\xi/dx$, $d^2\xi/dx^2$ などの式は同様にして次式のようにになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dx} &= \frac{H_P}{E_c A_c} \{1 + 24 n^2 (1-m)^2\} \\ &\quad - 4 n (1-m) \left(\frac{\bar{p}l}{H} \right) \cdot \bar{\mathfrak{M}} + \{1 + 6 n^2 (1-m)^2\} \cdot \alpha t \\ \frac{d^2 \xi}{dx^2} \cdot l &= -96 n^2 (1-m) \left(\frac{H_P}{E_c A_c} \right) \cdot \{1 + 8 n^2 (1-m)^2\} \\ &\quad + 8 n \left(\frac{\bar{p}l}{H} \right) \cdot \bar{\mathfrak{M}} + 4 \bar{\alpha} (\bar{p}l) (1-k) i \\ &\quad \cdot n m^2 (1-m) - 64 n^2 (1-m) \cdot \alpha t \\ \frac{d\eta}{dx} &= \left(\frac{\bar{p}l}{H} \right) \cdot \bar{\mathfrak{M}}, \quad \frac{dy}{dx} = 4 n (1-m) \\ \bar{\mathfrak{M}} &= \frac{1}{2} m (1+i) + i_P - \frac{1}{2} - 4 n j (1-m) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)_{1 \sim 5}$$

(2) ケーブルの水平変位 ξ

図—1 からわかるように、完成系のケーブルのある点に着目すると、変形により鉛直方向に η だけ変位すると同時に、水平方向には ξ だけ変位してつり合いを保つ。したがって真の η の値は水平変位 ξ を考慮したものでなければならない。いま、図—4 に示す架設先端 \bar{x} における水平変位を $\bar{\xi}$ (右方向を正) とすれば、式 (4) を固定点、たとえばケーブルアンカー一点 C から積分して求められる。

$$\bar{\xi} = \xi_B + \int_0^{\bar{x}} d\xi \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 ξ_B は塔頂の水平変位である。いま、スプレーサドルの水平変位を ξ_A とすれば、

$$\xi_B = \xi_A + \xi_{BA} = \int_0^{l_1} d\xi_1 \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 ξ_{BA} はスプレーサドルが傾斜角 θ で移動することにより塔頂に生じる水平変位を示す。また ξ_B はいまの場合対称荷重であるから、中央径間中央で水平変位は起こらない。したがって中央径間中央から積分しても求められる。

$$\xi_B = - \int_0^{l/2} d\xi \dots\dots\dots (10)'$$

なおスプレーサドルの水平移動量 ξ_A を求めておく。

$$\xi_A = \frac{\xi_{BA}}{1 + \tan \frac{1}{2} (\bar{\alpha}_1 + \alpha_2) \tan \alpha_1} \dots\dots\dots (11)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \xi_{BA} &= \frac{H_P}{E_c A_c} \cdot \left(\frac{L_{EA}}{l} \right) \cdot (1 + \bar{\xi}_A) l \\ &\quad + \left(\frac{L_{tA}}{l} \right) \cdot (1 + \bar{\xi}_{tA}) \cdot \alpha t l \\ \frac{L_{EA}}{l} &= C_s \cdot r_s \cdot \sec \bar{\alpha}_1, \quad \frac{L_{tA}}{l} = C_s \cdot r_s \\ \bar{\xi}_A &= \frac{1}{2} \frac{H_P}{E_c A_c} \cdot \sec \bar{\alpha}_1 \end{aligned} \right\}$$

$$\bar{\xi}_{tA} = \frac{H_P}{E_c A_c} \cdot \sec \bar{\alpha}_1 + \frac{1}{2} \alpha t \dots\dots\dots (11)_{1 \sim 5}$$

また塔頂部の水平移動量 ξ_B は式 (10)' を積分して、

$$\xi_B = - \left[\frac{H_P}{E_c A_c} \left(\frac{L_{E0}}{l} \right) (1 + \bar{\xi}_{E0}) + d\xi_0 \right. \\ \left. + \frac{L_{t0}}{l} \cdot (1 + \bar{\xi}_{t0}) \cdot \alpha t \right] \cdot l \dots\dots\dots (12)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \frac{L_{E0}}{l} &= \frac{1}{2} (1 + 8 n^2 + d\varepsilon) \\ \frac{L_{E0}'}{l} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{H_P}{E_c A_c} \left(1 + \frac{32}{3} n^2 + \frac{8}{3} \cdot d\varepsilon \right) \\ \frac{L_{t0}}{l} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{16}{3} n^2 \right) \\ \frac{L_{t0}'}{l} &= \frac{1}{2} \frac{H_P}{E_c A_c} \cdot (1 + 8 n^2 + d\varepsilon) + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{16}{3} n^2 \right) \cdot \alpha t \\ \bar{\xi}_{E0} &= \frac{L_{E0}'}{L_{E0}}, \quad \bar{\xi}_{t0} = \frac{L_{t0}'}{L_{t0}} \\ d\xi_0 &= -4 \left(\frac{\bar{p}l}{H} \right) \left[n (1 - \varepsilon) \left(\bar{\mathfrak{M}} - \frac{2}{3} n j \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{16} \left(\frac{\bar{p}l}{H} \right) k i \left\{ \bar{\mathfrak{M}}_0 - \frac{4}{3} n j (3 - 2 m) m^2 \right\} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)_{1 \sim 7}$$

(3) 鉛直変位 η の修正

いままでのケーブルにかかる荷重は、完成系の形状を基準にしていたが、前節のとおり水平方向にも変位するから次のことを考慮する必要がある。① 完成系ケーブルのある着目点 (x) は変形後 ($x + \xi$) 点に移動する。② 塔頂部の水平移動により、ケーブルの支間 l は ($l - 2 \xi_B$) に変化する。③ ケーブルの大きな変形により、完成系で仮定したケーブルにかかる分布荷重密度が変化する。以上のことを考慮に入れて変形後の着目点 ($x + \xi$) における $\mathfrak{M}(x + \xi)$ を求め直し、これを \mathfrak{M}' とする。ここで \mathfrak{M}' は H_P を求めたときの $\mathfrak{M}(x)$ とは異なるから、当然前に求めた H_P も変わるが、 H_P への影響は小さいものとして繰返し計算しないことにする。以上から η を求めると、

$$\eta = \frac{\mathfrak{M}'}{H} - y, \quad \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}_{wc}' + \mathfrak{M}_q' + \mathfrak{M}_{P+R}' \dots\dots (13)$$

ただし、 \mathfrak{M}' の値は水平変位として架設先端の $\bar{\xi}$ を基準とし、他の点は比例配分されて線形的に内挿した変位をとるものとして単純化されている。また側径間についても式 (13) と同様であり、サフィックスをつければよい。

(4) フリーケーブル状態

フリーケーブルの場合の水平張力 H_P は式 (8) において、 $k = k_1 = 1$, $m = m_1 = 0$, $i = i_1 = 0$ において、

$$H_P = \frac{-\frac{2}{3}\{n\bar{p}l(1-\varepsilon) + 2\tau n_1\bar{p}_1l_1(1-\varepsilon_1)\} - H\left(\frac{L_t}{l}\right)(1+\varepsilon_t) \cdot \alpha t}{\frac{16}{3}\{n^2(1-\varepsilon) + 2\tau n_1^2(1-\varepsilon_1)\} + \frac{H}{E_c A_c}\left(\frac{L_E}{l}\right)(1+\bar{\varepsilon})} \quad (14)$$

第1近似式としては、 $\varepsilon = \varepsilon_1 = \bar{\varepsilon} = \varepsilon_t = 0$, $H = 0$ において

$$H_P = \frac{-(n\bar{p}l + 2\tau n_1\bar{p}_1l_1)}{8(n^2 + 2\tau n_1^2)} \quad (15)$$

次に ξ_B (セットバック量) は、式 (12) より $\bar{\eta} = -\frac{1}{12}$, $\bar{\eta}_1 = -\frac{1}{6}$ であるから、

$$\xi_B = -\left[\frac{H_P}{E_c A_c} \left(\frac{L_{E0}}{l} \right) (1 + \bar{\varepsilon}_{E0}) + d\xi_0^* + \left(\frac{L_{t0}}{l} \right) (1 + \bar{\varepsilon}_{t0}) \cdot \alpha t \right] \cdot l \quad (16)$$

ここに、

$$d\xi_0^* = \frac{1}{3} \left(\frac{\bar{p}l}{H} \right) n(1-\varepsilon)(1+8nj) \quad (16)_1$$

各径間のサグ変化量は、

$$\left. \begin{aligned} \eta_c &= \frac{w_c}{8H} \cdot l(l-2\xi_B) - f \\ \eta_{c_1} &= \frac{w_{c_1}}{8H} \cdot l_1(l_1 - \xi_A + \xi_B) - f_1 \end{aligned} \right\} \quad (17)_{1,2}$$

(5) 補剛桁の断面力、吊材張力

補剛桁の曲げモーメント M , セン断力 Q は、

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{1-k}{2} px(ml-x) \\ Q &= \frac{1-k}{2} p(ml-2x) \end{aligned} \right\} \quad (18)_{1,2}$$

補剛桁中間部および架設先端の吊材張力をそれぞれ T_h , T_{hm} とし、両隣の吊材間隔をそれぞれ λ_1 , λ_2 とすれば、

$$T_h = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} kp, \quad T_{hm} = P + R + \frac{1}{2} \lambda_1 kp \quad (19)_{1,2}$$

ここに、 $R = \frac{1-k}{2} pml$ は補剛桁にかかる等分布死荷重による桁端反力を示す (側径間はサフィックスをつける)。

(6) 計算手順

各架設ステップについて、最初 $H_P = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_1 = \bar{\varepsilon} = 0$, $\delta = \delta_1 = d = d_1 = 0$ においてスタートし、 k, k_1 を求め、第1回目の $H_P^{(1)}$ から $H^{(1)} = H_d + H_P^{(1)}$ が得られる。これから $k, k_1, \varepsilon, \varepsilon_1, \bar{\varepsilon}, d, d_1$ などを求めて第2回目の $H^{(2)}$ を求め、第 n 回目の誤差 $\left| \frac{H^{(n-1)} - H^{(n)}}{H^{(n)}} \right| \leq \sigma$ を満足するまで繰り返して収束させる。 H が求めれば、変位 ξ, η およびすべての断面力が得られる。これをフローチャートで示せば図-5 のとおりである。

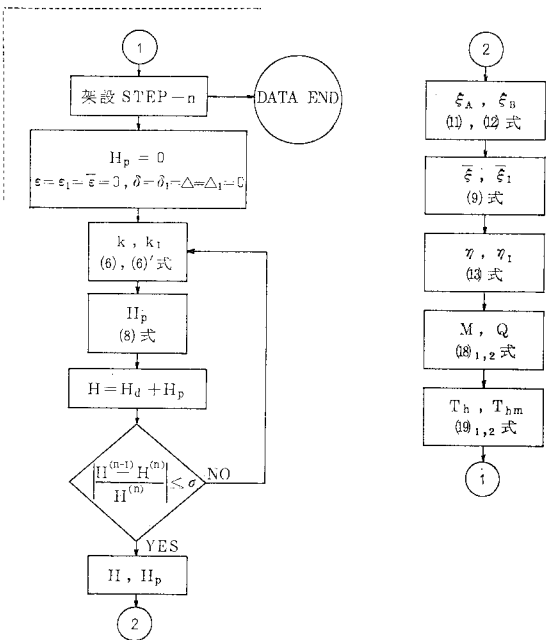


図-5 計算手順

4. 本理論の適用性

これまでは、単径間、3径間の2ヒンジ補剛吊橋について述べたが、多径間についても同様に解けることは前述のとおり容易に理解されよう。

通常用いられる架設工法は、大別して全ヒンジ工法と逐次剛結工法があるが、全ヒンジ工法は前述の $k=1$ であり、当然ケーブルだけのつり合い方程式となるので簡単に求められる。また前述の逐次剛結工法で架設ヒンジを設ける場合も、架設ヒンジで区分された各補剛桁の吊材張力をそれぞれ一定と仮定することにより、同様に解くことができる。

架設順序についても、塔側から各径間中央に向かって架設する方法、あるいは径間中央から架設する方法など種々の架設順序が考えられるが、いずれの架設順序に従っても本理論の考え方をそのまま適用すればよい。

次に連続補剛桁吊橋については、多少複雑となるが、たとえば文献10)の考え方により、支点曲げモーメントを不静定量として解析できる。また架設先端に外力として端モーメントを作用させることも当然可能であろう。

以上より、本解法は一般に鉛直吊材を有する吊橋において、通常考えられる架設状態の解析に適用できることが想定されよう。

5. 計 算 例

標準的な吊橋として、図—4 に示す3径間吊橋の解を3. で示した。この数式を用い、表—1 に示す諸元を入れて計算した。なお、本解法は撓度理論に基づいた近似解であるから、その数値評価の比較対象としては、本来撓度理論によるいわゆる厳密解を選ぶべきであろうが、適当な文献が見当たらないので、やむを得ず有限変位理論で代用することにした。しかし有限変位理論では吊材の傾斜と伸びの影響が忠実に表現されるのに対し、撓度理論では一般にこれらの影響は無視されるのが通例である。すなわち、完成系の場合に知られているとおり、一般にこれらの影響による誤差は小さくかつ撓度理論の方が安全側の評価を与えることが多く、実用上差し支えないものとされ今日でも常用されている。架設系の場合もほぼ同じことがいえるので、本解法の数値評価の比較対象として吊材の伸びを無限小にした有限変位理論でもっ

て代用することにした。ただし吊材の傾斜の影響が入るのはやむを得ないので容認することにした。なお参考の

表—1 計 算 諸 元

l	864.4 m	w_{d1}	20.60 t/m (201.9 kN/m)
f	79.857 m	\bar{P}_1	14.697 t/m (144.03 kN/m)
EI	$1.956 \times 10^8 \text{ tm}^2$ ($1.917 \times 10^9 \text{ kNm}^2$)	P_1	210 t (2 058 kN)
w_d	20.47 t/m (200.61 kN/m)	p_1	11.98 t/m (117.40 kN/m)
\bar{P}	14.834 t/m (145.37 kN/m)	l_s	17.678 m
P	210 t (2 058 kN)	α_1	15.537°
p	12.08 t/m (118.38 kN/m)	α_2^*	45°
l_1	312.2 m	$\bar{\alpha}_1$	8.178°
f_1	10.483 m	$E_c A_c$	$1.126 \times 10^7 \text{ t}$ ($1.103 \times 10^8 \text{ kN}$)
EI_1	$1.870 \times 10^8 \text{ tm}^2$ ($1.833 \times 10^9 \text{ kNm}^2$)		

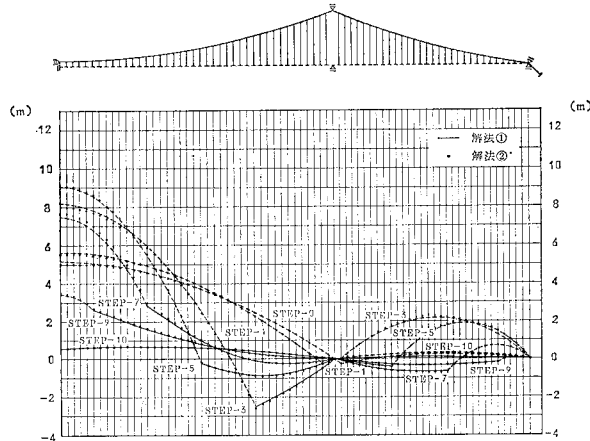
表—2 計 算 結 果 (中央径間)

架 設 ステップ	解 法	H t (MN)	(a) ケーブル鉛直変位(m), 上向(+)		(b) ケーブル水平変位(m), 中央径間側(+)			(c) 側架設補剛桁断面力		(d) 吊材張力 (架設先端)
			η_c	$\bar{\eta}$	ξ_B	ξ_A	$\bar{\xi}$	M_{\max} tm (MN·m)	Q_{\max} t (MN)	T_{hm} t (MN)
0	①	7 062(69.21)	5.137	—	-0.517	-0.0357	—	—	—	—
	②	7 041(69.00)	5.004	—	-0.521	-0.0357	—	—	—	—
	②—①	-21	-0.133	—	-0.004	0	—	—	—	—
	$d(\%)$	-0.3	-2.6	—	0.8	0	—	—	—	—
1	①	7 195(70.51)	5.629	-0.266	-0.528	-0.0354	-0.662	563(5.52)	56.3(0.55)	327(3.20)
	②	7 177(70.33)	5.537	-0.273	-0.531	-0.0354	-0.690	573(5.62)	115(1.13)	328(3.21)
	②—①	-18	-0.092	-0.007	-0.003	0	-0.028	10	58.7	1
	$d(\%)$	-0.3	-1.6	2.6	0.6	0	4.2	1.8	—	0.3
3	①	8 995(88.15)	8.150	-2.483	-0.169	-0.0314	-1.183	17 766(174.11)	526(5.15)	799(7.83)
	②	8 964(87.58)	7.990	-2.573	-0.150	-0.0316	-1.332	17 814(174.58)	571(5.60)	797(7.81)
	②—①	-31	-0.160	-0.090	0.019	-0.0002	-0.149	48	45	-2
	$d(\%)$	-0.3	-2.0	3.6	-11.2	0.6	12.6	0.3	8.6	-0.3
5	①	11 784(115.48)	9.053	-0.250	-0.254	-0.0253	-0.672	32 153(315.10)	611(5.99)	885(8.67)
	②	11 800(115.64)	9.120	-0.193	-0.241	-0.0257	-0.691	32 154(315.11)	614(6.02)	857(8.40)
	②—①	16	0.067	0.057	0.013	-0.0004	-0.019	1	3	-28
	$d(\%)$	0.1	0.7	—	-5.1	1.6	2.8	0	0.5	-3.2
7	①	15 360(150.53)	7.464	2.828	-0.351	-0.0178	-0.153	28 395(278.27)	422(4.14)	696(6.82)
	②	15 415(151.07)	7.678	3.034	-0.346	-0.0180	-0.096	28 399(278.31)	386(3.78)	646(6.33)
	②—①	55	0.214	0.206	0.005	-0.0002	0.057	4	-36	-50
	$d(\%)$	0.4	2.9	7.3	-1.4	1.1	—	0	-8.5	-7.2
9	①	19 300(189.14)	3.408	2.617	-0.213	-0.0097	0.006	8 643(84.70)	112(1.10)	386(3.78)
	②	19 318(189.32)	3.480	2.689	-0.217	-0.0098	0.027	8 770(85.95)	92.5(0.91)	364(3.57)
	②—①	18	0.072	0.072	-0.004	-0.0001	0.021	127	-19.5	-22
	$d(\%)$	0.1	2.1	2.8	1.9	1.0	—	1.5	—	-5.7
10	①	21 309(208.83)	0.582	0.549	-0.0735	-0.0056	0.002	-3 466(-33.97)	-44.6(-0.44)	229(2.24)
	②	21 295(208.69)	0.552	0.518	-0.0727	-0.0056	0.005	-3 512(-34.42)	-33.3(-0.33)	242(2.37)
	②—①	-14	-0.030	-0.031	0.0008	0	0.003	-46	11.3	13
	$d(\%)$	-0.1	-5.2	-5.6	-1.1	0	—	1.3	—	5.7

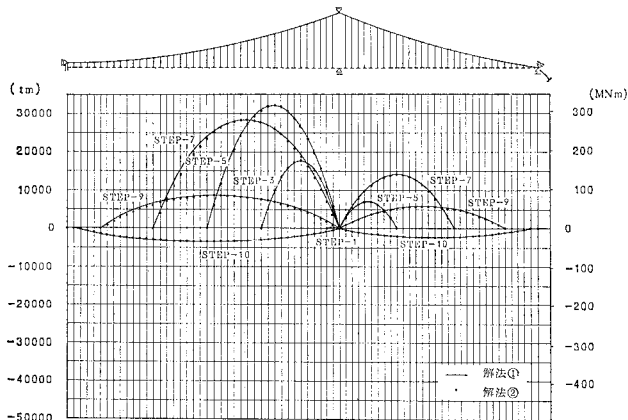
注) ①: 有限変位理論値, ②: 本理論値, $d = \frac{②-①}{①} \times 100(\%)$

ため、吊材の伸びによる影響について本計算例で示すと、変位で約1%増加、補剛桁の曲げモーメントで1~5%の減少にとどまるが、せん断力および架設先端吊材張力は伸びの影響を最も大きく受けて架設先端付近の吊

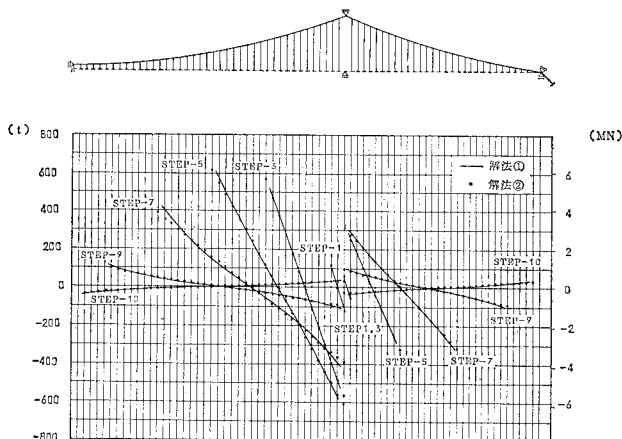
材張力の分布が緩やかになり、その最大値で約13%減少した。すなわち、吊材の伸びを無視した場合は安全側の評価を与えることを示している。



図—6 補剛桁およびケーブルの鉛直変位



図—7 補剛桁の曲げモーメント



図—8 補剛桁のせん断力

図—6、表—2(a) は架設各ステップの補剛桁およびケーブルの完成系からの鉛直変位が変化する状態を示す。実線および点線(解法①)は、それぞれ有限変位理論による補剛桁およびケーブルの変位であり、吊材の伸びは本解法に合わせて無視している。●印(解法②)は本解法を示しているが、全般にわたりよく一致していることがわかる。有限変位理論との誤差は、表—2(a) からわかるように、たわみの大きい箇所では3~7%程度、変位の相違の最大値は214 mm あるが、誤差は2.9%である。

図—7、表—2(c) は補剛桁の曲げモーメントを示す。この場合も全般にわたりよく一致しており、最大曲げモーメントの誤差は1~2%程度である。

図—8、表—2(c) はせん断力を示す。補剛桁端部で多少の誤差(9%)はあるが、傾向はよく一致していることがわかる。なお架設系の初期検討段階におけるせん断力の誤差としては、この程度であれば十分であると思われる。

図—9、表—2(d) は吊材張力を示す。図からわかるように吊材の性状をよく表現している。架設計画において最も支配的な値の一つは、架設先端吊材張力であるが、表—2(d) から誤差は0~7%程度であり、初期検討段階では十分評価できる値であろう。

図—10 は、フリーケーブル状態(STEP-0)の完成系からの変位を誇張して描いたものであるが、表—2からも塔頂水平変位(セットバック量)の誤差4 mm(0.8%)程度、サグの変化量の誤差133 mm(2.5%)程度であり、十分実用に供することができるものと思われる。

なお架設先端の水平変位は、表—2(b) からわかるように、最大のSTEP-3で1.2 mにも達するが、これを無視すると10%前後の誤差を生じる。また H_P の式の高次微小項を無視しかつ Melan の慣用式(1)'を用いた場合には更に15%前後の誤差を生じることが確認された。したがって、架設系ではこのような大きな水平変位および H_P の高次微小項を考慮に入れることが本解法の精度向上に寄与しているものと思われる。

6. 結 言

鉛直吊材で構成された吊橋の架設状態における解析法として、従来の撓度理論に高次の変形量および水平変位を考慮に入れた場合の近似解法を提案し、標準的な3径間吊橋の逐次剛結法による架設状態の解を示すとともに、計算例を挙げて有限変位理論と比較検討を加えた。その結果本解法の特徴として次の事項が挙げられる。

(1) 一般に鉛直吊材を有する吊橋における通常の架設工法、手順に対して適用できる。

(2) 各架設ステップにおけるケーブルの水平張力と変位、補剛桁の応力と変位および吊材張力等について、有限変位理論値とほぼ一致し、近似解法として実用上有用である。

(3) 架設工法、手順などの適正化のためのパラメトリック解析、対話形式を実施するのに便利である。

最後に、本研究に際し、懇切なご指導を賜った大阪大学小松定夫教授に深く感謝の意を表します。また、数値計算などに協力いただいた三井造船(株)の佐藤哲也君および三友工業(株)の片桐達朗君に対して心から謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 岩城康雄・浦野芳郎・木村克正：吊橋の2次元大変形解析，三井造船技報，97号，1975。
- 2) 後藤茂夫：有限変形法による吊橋の解法，土木学会論文集，156号，1968年8月。
- 3) 長谷川緒一・原田康夫：吊橋の構造解析，横河橋梁技報，Vol. 1, No. 1, 1972。
- 4) 長谷川緒一ほか：逐次剛結法による吊橋の補剛ゲタ架設，橋梁と基礎，Vol. 4, No. 4, 1970。
- 5) 岩城康雄ほか：吊橋の構造解析，三井造船技術資料，STAT III, 1978。

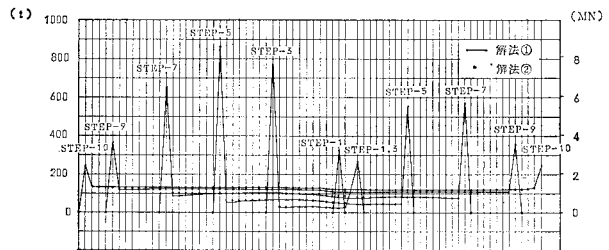
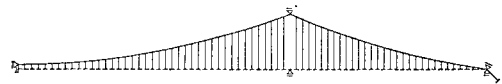
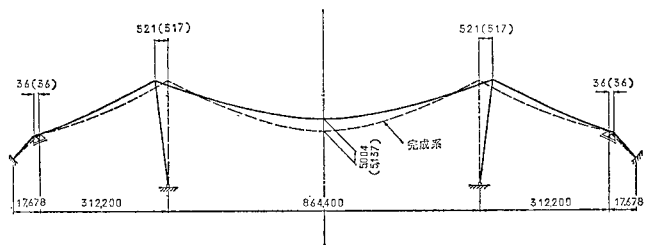


図-9 吊材張力



(注) 単位：mm () 内は有限変位理論によるも値(解法①)

図-10 フリーケーブル状態

- 6) Melan, J. : Theorie der eisernen Bogenbrücken und Hängebrücken, Handbuch der Ingenieurwissenschaften, Leipzig, 2nd. edition, 1888.
- 7) Peery, D.J. : An influence line analysis for suspension bridge, Proc. ASCE, 1954.
- 8) 平井 敦：鋼橋 III, 技報堂, 1969.
- 9) Lie, K. : Praktische Berechnung von Hängebrücken nach der Theorie II. Ordnung, Der Stahlbau, Heft 14, 15, 1941.
- 10) Beery, P. and H. Kollmeier : Beiträge zum Hängebrückenbau, Veröffentlichung des Instituts für Statik und Stahlbau der Technischen Hochschule Darmstadt, Heft 8, 1965.
- 11) West, H.H. and A.R. Robinson : Continuous method of suspension bridge analysis, Proc. ASCE, Dec. 1968.

(1981.12.17・受付)