土木学会論文報告集
第333号・1983年5月
【討　議】

長谷川彰夫・阪上精希・松浦聖 共著 "最大荷重設計による骨組構造の最適化"への討議

(土木学会論文報告集 第321号・1982年5月掲載)

▶討議者 (*Discussion*)——石川信隆(防衛大学校)・杉本博之(室蘭工業大学)
By Nobutaka Ishikawa and Hiroyuki Sugimoto

構造物の最適設計を研究している者にとって，本論文や前論文[2)]で示された最大荷重設計の手法は大変興味深く，最適設計の研究分野における一つの画期的な提案と思われます．ここでは在来の最小重量設計との関連において，(1) 解の妥当性について，(2) 計算の効率性について，(3) 双対性についてなど，最近討議者らが行った最小重量設計による数値計算結果をもとに，二，三の疑問点について著者らのご見解をお伺いしたいと思います．

1．解の妥当性について

本論文の **Fig. 8** の設計例について討議者らは個別に最小重量設計を行い，**Table 2** に示すような結果を得た．ただし，ここでは荷重 $P=100\,\mathrm{t}$ とし，応力制約(許容応力度 $\sigma_a=\sigma_y/1.7=1\,412\,\mathrm{kg/cm^2}$)のみを考慮した．また最大荷重設計による数値は **Fig. 9** より4点を読み取り，その平均値を用いた．なお最小重量設計では最適化アルゴリズムとして Davidon-Fletcher-Powell による SUMT 法(石川は東大大型電子計算機センターライブラリープログラム #389 C7-TC-SUMT を使用，杉本は自身作成のものを使用)を用い，また骨組解析として石川は応力法を，杉本は変形法を採用した．**Table 2** に3者の数値を示し比較を行った．

(1) まず3者の構造重量を比較するとほとんど一致している($\sum A_i \fallingdotseq 300\,\mathrm{cm^2}$，ここでは部材長 l_i がすべて等しいので省略してある)ことが認められた．

(2) しかし，個々の最適断面積 A_i (最適断面比率 $A_i/\sum A_i$)の値をみると，最小重量設計による2者の値はほぼ一致しているが，最大荷重設計とは部材 ①，③，④，⑤，⑦ でかなり異なっている．

(3) 次に各部材の応力 σ_i を計算してみると，最小重量設計による結果は $|\sigma_i|\leqq\sigma_a$ の条件を満足しているが，最大荷重設計では部材 ②，③，⑤，⑥ の4つの部材で許容応力度 $\sigma_a=1\,412\,\mathrm{kg/cm^2}$ を越えており，不合理な結果となっている．

以上の結果より，最大荷重設計では応力制約の条件を満足していない解が得られており，この点について著者らのご見解をお伺いしたいと思います．

2．計算の効率性について

最大荷重設計の計算に関する情報，たとえば収束性，骨組構造解析の繰返し回数などを，ある程度提示していただきたいと思います．参考までに，**Table 2** に最小重量設計の場合の収束精度 (accuracy) と構造解析の繰返し回数 (No. of structural analysis) を示した．

Table 2 Comparison with Minimum Weight Design ($P=100\,\mathrm{t}$, $\sigma_a=1\,412\,\mathrm{kg/cm^2}$)

	Maximum Load Design	Minimum Weight Design	
		Ishikawa	Sugimoto
	cm²	cm²	cm²
A_1 ($A_1/\sum A_i$)	4.41 (0.015)△	15.1 (0.050)	15.9 (0.053)
A_2 ($A_2/\sum A_i$)	67.6 (0.224)	63.3 (0.211)	63.1 (0.210)
A_3 ($A_3/\sum A_i$)	75.7 (0.251)△	96.8 (0.323)	97.9 (0.325)
A_4 ($A_4/\sum A_i$)	40.6 (0.134)△	14.9 (0.050)	14.2 (0.047)
A_5 ($A_5/\sum A_i$)	9.30 (0.031)△	26.0 (0.087)	27.0 (0.090)
A_6 ($A_6/\sum A_i$)	33.2 (0.110)	27.9 (0.093)	27.6 (0.092)
A_7 ($A_7/\sum A_i$)	71.0 (0.235)△	55.8 (0.186)	55.1 (0.183)
$\sum_{i=1}^{7} A_i$	301.8 (1.000)	299.8 (1.000)	300.8 (1.000)
	kg/cm²	kg/cm²	kg/cm²
σ_1	430	1 406	1 408
σ_2	1 465△	1 412	1 408
σ_3	−1 551△	−1 412	−1 408
σ_4	− 994	−1 412	−1 405
σ_5	−1 871△	−1 412	−1 401
σ_6	1 475△	1 412	1 406
σ_7	−1 381	−1 412	−1 409
$R_2\times\bar{P}_{\max}$	0.138	0.139	0.139
accuracy	——	10^{-4}	10^{-3}
No. of structural analysis	——	106	280

また最大荷重設計では式 (8)～式 (17) のように無次元量を用いて定式化を行っているが，実際の最適化計算を無次元量で行うと，時として収束が劣化することを今回の計算で経験した．その理由は無次元量を用いると扱う数値が 10^{-3} 以下のオーダになることがあり，収束判定が通常の 10^{-3}～10^{-5} 程度ではおかしなところに収束してしまうためである．したがって，無次元量を用いる

最適化計算では倍精度にするとかの何らかの工夫が必要であると思われた．この点から **Table 2** の計算では生のデータを使用し，計算結果を無次元量で一部表示した．以上，収束の判定基準も含めて最大荷重設計の計算の効率性についてお伺いします．

3．双対性について

最小重量設計と最大荷重設計との双対性について検討してみた．

（1）数値的観点からの双対性

Table 2 に示すように，最大荷重設計では各部材の応力が許容応力度を越えているものもあり，必ずしも最適部材断面配分とはなっていないが，全体として最小重量設計と同じ結果（$\sum A_i \fallingdotseq 300\,\mathrm{cm}^2$）となっている．よって，これはおそらく計算上のミスか，収束性の相違に帰因するものと思われ，最大荷重設計と最小重量設計は数値的に双対性が成り立つものと推測される．現に討議者の1人（石川）は前論文[2]のプレートガーダの1変数の場合について最小重量設計を行い，ほぼ同じ結果を得ている．

（2）理論的観点からの双対性

静定トラスの応力制約のみを考慮した最小重量設計の双対性について，すでに理論的検討がなされていた[8]ので，討議者らの解釈によって紹介したい．

いま静定トラスを対象とした応力制約のみを考慮した最小重量設計の基本式は，次のような LP 問題となる．

$$V=\sum_{i=1}^{m}\rho A_i l_i \rightarrow \min. \quad \cdots\cdots(19\cdot\mathrm{a})$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ki}N_i=F_k \qquad (k=1,2,\cdots,K) \quad \cdots\cdots(19\cdot\mathrm{b})$$

$$-\sigma_a A_i \leqq N_i \leqq \sigma_a A_i \qquad (i=1,2,\cdots,m) \quad \cdots\cdots(19\cdot\mathrm{c})$$

$$A_i \geqq 0 \qquad (i=1,2,\cdots,m) \quad \cdots\cdots(19\cdot\mathrm{d})$$

ここに，式 (19・a) は構造物の全重量 V が最小となることを示し，式 (19・b) は構造全体の独立なつり合い条件を，式 (19・c) は作用応力 $\sigma_i\ (=N_i/A_i)$ が許容応力度 $\sigma_a\ (=\sigma_y/1.7)$ を越えてはならないという応力制約を示している．ただし，ρ＝単位体積当たりの重量，c_{ki}＝つり合い式の方向余弦を示す係数で，k 番目のつり合い式の i 番目の部材軸力 N_i に関与する係数，F_k＝節点に作用する外力荷重，K＝つり合い条件式の全数．

式 (19) に LP の双対定理[9]を適用すると次式が得られる．

$$W=\sum_{k=1}^{K}F_k u_k \rightarrow \max. \quad \cdots\cdots(20\cdot\mathrm{a})$$

s.t.

$$\delta_i^+-\delta_i^- -\sum_{k=1}^{K}c_{ki}u_k=0 \qquad (i=1,2,\cdots,m) \quad \cdots\cdots(20\cdot\mathrm{b})$$

$$\delta_i^+ + \delta_i^- \leqq \rho l_i/\sigma_a \qquad (i=1,2,\cdots,m) \quad \cdots\cdots(20\cdot\mathrm{c})$$

$$\delta_i^+ \geqq 0, \quad \delta_i^- \geqq 0 \qquad (i=1,2,\cdots,m) \quad \cdots\cdots(20\cdot\mathrm{d})$$

ここに，式 (20・a) は節点に作用する荷重 F_k と仮想の節点変位 u_k（無次元量）とのなす仮想外力仕事 W が最大となることを示し，式 (20・b) はトラスの各部材の仮想変形 $\delta_i\ (=\delta_i^+-\delta_i^-)$ が仮想節点変位 u_k との変形適合条件 (compatibility) を示し，式 (20・c) は各部材の仮想変形の絶対値 $(\delta_i^+ + \delta_i^-)$ が常にある許容限界値 $(\rho l_i/\sigma_a)$ を越えてはならないという変形制約を意味している．ただし，δ_i^+, δ_i^-＝部材 i の仮想伸びおよび仮想縮みで無次元量．u_k＝トラスの節点における水平および垂直方向の仮想変位で無次元量．

以上より，応力のつり合い場において応力制約を満足するよう構造重量を最小にすることと，変形の適合場においてある変形制約を満足するよう仮想外力仕事を最大にすることが同一（$V=W$）であることが示されている．したがって，静定トラスの応力制約のみというきわめて特殊な場合における最小重量設計の双対問題は，最大仮想仕事設計になっている．以上のような簡単な場合やさらに一般的な場合に対して，著者らが示した最大荷重設計と在来の最小重量設計との関係についてお伺いしたいと思います．

以上3点について著者らのご見解をお伺い致します．

8) 瀬口靖幸：はたらきとかたち，工学設計の接点，数理科学，サイエンス社，pp. 18～23，1981年7月．
9) たとえば，坂口　実：数理計画法，培風館，pp. 126～141，1968年．

▶回答者 (*Closure*)――長谷川彰夫（東京大学）・阪上精希（新日本製鐵）・松浦　聖（名古屋工業大学）
By Akio Hasegawa, Seiki Sakaue and Sei Matsuura

著者らの論文に関し，貴重なるご討議を賜り感謝致します．ご指摘の項目に関し，説明と補足を致します．

1．解の妥当性について

著者らが提案する最大荷重設計の計算例を討議者らは **Fig. 9** の変位制約がない場合の結果に関し，最小重量設計により検証している．しかし，著者らの単純な表記の誤りにより，**Fig. 9** (b) の実線と破線が逆になっている．このことは **Fig. 10** (b) で参考のため図示した変位

表―3 最大荷重設計法と最小重量設計法の比較（著者）

(P=100 t, σ_a=1 412 kg/cm²)

	Maximum Load Design		Minimum Weight Design	
	Fig. 10	再検証	石川	杉本
A_1 ($A_1/\Sigma A_i$)	7.5 (0.025)	16.4 (0.055)	15.1 (0.050)	15.9 (0.053)
A_2 ($A_2/\Sigma A_i$)	67.5 (0.225)	62.7 (0.209)	63.3 (0.211)	63.1 (0.210)
A_3 ($A_3/\Sigma A_i$)	87.0 (0.290)	98.5 (0.328)	96.8 (0.323)	97.9 (0.325)
A_4 ($A_4/\Sigma A_i$)	24.0 (0.080)	13.6 (0.045)	14.9 (0.050)	14.2 (0.047)
A_5 ($A_5/\Sigma A_i$)	18.0 (0.060)	27.4 (0.091)	26.0 (0.087)	27.0 (0.090)
A_6 ($A_6/\Sigma A_i$)	33.0 (0.110)	27.3 (0.091)	27.9 (0.093)	27.6 (0.092)
A_7 ($A_7/\Sigma A_i$)	57.0 (0.190)	54.8 (0.182)	55.8 (0.186)	55.1 (0.183)
ΣA_i (R)	299.9 (33.34)	300.7 (33.26)	299.8 (33.35)	300.8 (33.24)
σ_1	1 392	1 408	1 406	1 408
σ_2	1 404	1 411	1 412	1 408
σ_3	−1 447	−1 407	−1 412	−1 408
σ_4	−1 326	−1 410	−1 412	−1 405
σ_5	−1 439	−1 408	−1 412	−1 401
σ_6	1 357	1 409	1 412	1 406
σ_7	−1 571	−1 403	−1 412	−1 409
$R\times\bar{P}_{\max}$	0.139 (100 t)	0.139 (100 t)	0.139 (100 t)	0.139 (100 t)

注） A_i : cm², σ_i : kg/cm²

制約がなく座屈を考慮していない場合の結果との比較から明らかである．

この計算例を対象に，最大荷重設計と最小重量設計を比較する．**Fig. 9** または **Fig. 10** から読み取れる数値，著者らが別の初期値から改めて計算した結果，および最小重量設計による討議者らの結果を**表―3**に示す．この表によれば，討議者らと著者らの再検証の結果が，最適断面積 A_i，最適状態での部材応力 σ_i，および最大荷重 $R\times\bar{P}_{\max}$ のいずれも数値誤差を除き一致している．**Fig. 9** から読み取った数値と再検証の結果の間には，若干の相違もみられるが，これは生データの表示ではなく図からの読取りのため，避けられない誤差といえる．

この比較から，数値的な例証という限定された範囲で，最大荷重設計と最小重量設計の等価性が説明されると考えられる．**Fig. 9** (b) の単純な表記の誤りをおわびするとともに，討議者らの最小重量設計による検証データの提供に感謝したい．

2．計算の効率性について

著者らが構造最適化の手法として新たに最大荷重設計の方法を提案している理由の一つは，定式化が実質的な意味において「制約条件をもたない多変数関数の極値問題」に帰着できることにある．従来最も用いられている最小重量設計では，目的関数そのものは比較的簡単な関数で与えられるが，制約条件式が一般に複雑となり，最適化手法も SUMT 法，SLP 法や可能実行法などの「制約条件付きの極値問題」の解法を用いなければならない．

最適化計算の効率性について一般的に比較することはほとんど不可能に近い．しかし，制約条件をもつ問題を解くよりも，制約条件のない問題を解く方が，計算のアルゴリズムもやさしく，最適化計算の経験が浅い者にとっても，解析が行いやすいことは容易に予想される．著者らが最大荷重設計の優位性を主張しているのは，一つにはこの点にある．別の見方をすれば，最小重量設計では，簡単な目的関数と複雑な制約条件の組合せとなるのに対し，最大荷重設計では，複雑な目的関数と簡単な制約条件の組合せとなる．さらに実際には，変数の正値条件などを除いて，最大荷重設計では制約条件を消去している[2]．

計算の効率性を討議者が指摘する演算時間，収束性の立場のみで考えると，関係する要因がきわめて多くかつ複雑に影響すると思われ，現段階では比較が難しい．参考のため，著者らが用いた Powell の共役方向法による最大荷重設計の計算で，独立変数に関する許容相対誤差の1つを 0.01, 0.1, 0.2 とした場合の目的関数の収束値，および構造解析回数を**表―4**に示す．この結果から，収束判定条件の設定により，収束の有無，構造解析回数に相違が現われるものの，必要な目的関数の収束値または最終探索値としては，すべての場合に満足できる結果

表―4 最大荷重設計の精度の例

R	許容相対誤差	0.01	0.1	0.2
29.15	構造解析回数	―	278	125
	$P_{\max}\times\bar{R}$	0.1389	0.1388	0.1385
33.34		―	334	209
		0.1390	0.1378	0.1376
57.14		500	250	125
		0.1390	0.1388	0.1388
89.29		―	―	181
		0.1389	0.1389	0.1386
158.73		306	306	153
		0.1386	0.1386	0.1385
357.14		―	―	210
		0.1388	0.1388	0.1386
1 428.57		―	391	209
		0.1389	0.1369	0.1352
平均		403	312	173.1
		0.1389	0.1382	0.1380

注） ―：規定回数で収束せず．収束しない場合は最終探索値を示す．

が得られていることがわかる．このように，ほぼ正解が得られた場合でも，たとえば，個々の計算者による収束判定条件の選択で計算効率に違いが現われることは当然のことながら注意されてよい．

討議者らは変数を無次元化して計算すると収束性が悪くなると指摘している．しかし，著者らの数値計算では，無次元量を用いたうえで，収束判定条件では許容相対誤差（たとえば $|(x_n-x_{n-1})/x_n|\leq\epsilon$, x_n は無次元量）を用いており，無次元量の導入による精度の悪化はない．逆に，討議者らが指摘するような数値のオーダーの不ぞろいによる収束性の悪化を避けるためにも，無次元量の導入が好ましいと著者らは考える．

3. 双対性について

1.ですでに検証したように，実際の構造設計の問題では，最大荷重設計と最小重量設計の解は一致する場合が多いと考えてよい．ただし，局所的最大（最小）値が複数以上存在する場合には，最大荷重設計と最小重量設計の解が一致する保証はない．しかし，このことは最小重量設計（または最大荷重設計）の範囲で同一の問題を解く場合にもいえることであり，非線形最適化問題を数値的に解析するときの避けられない問題であろう．

したがって，最大荷重設計と最小重量設計の双対性または等価性を証明する必要があるのは，最小重量設計（または最大荷重設計）において，最小値および最小値を与える独立変数が唯一に限る場合に限定することができよう．直感的にいえば，この等価性は成立するであろうと著者らは考えている．このことを数学的に証明するには，文献 2）で述べた最大荷重設計と最小重量設計の定式化を一般的な関数に変換し，数学的に厳密な検討を加える必要がある．

第1著者は，討議者らと同様に，この数学的証明の必要性を痛感しており，現在，新しい共同研究者の協力を得て検討を進めている．現時点では，検討段階にあるが，証明は可能であろうと考えている．しかし，その内容をここで触れるのは，現在検討中であることや討議に対する回答の性格，ページ数の制約などを考え，差し控えたい．一定のまとまりを得た段階で発表する機会を考えたいと思う．

討議者らが紹介されている内容について若干の疑問を述べる．この例題は，応力制約のみを考えた静定構造物の最適化問題となっている．したがって制約条件に現われる部材力は，独立変数である断面積と無関係に，外力条件により一意的に決まる．このため，最適解を与える個々の部材の最小断面積は，全応力状態の条件から，最適化計算をするまでもなく簡単に求められる．すなわち，この問題は，実質的な意味で，構造物の最適化問題となっておらず，部材要素の最適化問題である．部材の最適化問題では，断面形状の最適化が問題であり，この例題のように断面積を独立変数としたときには，最適化問題としての意味がなくなる．構造物の最適化問題の例題としては適当でないと思われる．

式（19）の最小重量設計に LP の双対定理を適用して式（20）を得ている．この操作自身は特に問題ないと考えるが，Lagrange 乗数に対応する u_k がなぜ変位と解釈できるのか説明がない．さらに，応力制約のみの力の場の最適化問題という物理的な問題を，双対定理という純粋な数学的変換でなぜ変位制約のみの変位場の最適化問題という物理的内容の異なる最適化問題に変換され得るのかも著者らは疑問に思う．討議者らが紹介されたこの文献 8）の内容は，必ずしも著者らは同意できず，検討の必要があると考えている．

この討議に対する回答のうち，**表―3, 4** の数値計算を名古屋工業大学大学院 江場田直氏の協力を得て実施した．ここに記して感謝する．