

数種の平板理論の動特性 (自由振動と分散特性) に関する研究

STUDY ON DYNAMIC CHARACTERISTICS (FREE VIBRATION AND DISPERSION RELATION) OF SEVERAL PLATE THEORIES

平 島 健 一*・根 岸 嘉 和**

By Ken-ichi HIRASHIMA and Yoshikazu NEGISHI

1. 結 言

平板の面内および面外方向への動特性に関する研究は従来より膨大な数の論文が発表され、それについての優れた Review が Leissa によりまとめられており¹⁾、そこには曲げの古典理論の確立がなされて以降の実用的使用に耐えると思われる、20 世紀に入ってから 1960 年代までの全世界において発表された種々の形状、荷重条件、境界条件を有する平板の固有値と固有モードに関する約 500 の文献についてのきわめて適切な整理がなされている。またその後の文献についても同氏^{2)~4)}や Bert⁵⁾らにより整理が行われているが、それ以降においてもきわめて多くの文献が量産されているのが現状である。

ところで、ここで平板理論、特に振動する平板理論の発達の歴史的経緯の概略を振り返っておこう^{6)~12)}。まず、1787 年 Chladni が振動する平板の nodal patterns を実験的に提示して以来、板の振動に対する興味は多くの科学者や工学者を引きつけたが、当時は平板の理論式(いわゆる曲げの古典理論式)はまだ定式化されていなかった。そこで、フランス科学アカデミーは 1808 年 Chladni の公開実験に立ち合ったナポレオン皇帝の提案を受けて、1811 年 10 月をその第 1 回目の期限として板の振動理論の誘導および理論結果と Chladni の実験結果との比較を懸賞論文の課題とした。三度にわたってそれに応募した Sophie Germain (1776-1831) は曲げ振動の等方性板に対する正しい基礎方程式を誘導するとともに賞を獲得した(1815 年)。本文の 2. の式 (10) で示される方程式は今では平板曲げの古典理論式ないしは Germain-Lagrange 方程式とよばれている(なお Lagrange の名が付される由縁は彼女の提出した最初の論文に対して、誤りを発見し修正して正しい結果を与えると

いう重要な貢献をしたことによる)。ほぼ時を同じくして、Lagrange, Legendre, Navier, Fourier, Stokes, Poisson, Cauchy および Euler をはじめとして他の多くの著名な学者もこの課題に大きな興味を示した。

Germain の memoir の発行(1821 年)はまた曲げを受ける薄板の適切な境界条件に関する長きにわたる論争の出発でもあった。Poisson, St. Venant, W. Thomson (Kelvin), Tait, Mathieu, Boussinesq および Kirchhoff らは適切な境界条件の定式化に対して貢献をなしたが、ことに Kirchhoff による論文(1850 年)は変分法に基づいた板の方程式と正確な境界条件の完全な誘導を含んだ優れたものであり、それには解の唯一性定理と Chladni の実験値に対する理論値との比較も含んでいるものであった(なお Poisson は 1829 年に円形板の振動に関する問題を解き、Chladni と同様の手法を用いた Savart の粉体をまぶした平板に対する nodal patterns の実験結果ときわめてよく一致することを検証した)。

同じ時期に板の面内運動に関する研究も実施され、伸縮運動をする等方性薄板に対する支配方程式が Poisson により誘導された(1829 年)(これは本文中の式 (14) に提示されている)。しかしながら、曲げ運動の場合と異なってこの薄板の伸縮運動の問題はごく最近まであまり注目を集めなかった。

1889 年 Rayleigh¹³⁾ は平板理論の歴史に一つの転開点を示す論文を発表した。その論文において、Rayleigh は線形弾性論から任意厚さの等質・等方の平板の振動を決定したが、彼はまたそれらの結果が板厚零の極限において薄板理論の結果となることを示すとともに、波長が零に近づくときには、半無限体内の表面波(Rayleigh の表面波)の結果にも帰着されることを示した。Rayleigh の定式化に基づいて Lamb¹⁴⁾ は厚板の波動伝播(Rayleigh-Lamb 波)の詳細について研究した。この Rayleigh-Lamb 波の特性振動数は構造部材に対しては 10 kHz もしくはそれ以上の大きさのものであるため、当時

* 正会員 工博 山梨大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 福島工業高等専門学校講師 土木工学科

はほとんど注目を集めなかった。

異方性板の波動・振動の研究の歴史は等方性に比べかなり遅れをとった。すなわち、1829年に薄い結晶板の伸縮および曲げ振動に対する方程式が Cauchy により誘導されたが、それから約半世紀の間はさしたる進展はみられなかった。19世紀の終わりに近くなって、やっと結晶物理学が実際に始動し始め、それに伴った多くの新発見の一つに、1880年の Curie 兄弟による piezoelectricity があるが、この piezoelectric な効果すなわち、electro-mechanical な連成効果は近代通信技術に重大な衝撃を与えるとともに平板理論のさらなる発展に重要な刺激をうながし、そのことが弾性表面波の伝搬特性を用いた band-pass filter への応用による最近の注目すべき遅延回路から多重通信にわたる広範囲の通信革命への幕引き役をになって現在に至ることとなったのである¹⁷⁾。

ところで線形弾性論に基づいた運動する平板の境界値問題に対する厳密解を見出すことは一般的な場合には不可能であり、Rayleigh および Lamb は板の上下表面に外力が作用しない無限に広がった板の厳密解を見出すことに成功したに過ぎなかった。事実、たとえば板の端面も応力自由の境界条件をもつ板（すなわち板の上下および端面のすべての境界で応力自由の板）に対しては、いまだに一般解が見出されていない。したがって、解析的な指針として取り組むべき課題は、境界を有する平板に適するように弾性厳密解の近似解を見出すか、あるいは板の近似理論を閉じた形で求め得るように発展させるかである。

Cauchy (1829年) および Poisson (1829年) に従って、Mindlin は後者のアプローチを採用し、1951年彼は等方性平板の曲げ振動に及ぼす回転慣性とせん断変形の影響を含めた平板の近似理論を発表した¹⁸⁾。これははりに対する Timoshenko 方程式と同等のレベルのものであり現在では通常、平板に対する Mindlin 方程式とよばれ、薄板に対する Germain-Lagrange 方程式（古典平板理論）の一つの拡張として、かなりの高次の振動数範囲に対しても適用できるものである（同じ年に Mindlin は異方性平板の曲げ理論も発表した¹⁹⁾）。そして Mindlin は 1955年に板の面内、面外を含めた振動問題の理論的取扱いに関する総合報告²⁰⁾を発表するに至る。これはそれ以前の弾性厳密解と近似解法について鳥瞰するとともに等質な等方および異方性平板の厳密解に対する振動スペクトルの計算および近似解析理論についての取組み方の指針と幾つかの具体例を示したもので平板の振動問題の研究において大きなエポックとなるものであった（しかし、残念なことはいわゆる市販本の形で公刊されなかったためにあまり知られていない）。その後 Mindlin とその協力者は平板、はりの波動・振動

に関する 40 以上の論文²¹⁾を発表して現在に至り、この分野の発展に大きな貢献をしたのである。これ以降の発展は本節の初めに述べた幾つかの Reviews^{1)~5)}その他²²⁾によってうかがうことができる。

以上のような歴史的経過を踏まえ、主として本論文で取り上げようとする課題は古典平板理論および Mindlin 理論を含めて、いわゆるせん断変形を含む板厚方向の諸成分や回転慣性の効果等を考慮した面外（曲げ）および面内（伸縮）運動をする平板の近似理論に対する系統的な提示と矩形板の自由振動および分散特性の問題についてであり、取り上げた幾つかの理論から求められた計算値を厳密解と比較し、その精度特性の検討を動的問題に対して実施することである。なおここでは対象とする平板を一定厚さの等質等方性弾性体に限定する。

2. 動的な項を含む平板理論の概要

静的な荷重が作用する平板理論の最近までの発達過程およびそれらの代表的な理論式の概要と特徴および幾つかの数値計算例について、著者らは別論文で発表した^{23), 24)}が、ここでは動的な場合に焦点を絞って述べることにする。これは先の静的な理論式に慣性力項を適切に導入してやればよく、その一つとして、たとえば、Mindlin 理論¹⁸⁾はせん断変形を考慮した静的平板理論 (Reissner 理論²⁵⁾) とは異なり板厚方向のせん断応力分布を一定値とする代償に、せん断補正係数 κ^2 を導入した理論) に通常の上方向の変位加速度による慣性力 (translational inertia force) と断面の回転による慣性力 (rotatory inertia force) をともに導入することにより求められるものである。したがって著者らの前論文²⁴⁾中の Table 1 で与えた各種の理論はすべて動的な平板理論への拡張が可能となる。ここでは主として Germain-Lagrange, Mindlin, Ambartsumyan²⁶⁾, Schmidt²⁷⁾, Voyiadjis-Baluch²⁸⁾ および著者らによる General Higher-Order 理論²⁹⁾等のごく最近の提案になる諸理論を中心にして述べ、さらに Vlasov による初期関数法 (Method of Initial Function; MIF) の概要を説明し、各理論式間の関連性についても言及する。

まず、系統的な各理論式間の位置付けが可能となるという理由から、はじめに Voyiadjis および Baluch の理論²⁸⁾ (B-V 理論) を若干改良した理論 (修正 B-V 理論) の支配方程式を取り上げよう。なお、B-V 理論はいわゆる Kirchhoff-Love の仮定をはずし、板厚方向の成分 (せん断応力 τ_{xz} , τ_{yz} , 直応力 σ_z および直ひずみ ϵ_z) の影響を定式化過程の段階で考慮し、閉じた形の支配式を導出したものであるが、修正 B-V 理論は次の 2 点についてこれを改良したものである。すなわち、①

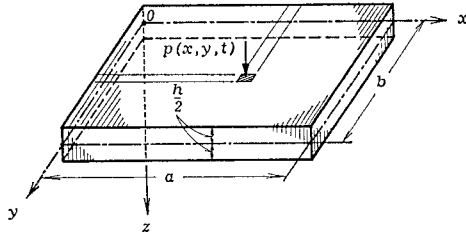


Fig. 1 Geometry of rectangular plate and rectangular Cartesian coordinate system (x, y, z).

τ_{xz} , τ_{yz} の放物線分布仮定をもとにして σ_z の評価には後出の三次元弾性論の運動方程式 (20) を満たすようにする, ② ε_z の評価に際し構成関係式 (Hooke の法則) を用いるため必要となる面内直応力の和 $\sigma_x + \sigma_y$ の算定にあたって曲げモーメント和 $M = M_x + M_y$ に加えて, 軸力 $N = N_x + N_y$ の影響も考慮することによって変位および応力の板厚方向の分布形の改善を図る. 順を追ってこのことを説明しよう.

いま Fig. 1 のような座標系を設定し, 平板の上表面に鉛直下向きの外荷重 $p(x, y, t)$ が作用する場合を対象とすれば, 面外 (板厚) 方向に関連する上述の応力, ひずみは次のように与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{3}{2h} Q_x \left\{ 1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right\}, \\ \tau_{yz} &= \frac{3}{2h} Q_y \left\{ 1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right\}, \\ \sigma_z &= -\frac{p}{4} \left\{ 2 - 3 \left(\frac{2z}{h} \right) + \left(\frac{2z}{h} \right)^3 \right\} \\ &\quad - \frac{h}{4} \left\{ \left(\frac{2z}{h} \right) - \left(\frac{2z}{h} \right)^3 \right\} \rho \ddot{w}_0, \\ \varepsilon_z &= -\frac{p}{4E} \left\{ 2 - 3 \left(\frac{2z}{h} \right) + \left(\frac{2z}{h} \right)^3 \right\} - \frac{12\nu}{Eh} h^3 z M \\ &\quad - \frac{h}{4E} \left\{ \left(\frac{2z}{h} \right) - \left(\frac{2z}{h} \right)^3 \right\} \rho \ddot{w}_0 - \frac{\nu}{Eh} N. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} N &= N_x + N_y = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x + \sigma_y) dz, \\ M &= M_x + M_y = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x + \sigma_y) \cdot z dz. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

(上式で下線の項を省略したものが B-V 理論である.)

ここに, Q_x, Q_y は断面の面外方向せん断力, \ddot{w}_0 は板中央面の鉛直変位を時間 t によって 2 階偏微分したものであり, また, E, ν はそれぞれ弾性係数, ポアソン比を表わす.

上式を出発点として動弾性学の基礎式に代入整理すれば, 最終的に平板の面外方向 (曲げ) の支配方程式は次のようになる (Q_y に関する支配式は省略).

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} = -p + h\rho\ddot{w}_0 - \frac{\nu\rho}{2E} \ddot{M} + \frac{9h^2}{160} \cdot \frac{\rho}{E} \ddot{p}$$

$$\left. \begin{aligned} & - \frac{7h^3}{480} \cdot \frac{\rho^2}{E} \omega_0^{(4)}, \\ Q_x & - \frac{h^2}{10} \nabla^2 Q_x + D \nabla^2 \omega_0, \\ & = - \left\{ \frac{h^2(1+\nu)}{10(1-\nu)} - \frac{h^2\nu}{10(1-\nu)} \right\} p, x - \frac{h^2}{10} \cdot \frac{\rho}{G} \ddot{Q}_x \\ & + \left\{ \frac{h^3}{60} \cdot \frac{(11+\nu)}{(1-\nu)} - \frac{h^3}{60} \cdot \frac{\nu}{(1-\nu)} \right. \\ & \left. + \frac{11h^5}{13440(1-\nu^2)} \nabla^2 \right\} \rho \ddot{w}_0, x \\ & - \frac{(621+555\nu)}{40320} \cdot \frac{h^5 \rho^2}{E} \omega_0^{(4)}, \\ & + \frac{D}{R} \nabla^2 M, x - \frac{D}{T} \nabla^2 p, x - \frac{h^2}{40} \cdot \frac{\nu(3+\nu)}{1-\nu} \\ & \cdot \frac{\rho}{E} \ddot{M}, x + \frac{h^4}{22400} \cdot \frac{(191+61\nu)}{(1-\nu)} \cdot \frac{\rho}{E} \ddot{p}, x, \\ & \frac{1}{1+\nu} M - \frac{D}{R} \nabla^2 M \\ & = -D \nabla^2 \omega_0 - \left\{ \frac{12D}{5Eh} + \frac{D}{T} \nabla^2 \right\} p \\ & + \frac{D}{S} \left(h\rho\ddot{w}_0 - \frac{\nu\rho}{2E} \ddot{M} + \frac{9h^2}{160} \cdot \frac{\rho}{E} \ddot{p} \right) \\ & - \left\{ \frac{h^3 \cdot \nu}{30(1-\nu^2)} - \frac{11h^5}{13440(1-\nu^2)} \nabla^2 \right\} \rho \ddot{w}_0 \\ & - \frac{7h^3}{480} \cdot \frac{D}{S} \cdot \frac{\rho^2}{E} \omega_0^{(4)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \frac{D}{R} = \frac{\nu h^2}{40(1-\nu^2)}, \\ \frac{D}{S} &= \frac{h^2}{5(1-\nu)}, \quad \frac{D}{T} = \frac{13h^4}{4480(1-\nu^2)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \dots\dots\dots (6)$$

なお, 式中のコンマ (,) の後の添字はその添字の座標による偏微分をまた $\omega_0^{(4)}$ は ω_0 の時間 t による 4 階偏微分を表わす. 式 (4) を特殊化することにより, 以下のように各種の理論式に帰着する. すなわち, まず実線部を削除すれば B-V 理論に一致し, さらに点線部と第 4 式を削除すれば 動的平板問題の基本式として名高い Mindlin 理論でせん断補正係数を $\kappa^2 = 5/6$ としたものおよび Schmidt 理論で非線形項を無視したものに一致する. 他方, 第 4 式と実線部および点線部を削除した式において一点鎖線部の項を復活させれば, Ambartsumyan 理論 (A-理論) に一致することになる.

Mindlin 自身の理論の誘導は κ^2 を導入し, せん断力成分 Q_x, Q_y と面内変位の線形仮定: $u = z\beta_x(x, y, t)$, $v = z\beta_y(x, y, t)$ による断面の回転角 β_x, β_y との関係:

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \kappa^2 Gh(\beta_x + w_{0,x}), \\ Q_y &= \kappa^2 Gh(\beta_y + w_{0,y}). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

を用いることによって達成されるものであるが、上式を上述の項の省略によって得られた式に代入すれば、いわゆる変位成分 w_0, β_x, β_y で表示した Mindlin 理論の支配式が次のように求められる (β_y に関する支配式は省略)。

$$\left. \begin{aligned} \kappa^2 Gh(\mathcal{F}^2 w_0 + e) + p &= h\rho \ddot{w}_0, \\ \frac{D}{2} \{ (1-\nu)\mathcal{F}^2 \beta_x + (1+\nu)e_{,x} \} \\ - \kappa^2 Gh(\beta_x + w_{0,x}) &= \frac{h^3}{12} \rho \ddot{\beta}_x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここに、

$$e = \beta_{x,x} + \beta_{y,y}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \dots\dots\dots (9)$$

ついでながら付言しておく、上述のように特殊化して得られた式のうち、A-理論で動的な項をすべて除けば Reissner 理論²⁹⁾に、Mindlin 理論で動的項を削除し、 $\kappa^2=5/6$ とおけば Panc の Component 理論³⁰⁾ (また $\kappa^2=1.0$ とすれば Hencky 理論³¹⁾) にそれぞれ一致する。さらにその式で平面保持 (せん断変形なし) の仮定: $\beta_x = -w_{0,x}, \beta_y = -w_{0,y}$ を設定し回転慣性の項を無視すれば $Q_x = -D\mathcal{F}^2 w_{0,x}, Q_y = -D\mathcal{F}^2 w_{0,y}$ となり、平板の振動を支配する、いわゆる古典理論式 (Germain-Lagrange の式) :

$$D\mathcal{F}^4 w_0 = p - h\rho \ddot{w}_0 \dots\dots\dots (10)$$

が得られる。

ここで後に変位、応力状態のモード等の検討に際して必要となるので、上記の支配方程式に対応する変位 u, w , 面内応力 σ_x, τ_{xy} を書き下しておけば次のようである。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 - z w_{0,x} + \frac{z}{2 Gh} \left\{ 3 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right\} Q_x \\ &\quad + \frac{2\nu z^3}{Eh^3} M_{,x} + \frac{1}{4E} \left\{ z^2 - \left(\frac{z^3}{h} \right) + \left(\frac{2z^5}{5h^3} \right) \right\} p_{,x} \\ &\quad + \frac{\nu z^2}{2Eh} N_{,x} - f(z) \ddot{w}_{0,x}, \\ w &= w_0 - \frac{6\nu z^2}{Eh^3} M - \frac{p}{4E} \left\{ 2z - \left(\frac{3z^2}{h} \right) + \left(\frac{2z^4}{h^3} \right) \right\} \\ &\quad - \frac{\nu z}{Eh} N + f'(z) \ddot{w}_0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[(u_{0,x} + \nu v_{0,y}) - z(w_{0,xx} + \nu w_{0,yy}) \right. \\ &\quad + \frac{z}{2 Gh} \left\{ 3 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right\} (Q_{x,x} + \nu Q_{y,y}) \\ &\quad - \frac{\nu(1+\nu)}{4E} \left\{ 2 - 3 \left(\frac{2z}{h} \right) + \left(\frac{2z}{h} \right)^3 \right\} p \\ &\quad - \frac{\nu(1+\nu)}{2Eh} f''(z) \ddot{w}_0 \\ &\quad \left. + \frac{2\nu z^3}{Eh^3} (M_{,xx} + \nu M_{,yy}) \right] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &+ \frac{1}{4E} \left\{ z^2 - \left(\frac{z^3}{h} \right) + \left(\frac{2z^5}{5h^3} \right) \right\} (p_{,xx} + \nu p_{,yy}) \\ &+ \frac{\nu z^2}{2Eh} (N_{,xx} + \nu N_{,yy}) \\ &+ f(z) (\ddot{w}_{0,xx} + \nu \ddot{w}_{0,yy}) \Big], \\ \tau_{xy} &= G \left[(u_{0,y} + v_{0,x}) - 2z w_{0,xy} \right. \\ &+ \frac{z}{2 Gh} \left\{ 3 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right\} (Q_{x,y} + Q_{y,x}) \\ &+ \frac{4\nu z^3}{Eh^3} M_{,xy} + \frac{1}{2E} \left\{ z^2 - \left(\frac{z^3}{h} \right) + \left(\frac{2z^5}{5h^3} \right) \right\} p_{,xy} \\ &+ \frac{\nu z^2}{Eh} N_{,xy} + 2f(z) \ddot{w}_{0,xy} \Big], \\ f(z) &= \frac{\rho h}{4E} \left\{ \left(\frac{z^3}{3h} \right) - \left(\frac{2z^5}{5h^3} \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

これらの式において、先と同様な特殊化により、Mindlin 理論を除くそれぞれのレベルでの理論式の変位、応力が求められるのはいうまでもない。

同様に式 (1) の面外方向応力の仮定を基点にして平板の面内方向 (伸縮) の支配方程式を求めれば次のようになる (v_0 に関する支配式は省略)。

$$\left. \begin{aligned} \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ u_{0,xx} + \frac{(1-\nu)}{2} u_{0,yy} + \frac{(1+\nu)}{2} v_{0,xy} \right\} \\ = h\rho \ddot{u}_0 + \left\{ \frac{h}{2} \cdot \frac{\nu}{(1-\nu)} - \frac{h^3}{48(1-\nu^2)} \mathcal{F}^2 \right\} p_{,x} \\ + \frac{h^3}{48} \cdot \frac{\rho}{E} \ddot{p}_{,x} \\ + \frac{h^2}{24} \cdot \frac{\nu}{(1-\nu^2)} \mathcal{F}^2 N_{,x} + \frac{h^2}{24} \cdot \frac{\nu\rho}{E} \dot{N}_{,x} \\ (1-\nu)N - \frac{\nu h^2}{24} \mathcal{F}^2 N \\ = Eh(u_{0,x} + v_{0,y}) - \left(\nu h - \frac{h^3}{48} \mathcal{F}^2 \right) p. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 u_0, v_0 は平板中央面 ($z=0$ の面) における x, y 方向の変位成分を表わす。上式で第 3 式および実線部を無視すれば B-V 理論に、さらに点線部を削除すれば A-理論に、それぞれ一致する。A-理論では面内直応力成分 σ_x, σ_y に σ_z の影響が具体的な形で式中に入る、断面力としての軸力 N_x, N_y に σ_z (すなわち外荷重 p) の影響が取り込まれ、したがって面内挙動の支配式に $\partial p/\partial x, \partial p/\partial y$ の項が含まれることになる。

他方 Reissner 理論で動的な項を考慮したのでは、 σ_x, σ_y が上下逆対称な直線分布で与えられることになり、外荷重 p による N_x, N_y は常に零となってしまうために、 σ_z の影響が具体的な形で入らず、式中に p の項は現われない、したがって面内挙動の支配式は、 σ_z の影響を無視した Schmidt 理論や Mindlin 理論と同様伸

縮運動をする平板の古典理論式（Poisson の式）とまったく同じ次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u_{0,xx} + \frac{(1-\nu)}{2} u_{0,yy} + \frac{(1+\nu)}{2} v_{0,xy} &= \frac{1-\nu^2}{E} \rho \ddot{u}_0 \\ v_{0,yy} + \frac{(1-\nu)}{2} v_{0,xx} + \frac{(1+\nu)}{2} u_{0,xy} &= \frac{1-\nu^2}{E} \rho \ddot{v}_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

次に著者らの General Higher-Order 理論²⁹⁾ (G.H. 理論と略称) の概略を述べよう。これは、まず、3次元変位 u, v, w を次式のように板厚方向の座標 z に関してべき級数展開できるものと仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot u^{(n)}(x, y, t), \\ v &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot v^{(n)}(x, y, t), \\ w &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot w^{(n)}(x, y, t). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

上式の $u^{(n)}, v^{(n)}$ および $w^{(n)}$ は n 次の変位係数とよばれる面内座標 (x, y) および時間 t に関する未知関数である。式 (15) の変位場を出発点として Hamilton 原理を用いて式の整理を行えば、最終的に、これらの変位係数で表示した支配方程式が次式のように求められる ($v^{(m)}$ に関する支配式は省略)。

(面外挙動の支配方程式) :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} B_{mn} [GF^2 u^{(m)} + (\lambda + G) e_{,x}^{(m)} + \{(m+1)\lambda - nG\} w_{,x}^{(m+1)}] - 2G \left(\frac{h}{2}\right)^n w_{,x}^{(0)} \\ - nG \sum_{m=0,2,\dots}^{\infty} B_{m,n-1} (m+1) u^{(m+1)} \\ = \rho \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} B_{mn} \ddot{u}^{(m)}, \quad (n=1, 3, 5, \dots) \\ \sum_{m=0,2,\dots}^{\infty} B_{mn} [GF^2 w^{(m)} + \{(m+1)G - n\lambda\} e^{(m+1)}] \\ - n(\lambda + 2G) \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} B_{m,n-1} (m+1) w^{(m+1)} \\ = \left(\frac{h}{2}\right)^n p + \rho \sum_{m=0,2,\dots}^{\infty} B_{mn} \ddot{w}^{(m)}, \\ (n=0, 2, 4, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

(面内挙動の支配方程式) :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=0,2,\dots}^{\infty} B_{mn} [GF^2 u^{(m)} + (\lambda + G) e_{,x}^{(m)} + \{(m+1)\lambda - nG\} w_{,x}^{(m+1)}] - nG \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} B_{m,n-1} (m+1) u^{(m+1)} \\ = \rho \sum_{m=0,2,\dots}^{\infty} B_{mn} \ddot{u}^{(m)}, \quad (n=0, 2, 4, \dots) \\ \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} B_{mn} [GF^2 v^{(m)} + \{(m+1)G - n\lambda\} e^{(m+1)}] \\ \cdot 2\lambda \left(\frac{h}{2}\right)^n - e^{(0)} - n(\lambda + 2G) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \cdot \sum_{m=0,2,\dots}^{\infty} B_{m,n-1} (m+1) w^{(m+1)} \\ = \left(\frac{h}{2}\right)^n p + \rho \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} B_{mn} \ddot{w}^{(m)}, \\ (n=1, 3, 5, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \\ B_{mn} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{m+n} \cdot \frac{h^{m+n+1}}{m+n+1}, \\ e^{(m)} &= u_{,x}^{(m)} + v_{,y}^{(m)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

また、本理論での境界条件を具体的な形で示しておく、たとえば x 軸に直な境界端面において

$$\left. \begin{aligned} u^{(n)}, \int_{-h/2}^{h/2} z^n \sigma_x dz; \quad v^{(n)}, \int_{-h/2}^{h/2} z^n \tau_{xy} dz; \\ w^{(n)}, \int_{-h/2}^{h/2} z^n \tau_{xz} dz; \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

のいずれか一方が規定されることである。

上記の式 (16), (17), (19) で $u^{(3)}, v^{(3)}, w^{(2)}$ までの変位係数を採用し、動的な項を無視すれば Lo らの理論³²⁾ に完全に一致する。なお変位係数 $u^{(m)}, v^{(m)}, w^{(m)}$ を用いて構成方程式、幾何関係式を通じて応力成分を決定すれば著者らの既報の論文²⁴⁾ の式 (19) が求められる。

それらのうち、面外応力成分 $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ はその論文でも指摘したように、そのままでは上下の境界条件を満足しないとともに面内応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ に比べて精度的にかなり劣ることになるが、これを回避するため、以下のような手続きによって修正を施すことにする。すなわち物体力を無視した三次元弾性論の運動方程式 :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} &= \rho \ddot{u}, \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} &= \rho \ddot{v}, \\ \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} &= \rho \ddot{w}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

と組み合わせると面外応力成分 $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ を決定すれば、既報論文²⁴⁾ の式 (28) と同形になるが、それらの式中の $\Gamma_x^{(n)}, \Gamma_y^{(n)}$ および $\Gamma_z^{(n)}$ は次式のように慣性項を含んだもので与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_x^{(n)} &= (\lambda + G) e_{,x}^{(n)} + GF^2 u^{(n)} \\ &\quad + (n+1) \lambda w_{,x}^{(n+1)} - \rho \ddot{u}^{(n)}, \\ \Gamma_y^{(n)} &= (\lambda + G) e_{,y}^{(n)} + GF^2 v^{(n)} \\ &\quad + (n+1) \lambda w_{,y}^{(n+1)} - \rho \ddot{v}^{(n)}, \\ \Gamma_z^{(n)} &= (\lambda + 2G) F^2 e^{(n)} + (n+1) \lambda F^2 w^{(n+1)} \\ &\quad - \rho \ddot{e}^{(n)} + (n+1) \rho \ddot{w}^{(n+1)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

この理論では形式上、無限項の変位係数の採用が可能であるが、次節の計算例においては実用上の便から $u^{(3)}, v^{(3)}, w^{(2)}$ までの項を採用した (3-order) および $u^{(5)},$

$v^{(5)}, w^{(4)}$ までの項を採用した (5-order) の 2 種に限定した場合の例を取り上げることにする。

次に以上の手法とは多少異なった理論構成をもったもので、最近注目され幾つかの平板やはりの問題への適用がなされ始めている Vlasov の初期関数法 (MIF) による解法の概略について触れておこう^{33)~43)}。これは三次元動弾性学における (運動), (幾何), (構成) の基礎関係式からまず、面内の応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ を変位 u, v, w , 応力 $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ の項を用いて表示するとともに、これら $u, v, w, \sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ の 6 個の量の間に成立する微分関係式を導出する。次に平板内の任意の座標点 (x, y, z) におけるこれら 6 個の量を板中央面 ($z=0$ の面) のそれぞれの値 (初期関数と名付ける) で表示するために、 $z=0$ のまわりに z のべき乗の形の Maclaurin 級数に展開する。続いて、先に導出した微分関係式に上述の展開式を代入整理し板上下表面 ($z=\pm h/2$) での境界条件から 6 個の初期関数のみの間に成立する二組の微分方程式系を求める。その一つは面外 (曲げ) 挙動に関するものであり、他の一つは面内 (伸縮) 挙動に関するものである。すなわち、微小変形を前提とした等質等方性の弾性板の場合には、それらは互いに連成せず、独立な方程式系を形成するが、このことはこれまでに述べた諸理論による場合ともちろん、同様である。これらの理論式は任意の次数まで形式的に採用できるようになっており、所要の精度が得られるように適当な打ち切り項数を設定すればよい (Cheng の論文⁴⁴⁾ もこの流れをくむ静的な平板理論として位置付けられよう)。なお、本文では、他の研究者によってこの理論を用いて得られた動的な問題に対するデータと、それ以外のここで示した諸理論による数値結果との簡単な比較を実施するにとどめることにする。

3. 周辺単純支持矩形板の固有振動解析および無限板の分散解析

次節の数値例の提示に先だち 2. に示した各種理論を用いて

- 1) 周辺単純支持矩形板の固有振動解析、ならびに
- 2) 無限板を伝播する平面調和波の分散解析

を行う場合の固有振動方程式および分散関係式の誘導とそれらの具体的な形を示す。

(1) 固有振動解析

まず、最初に B-V 型の理論を取り上げ、固有振動の解として周辺単純支持の境界条件

$$\left. \begin{aligned} x=0, a \text{ において } \sigma_x=0, v=0, w=0, \\ y=0, b \text{ において } \sigma_y=0, u=0, w=0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

を満たすように次のごとく仮定する。

曲げ (面外) 振動:

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= W_0^0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \exp(i\omega_{mn}t), \\ Q_x &= Q_x^0 \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \exp(i\omega_{mn}t), \\ M &= M^0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \exp(i\omega_{mn}t), \\ Q_y &= Q_y^0 \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \exp(i\omega_{mn}t). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

伸縮 (面内) 振動:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= U_0^0 \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \exp(i\omega_{mn}t), \\ v_0 &= V_0^0 \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \exp(i\omega_{mn}t), \\ N &= N^0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \exp(i\omega_{mn}t). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

これらを式 (4) あるいは (13) に代入して整理すればそれぞれ最終的に以下に示すような一般形で表わされた固有振動方程式が得られる。ただし、ここでは式の簡単化のために次の略記号を用いることにする。

$$\alpha = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta = \frac{n\pi}{b}, \quad \omega = \omega_{mn} \dots\dots\dots(25)$$

曲げ (面外) 振動:

$$[k_{ij}] \{W_0^0, Q_x^0, Q_y^0, M^0\}^T = \{0, 0, 0, 0\}^T \dots\dots\dots(26)$$

ここに、係数マトリックスの各要素 k_{ij} は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} k_{11} &= -\frac{7h^3}{480} \cdot \frac{\rho^2}{E} \omega^4 - h\rho\omega^2, \quad k_{12} = \alpha, \\ k_{13} &= \beta, \quad k_{14} = \frac{\nu\rho}{2E} \omega^2, \\ k_{21} &= \alpha \left[\frac{(621+555\nu)h^5}{40320} \cdot \frac{\rho^2}{E} \omega^4 \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{11h^5}{13440} \cdot \frac{(\alpha^2+\beta^2)}{(1-\nu^2)} \rho + \frac{h^3}{60} \cdot \frac{(11+\nu)}{(1-\nu)} \rho \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{h^3}{60} \cdot \frac{\nu}{(1-\nu)} \rho \right\} \omega^2 - D(\alpha^2+\beta^2) \right], \\ k_{22} &= -\frac{h^2}{10} \cdot \frac{\rho}{G} \omega^2 + \frac{h^2}{10} (\alpha^2+\beta^2) + 1, \quad k_{23} = 0, \\ k_{24} &= \alpha \left\{ -\frac{h^2}{40} \cdot \frac{\nu(3+\nu)}{(1-\nu)} \cdot \frac{\rho}{E} \omega^2 + \frac{D}{R} (\alpha^2+\beta^2) \right\}, \\ k_{31} &= \frac{\beta}{\alpha} k_{21}, \quad k_{32} = 0, \quad k_{33} = k_{22}, \quad k_{34} = \frac{\beta}{\alpha} k_{24}, \\ k_{41} &= -\frac{7h^3}{480} \cdot \frac{D}{S} \cdot \frac{(1+\nu)\rho^2}{E} \omega^4 + \left\{ -(1+\nu) \frac{hD}{S} \rho \right. \\ &\quad \left. + \frac{11h^5}{13440} \cdot \frac{\rho}{(1-\nu)} (\alpha^2+\beta^2) + \frac{h^3}{30} \cdot \frac{\nu}{(1-\nu)} \rho \right\} \omega^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + (1+\nu)D(\alpha^2 + \beta^2), \\
 k_{42} & = k_{43} = 0, \\
 k_{44} & = \frac{\nu(1+\nu)}{2E} \cdot \frac{D}{S} \rho \omega^2 - \left\{ \frac{h^2}{40} \cdot \frac{\nu}{(1-\nu)} (\alpha^2 + \beta^2) + 1 \right\} \dots\dots\dots (27)
 \end{aligned}$$

2. でみたように、これらの係数 k_{ij} を特殊化することにより幾つかの理論の結果と一致することになる。

すなわち、上記に示したすべての項を採用したものが B-V 理論に著者らの、修正を加えたいわゆる修正 B-V 理論であり、上式中で実線部および点線部を削除したものが B-V 理論²⁶⁾となる。また、 M^0 に関与する部分をすべて取り去った方程式において実線部を削除したものが A-理論²⁶⁾に、さらに、その場合で点線部を削除したものが Schmidt 理論²⁷⁾ならびに Mindlin 理論 ($\kappa^2 = 5/6$) の固有方程式となる。

伸縮（面内）振動：

$$[k_{ij}]\{U_0^0, V_0^0, N^0\}^T = \{0, 0, 0\}^T \dots\dots\dots (28)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned}
 k_{11} & = \frac{2}{1-\nu} \alpha^2 + \beta^2 - \frac{\rho}{G} \omega^2, & k_{12} & = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha\beta, \\
 k_{13} & = \frac{\nu h \alpha}{24 G} \left\{ \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{(1-\nu^2)} - \frac{\rho}{E} \omega^2 \right\}, \\
 k_{21} & = k_{12}, & k_{22} & = \frac{2}{1-\nu} \beta^2 + \alpha^2 - \frac{\rho}{G} \omega^2, \\
 k_{23} & = \frac{\nu h \beta}{24 G} \left\{ \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{(1-\nu^2)} - \frac{\rho}{E} \omega^2 \right\}, \\
 k_{31} & = E\alpha, & k_{32} & = E\beta, & k_{33} & = \frac{1-\nu}{h} + \frac{\nu h}{24} (\alpha^2 + \beta^2).
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

上記に示したものがいわゆる、修正 B-V 理論であるが、上式から N^0 に関与する項のすべてを削除したものが B-V 理論、A-理論、Schmidt 理論および古典理論の4つの各理論式（固有方程式）となる。上述の固有方程式において各未知量（ベクトル）が有意な解をもつための条件である係数行列式が零、すなわち $|k_{ij}| = 0$ を B-V 理論以下のレベルのものについて解くと次のような閉じた形の3つの無次元化固有振動数パラメーター λ に対する解析式が得られる。

$$\left. \begin{aligned}
 \lambda_I^2 & = \left\{ \kappa_0 + \frac{(12 + \kappa_0) - \kappa_0 \varepsilon_0 \nu}{6(1-\nu)} \pi^2 \varphi^2 \right\} \\
 \lambda_{II}^2 & = \pm \sqrt{\left\{ \kappa_0 + \frac{(12 + \kappa_0) - \kappa_0 \varepsilon_0 \nu}{6(1-\nu)} \pi^2 \varphi^2 \right\}^2 - \frac{4 \kappa_0 \pi^4 \varphi^4}{3(1-\nu)}}, \\
 \lambda_{III}^2 & = 2(\kappa_0 + \pi^2 \varphi^2).
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

ここに、

$$\lambda = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{G}}, \quad \varphi = \frac{mh}{a} = \frac{nh}{b} = \frac{\alpha h}{\pi} = \frac{\beta h}{\pi} \dots (31)$$

なお、式 (30) の λ の下添字 I, II あるいは III の数字は固有値の小さい方から順に付されたもので、Fig. 2 の一般的なモードの概念図⁴⁵⁾において、

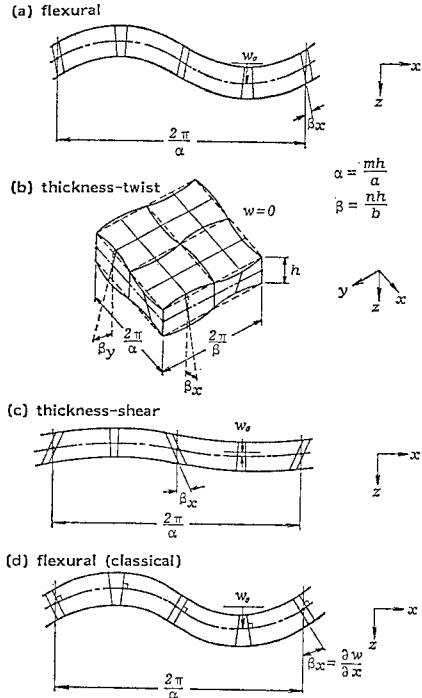


Fig. 2 Schematic figures of antisymmetric modes according to the refined theories and classical theory of simply-supported rectangular plate (After Mindlin et al⁴⁵⁾).

- A-I : flexural mode,
- A-II : thickness-twist mode,
- A-III : thickness-shear mode.

とよばれる各モードに対応するものである。上式中に用いられているパラメーター κ_0 は Mindlin のせん断補正係数 κ^2 と $\kappa_0 = 6\kappa^2$ なる関係にあり B-V 理論、A-理論ならびに Schmidt 理論ではともに $\kappa_0 = 5$ （つまり Mindlin 理論で $\kappa^2 = 5/6$ としたものに相当）と置けばよい。また ε_0 は、曲げモーメント和 M の効果による面外方向の直ひずみ ε_z を考慮するか否かに関係するパラメーターで、これを考慮する B-V 理論では $\varepsilon_0 = 6/5$ となる。一方、 ε_z は考慮しないが面外方向の直応力 σ_z における慣性力の効果 ($\rho \ddot{w}_0$ に関する項) を考慮した A-理論でも、結果的には同じく $\varepsilon_0 = 6/5$ という値をとることになる。また、これらを考慮しない Mindlin 理論、Schmidt 理論では $\varepsilon_0 = 1$ においてやればよい。

次に G.H. 理論の場合について述べよう。周辺単純支持の境界条件 (22) を考慮して、板の固有振動状態における変位係数の解を次のように設定する。

$$\left. \begin{aligned}
 u^{(l)} & = U_l^0 \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \exp(i\omega_{mnt}), \\
 v^{(l)} & = V_l^0 \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \exp(i\omega_{mnt}),
 \end{aligned} \right\}$$

$$w^{(l)} = W_l^0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \exp(i\omega_m n t). \quad (32)$$

これらを式 (16) あるいは (17) に代入し整理すれば最終的に曲げ (面外) あるいは伸縮 (面内) の固有振動の方程式が次式のように得られることになる。

曲げ (面外) 振動：

$$[k_{jl}] \{ \hat{W}_0^0, \hat{U}_1^0, \hat{V}_1^0, \hat{W}_2^0, \hat{U}_3^0, \hat{V}_3^0, \dots, \hat{U}_N^0, \hat{V}_N^0 \}^T = \{0, 0, \dots, 0\}^T \quad (33)$$

ここに未知量 (ベクトル) の要素は

$$\hat{X}_l^0 = \left(\frac{h}{2}\right)^l X_l^0, \quad X_l^0 = U_l^0, V_l^0, W_l^0 \dots (34)$$

であり、また係数マトリックスの各要素 k_{jl} ($j, l=1, 2, \dots, N$) は次式のように系統的な数式で表示される。

$$\left. \begin{aligned} k_{3j-2,3l-2} &= \frac{2}{2(j+l)-3} \{G(\alpha^2 + \beta^2) - \rho\omega^2\} \left(\frac{h}{2}\right) \\ &\quad + \frac{2(2j-2)(2l-2)}{2(j+l)-5} \cdot (\lambda + 2G) \left(\frac{h}{2}\right), \\ k_{3j-1,3l-1} &= \frac{2}{2(j+l)-1} \{(\lambda + 2G)\alpha^2 + G\beta^2 - \rho\omega^2\} \\ &\quad \cdot \left(\frac{h}{2}\right) + \frac{2(2j-1)(2l-1)}{2(j+l)-3} G \left(\frac{h}{2}\right), \\ k_{3j,3l} &= \frac{2}{2(j+l)-1} \{(\lambda + 2G)\beta^2 + G\alpha^2 - \rho\omega^2\} \\ &\quad \cdot \left(\frac{h}{2}\right) + \frac{2(2j-1)(2l-1)}{2(j+l)-3} G \left(\frac{h}{2}\right), \\ k_{3j-2,3l-1} &= \frac{2}{2(j+l)-3} \{(2l-1)G - (2j-2)\lambda\} \alpha, \\ k_{3j-1,3l-2} &= \frac{2}{2(j+l)-3} \{(2j-1)G - (2l-2)\lambda\} \alpha, \\ k_{3j-2,3l} &= \frac{\beta}{\alpha} k_{3j-2,3l-1}, \\ k_{3j-1,3l} &= \frac{2(\lambda+G)}{2(j+l)-1} \alpha \beta \left(\frac{h}{2}\right), \\ k_{3j,3l-2} &= \frac{\beta}{\alpha} k_{3j-1,3l-2}, \\ k_{3j,3l-1} &= k_{3j-1,3l}. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

伸縮 (面内) 振動：

$$[k_{jl}] \{ \hat{U}_0^0, \hat{V}_0^0, \hat{W}_1^0, \hat{U}_2^0, \hat{V}_2^0, \dots, \hat{W}_{N-1}^0 \}^T = \{0, 0, \dots, 0\}^T \quad (36)$$

ここに、 k_{jl} は式 (35) と類似な形式で与えられるが、紙面の都合上、ここでは省略する。

これらを数値的に解いて固有振動数、ならびに固有モードを求めればよい。

最後に古典理論による固有振動方程式の解を示そう。周辺単純支持矩形板の固有振動の解を式 (23) あるいは (24)_{1,2} のように仮定し、これらを式 (10) あるいは (14) で外荷重が零、すなわち $p=0$ と置いた固有値問題の支配式にそれぞれ代入して整理すれば周知のよう

に以下のような固有値が得られることになる。

曲げ (面外) 振動：

$$\lambda = \sqrt{\frac{2}{3(1-\nu)}} \pi^2 \varphi^2 \dots (37)$$

伸縮 (面内) 振動：

$$\lambda_I = \sqrt{2} \pi \varphi, \quad \lambda_{II} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\nu}} \varphi \dots (38)$$

上記の式 (37) で与えられる固有値 λ は式 (30) の λ_I すなわち、flexural mode の状態の固有値であって **Fig. 2(d)** に示したモードがそれに対応する。これは、いわゆるせん断変形を考慮した Mindlin 理論のモード (**Fig. 2(a)**) とはせん断変形の自由度の拘束性が異なるものである。なお、**Fig. 2** のモード図の板厚方向分布の詳細については次節で検討する。

(2) 分散解析

B-V 理論では無限平板を、曲げ (面外) モードに対しては SV 波 (鉛直方向の波面を有するせん断波) が、伸縮 (面内) モードに対しては P 波 (板面に直な断面方向の粗密波) が伝播する場合の分散方程式の解としてそれぞれ次のように仮定してやればよい。

曲げ (面外) モード：

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= W_0^0 \exp[ik(x - c_\varphi t)], \\ Q_x &= Q_x^0 \exp[ik(x - c_\varphi t)], \\ M &= M^0 \exp[ik(x - c_\varphi t)]. \end{aligned} \right\} \dots (39)$$

ここに、

$$c_\varphi = \frac{\omega}{k}, \quad k = \frac{2\pi}{L} \dots (40)$$

であって、 c_φ は位相速度、 ω は伝播する波動の振動数、 k は波数、 L は波長を表わしている。

伸縮 (面内) モード：

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= U_0^0 \exp[ik(x - c_\varphi t)], \\ N &= N^0 \exp[ik(x - c_\varphi t)]. \end{aligned} \right\} \dots (41)$$

これらを式 (4)_{1,2,4} あるいは (13)_{1,3} にそれぞれ代入すると分散方程式が (1) の固有方程式と類似の形で得られるが、ここではそれを省略する。ただし、B-V 理論以下のレベルの理論では閉じた形の解析式として、分散方程式から得られる解を、位相速度パラメーター c_φ/c_s および振動数パラメーター Ω についてそれぞれ示すと最終的に次のように整理された形で求められる。

$$\left(\frac{c_\varphi}{c_s}\right)^2 = \left\{ \frac{\kappa_0}{\pi^2 \xi^2} + \frac{(12 + \kappa_0) - \kappa_0 \varepsilon_0 \nu}{12(1-\nu)} \right\} \pm \sqrt{\left\{ \frac{\kappa_0}{\pi^2 \xi^2} + \frac{(12 + \kappa_0) - \kappa_0 \varepsilon_0 \nu}{12(1-\nu)} \right\}^2 - \frac{\kappa_0}{3(1-\nu)}} \dots (42)$$

$$\Omega^2 = \left\{ \frac{\kappa_0}{\pi^2} + \frac{(12 + \kappa_0) - \kappa_0 \varepsilon_0 \nu}{12(1-\nu)} \xi^2 \right\} \pm \sqrt{\left\{ \frac{\kappa_0}{\pi^2} + \frac{(12 + \kappa_0) - \kappa_0 \varepsilon_0 \nu}{12(1-\nu)} \xi^2 \right\}^2 - \frac{\kappa_0}{3(1-\nu)} \xi^4}$$

$$\dots\dots\dots(43)$$

ここに、 $c_s = \sqrt{G/\rho}$ はせん断波の速度、 $\xi = kh/\pi = 2h/L$ は無次元化波数パラメーターであり、また式 (42)、(43) の両パラメーターの間には $\Omega = \xi \cdot c_\varphi / c_s$ なる関係がある。

次に、G.H. 理論では、分散方程式の解を

$$\left. \begin{aligned} u^{(i)} &= U_i^0 \cdot \exp[ik(x - c_\varphi t)], \\ w^{(i)} &= W_i^0 \exp[ik(x - c_\varphi t)]. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(44)$$

のように設定し、これらを式 (16)_{1,3} あるいは (17)_{1,3} に代入すれば、曲げ（面外）モード、あるいは伸縮（面内）モードの波動の伝播に関する分散方程式が固有方程式に類似した形で得られるが、ここでは紙面の都合上その詳細は省略する。

最後に古典平板理論による分散方程式の解は式 (39)₁、あるいは (41)₁ のように仮定し、これらを式 (10) あるいは (14)₁ に代入してやれば所期の目的の結果が次のように得られる。

曲げ（面外）モード：

$$\frac{c_\varphi}{c_s} = \frac{\pi}{\sqrt{6(1-\nu)}} \xi, \quad \Omega = \frac{\pi}{\sqrt{6(1-\nu)}} \xi^2 \dots\dots(45)$$

伸縮（面内）モード：

$$\frac{c_\varphi}{c_s} = \sqrt{\frac{2}{1-\nu}}, \quad \Omega = \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} \xi \dots\dots\dots(46)$$

4. 数値計算例

2. で示した各種の理論から得られた計算式 (3. 参照) を用いて幾つかの数値計算を実施した結果を以下に示し、各理論のもつ動特性について考察する。

(1) 固有振動特性

まず、各理論をもとにして矩形板の固有振動解析を行った結果を Table 1 および Fig. 3 から Fig. 9 に示す。Table 1 には $\nu=0.3$ の場合で、モードパラメーター $\theta \left[= \left(\frac{mh}{a} \right)^2 + \left(\frac{nh}{b} \right)^2 = 2\varphi^2 \right]$ として 225.25 までの 7 段階の値を与えたときの固有振動数パラメーターを、曲げ（面外）振動に関しては 1 次、2 次、3 次（以後 A-I、A-II、A-III と略記）について、伸縮（面内）振動に関しては 1 次、2 次（以後 S-I、S-II と略記）についてそれぞれ示したものである。表中には比較のために厳密解^{(46),(47)}、古典理論による値、さらに初期関数法

Table 1 Eigenvalue λ for simply-supported rectangular plate ($\nu=0.3$) with varying mode-parameter $\theta = \left(\frac{mh}{a} \right)^2 + \left(\frac{nh}{b} \right)^2 = 2\varphi^2$.

	θ	0.02	0.18	0.50	2.00	10.40	52.00	225.25
A-I	Exact solution	0.0932	0.6889	1.5154	3.7420	9.2894	21.0074	43.7227
	G.H. theory (5-order)	0.0932	0.6889	1.5158	3.7421	9.3110	21.6060	46.3661
	G.H. theory (3-order)	0.0932	0.6892	1.5186	3.7758	9.6002	22.3286	46.9785
	Ambartsumyan, Baluch-Voyiadjis	0.0931	0.6862	1.5051	3.7006	9.1901	20.9541	43.7826
	refined B-V theory	0.0931	0.6888	1.5141	3.7059	8.8084	18.5280	36.5853
	Schmidt, Mindlin ($\kappa^2=5/6$)	0.0931	0.6834	1.4939	3.6536	9.0375	20.5820	42.9942
	Mindlin ($\kappa^2=\pi^2/12$)	0.0930	0.6821	1.4890	3.6352	8.9819	20.4491	42.7142
	Classical theory	0.0963	0.8669	2.4079	9.6317	50.0851	—	—
MIF (8-order)	0.0932	0.6887	1.5128	—	9.1808	20.9223	43.6831	
A-II	Exact solution	3.1729	3.4126	3.8476	5.4414	10.6072	22.8711	47.2547
	G.H. theory (5-order)	3.1729	3.4127	3.8477	5.4414	10.6072	22.8711	47.2545
	G.H. theory (3-order)	3.1737	3.4135	3.8484	5.4419	10.6075	22.8711	47.2546
	Ambartsumyan, Baluch-Voyiadjis	3.1933	3.4317	3.8646	5.4534	10.6134	22.8740	47.2560
	refined B-V theory	3.1933	3.4317	3.8646	5.4534	10.6134	22.8740	47.2560
	Schmidt, Mindlin ($\kappa^2=5/6$)	3.1933	3.4317	3.8646	5.4534	10.6134	22.8740	47.2560
Mindlin ($\kappa^2=\pi^2/12$)	3.1729	3.4126	3.8476	5.4414	10.6072	22.8711	47.2546	
A-III	Exact solution	3.2465	3.9310	4.9086	7.3956	11.2761	23.0697	47.2921
	G.H. theory (5-order)	3.2465	3.9311	4.9088	7.4035	11.6772	23.0930	47.3235
	G.H. theory (3-order)	3.2485	3.9438	4.9514	7.7729	13.6603	24.7188	48.1992
	Ambartsumyan, Baluch-Voyiadjis	3.2720	3.9948	5.0590	8.2306	17.2341	37.7926	78.3534
	refined B-V theory	3.2701	3.9825	5.0381	8.2574	17.8513	40.1345	83.8126
	Schmidt, Mindlin ($\kappa^2=5/6$)	3.2741	4.0111	5.0971	8.3366	17.5251	38.4760	79.7865
Mindlin ($\kappa^2=\pi^2/12$)	3.2538	3.9926	5.0804	8.3239	17.5181	38.4727	79.7850	
S-I	all theories	0.4443	1.3329	2.2214	4.4429	10.1313	22.6542	47.1500
S-II	Exact solution	0.7498	2.2171	3.5306	5.2013	9.5474	21.0124	43.7274
	G.H. theory (5-order)	0.7498	2.2171	3.5307	5.2015	9.6687	22.0416	46.7665
	G.H. theory (3-order)	0.7498	2.2193	3.5731	5.8361	10.6420	22.8316	47.2285
	Ambartsumyan, Baluch-Voyiadjis	0.7510	2.2530	3.7549	7.5098	17.1250	38.2929	79.6982
	refined B-V theory	0.7510	2.2530	3.7549	7.5098	17.1250	38.2929	79.6982
	Schmidt	0.7510	2.2530	3.7549	7.5098	17.1250	38.2929	79.6982
Classical theory	0.7510	2.2530	3.7549	7.5098	17.1250	38.2929	79.6982	

(MIF) による値³⁴⁾も併記してある。この表より次のようなことが指摘できる。

① 曲げ振動の固有値は Mindlin 理論 ($\kappa^2=5/6$) と Schmidt 理論によるものがまったく同一の値となり、また A-理論と B-V 理論によるものがまったく同一の値となる。特に A-II に関してはこれら4種の理論に修正 B-V 理論を含めた5種の理論による値はすべて同一となる。さらに Mindlin 自身の提案になる理論 ($\kappa^2=\pi^2/12$) を加えた6種の理論は常にほぼ同等の固有値を与える。

② 伸縮振動の固有値に関しては、すべての場合について修正 B-V 理論、B-V 理論、A-理論、Schmidt 理論、古典理論の5種類の理論による値がすべて同じになる。

③ A-I, A-III および S-II での固有振動数では各理論による値の差異は θ の増加とともに増大するのに対して、A-II での値の差異はかなり大きな θ になってもほとんどなく、各理論ともほぼ同じ値となり、さらに S-I に関してはここで計算したすべての理論による値がまったく同一で、厳密解とも完全に一致する。

④ 全体的にみて G.H. 理論 (5-order) のものがよい精度の値を与えている。

⑤ 古典理論による値は A-I, S-I および S-II の3つについてのみ存在するが、これらの値は S-I についての値を除き θ の増大とともにかなりの誤差を生じようになる。

⑥ MIF による値は A-I のみについて示されている

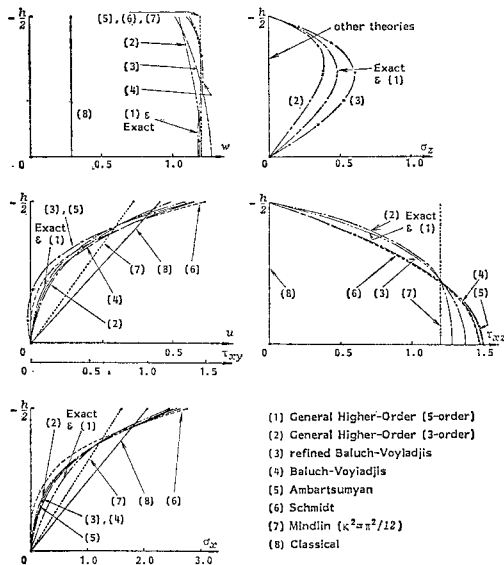


Fig. 3 Distributions of $w, u, \sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ and τ_{xy} along the thickness for flexural mode (A-I) of simply-supported rectangular plate ($\nu=0.3$) with $\phi=1.0$.

る³⁶⁾が、これらの範囲内においてはよい精度の値を示している。

なお、G.H. 理論によれば、この表に示した値に加えさらに高次のモード (たとえば 5-order では曲げ9次、伸縮8次まで) についての計算値も得られるが、それらの結果に対する精度等の考察はここでは割愛する。

次に Fig. 3 から Fig. 7 には各理論による変位および応力の、板厚方向の分布形 (以下、板厚モードとよぶ) が示されているが、ここでは $\nu=0.3, \phi=1.0$ (Table 1 の $\theta=2.0$ に対応) の場合に対して、A-I から A-III および S-I と S-II のそれぞれの板厚モードが描かれている。なお、ここに示された各力学量の値は同一モード内での各力学量間の相互比較ならびに同一力学量の各モード間での相互比較を可能にするため各理論とも、系のエネルギーノルムによって規準化がなされている。

Fig. 3 に示された A-I (flexural mode) の板厚モードに関しては、Fig. 2(a) の変形のモード図が対応するものであるが、各理論による板厚モードのうち古典理論および Mindlin 理論によるものを除く他の6種の理論によるモードでは σ_z に関する分布を除き、目立った差異はみられず、ほぼ同様の値ならびに傾向を示しており G.H. 理論 (5-order) によるモードは、ほとんど厳密解に一致している。Mindlin 理論によるモードは $\kappa^2=\pi^2/12$ の場合と $\kappa^2=5/6$ の場合との差はほとんどなく同一の線で示され、ほぼ前述の6種の理論による高次変化の分布を平均的に直線分布に置き換えたものに相当する値を示しており、この傾向は次の A-II および A-III においても同様の指摘ができる。また、古典理論による分布もやはり直線分布であるが、Mindlin 理論での値に比べ面内変位および面内応力において、より大きい値を示し面外変位 (たわみ) に関しては、ほぼ 1/4 とかなり小さい値を与えるが、これは静的な場合で正弦分布荷重が作用した正方形板の $h/a=1.0$ 付近での古典解と他の理論によるたわみ量の結果との関係³³⁾にほぼ等価な傾向である。

Fig. 4 に示された A-II はいわゆる thickness-twist mode であり Fig. 2(b) の概念図に対応し、 w, σ_z, τ_{xy} は発生しない。この場合の各種理論による板厚モードでは、B-V 型の4種類の理論つまり、修正 B-V 理論、B-V 理論、A-理論、Schmidt 理論のものがすべて同一の値を示し、他方 G.H. 理論による 5-order と 3-order とがほぼ同一の値を示しこれらは厳密解と一致する。さらにこれら2群の線の差異もごく小さい。また、Mindlin 理論での値は A-I の場合と同様、これら2群の高次分布を平均的に直線化したものに相当する値を示し、 τ_{xz} は一様分布となることから、かなりの差異を生ずるものの u, σ_x における他の理論との差異はあまり大きくはな

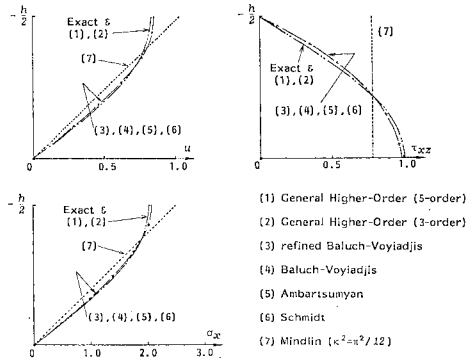


Fig. 4 Distributions of u , σ_x and τ_{xz} along the thickness for thickness-twist mode (A-II) of simply-supported rectangular plate ($\nu=0.3$) with $\varphi=1.0$.

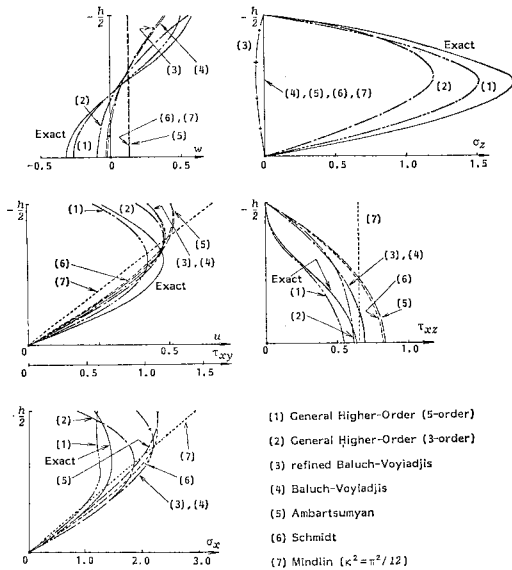


Fig. 5 Distributions of w , u , σ_x , σ_z , τ_{xz} and τ_{xy} along the thickness for thickness-shear mode (A-III) of simply-supported rectangular plate ($\nu=0.3$) with $\varphi=1.0$.

い。

Fig. 5 に示された A-III は thickness-shear mode (**Fig. 2(c)** に対応) であり w の板厚方向の分布が複雑に変化し、これに応じて他の力学量の分布形も複雑化し、 σ_z は他の応力成分と同程度の値をもつ。この板厚モードでは先の A-I, A-II に比べて各理論間の差異が大きく生ずる傾向を示している。このうち、修正 B-V 理論と B-V 理論とが、また A-理論と Schmidt 理論とがそれぞれほぼ同様の値を示す。全体的にこの板厚モードにおいて厳密解に近くかつ、より複雑な、あるいは急激な変化をしている順に並べると、G.H. 理論の 5-order, 次に 3-order, 続いて修正 B-V および B-V の両理論, A-理論および Schmidt 理論, 最後に直線変化

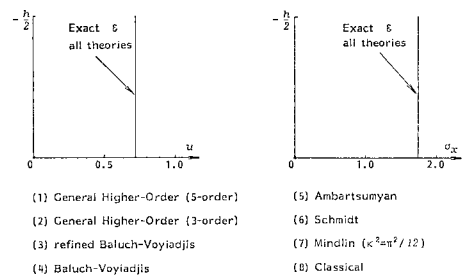


Fig. 6 Distributions of u and σ_x along the thickness for extensional mode (S-I) of simply-supported rectangular plate ($\nu=0.3$) with $\varphi=1.0$.

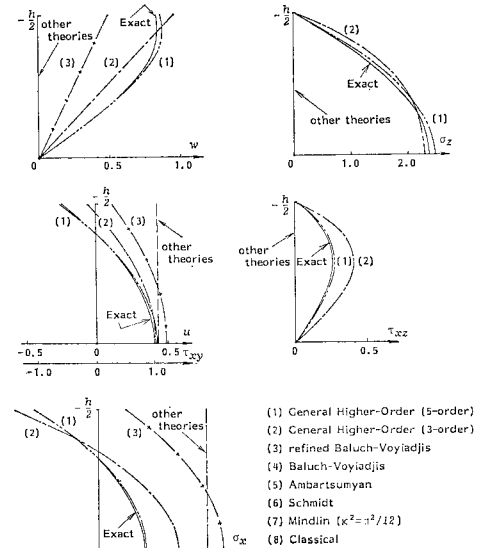


Fig. 7 Distributions of w , u , σ_x , σ_z , τ_{xz} and τ_{xy} along the thickness for symmetric thickness-shear mode (S-II) of simply-supported rectangular plate ($\nu=0.3$) with $\varphi=1.0$.

の Mindlin 理論の順となっている。しかしこれら各理論における値の差異は、後出の図で示されるように、 φ の値がより小さくなるにつれて減少していき厳密解にも近くなっていく。

Fig. 6 に示した S-I の板厚モードは非常に単純な形であって、面内の一方方向に様な伸びが生じ、それと直角方向に様な同量の縮みが生じる、いわゆる symmetric thickness-twist mode である。このモードに関してはここに計算したすべての理論による結果は同一であって、 u , σ_x , (σ_y) も板厚方向に非零の様な分布となり、その他の力学量は零となる。このことは **Table 1** に掲げたように固有値がすべての理論でまったく同一となることによっても裏付けられる。

Fig. 7 に示した S-II の symmetric thickness-shear の板厚モードについては、各理論間で差異が生じている。ただし B-V 理論, A-理論, Schmidt 理論, 古典

理論の4種の理論ではまったく同一の値となる。こ
 ども A-III モードについて述べた傾向と同じく G.H. 理論
 の 5-order が最も厳密解に近く、次に 3-order, 続いて
 修正 B-V 理論, 最後にすべての力学量が直線分布とな
 る上記4種の理論群の順に、より簡単な分布形となつて
 精度が落ちてゆくが、これらも後に示すように φ の減少
 とともにその差がなくなり、ほぼ同様な値を与えるよう
 になる。

次に Fig. 8 および Fig. 9 は φ の変化に対する前
 述の板厚モードのうち A-I における σ_x の最大値 (板
 上表面での値), A-III における w の最大値と最小値 (板
 上表面と板中央面での値) の、各理論による値の変化を
 図示したものである。これらの図から φ の値が小さくな
 るに従って各種理論による値の差は減少しほぼ同じ結果
 を与えるようになることが観察される。

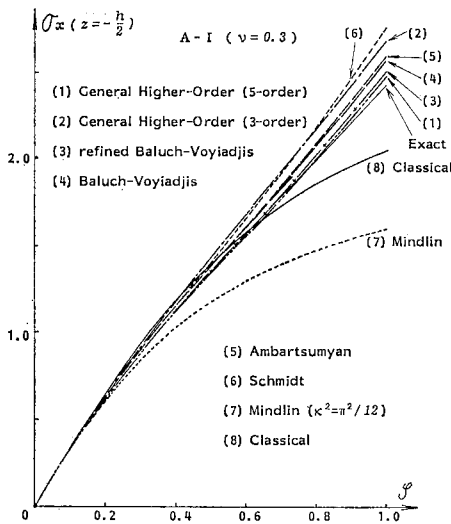


Fig. 8 Relation between φ and bending stress σ_x at upper surface for flexural mode (A-I) of simply-supported rectangular plate ($\nu=0.3$).

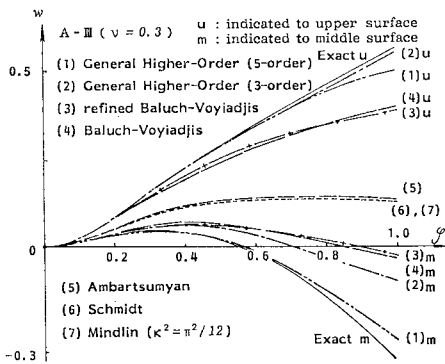


Fig. 9 Relation between φ and transverse displacement w at upper and middle surfaces for thickness-shear mode (A-III) of simply-supported rectangular plate ($\nu=0.3$).

(2) 分散特性

無限板中に SV 波および P 波が伝播する場合の分散
 関係を 2. に示した各種理論により $\nu=0.3$ の場合につ
 いて求めた結果が Fig. 10 および Fig. 11 である。

Fig. 10 は波数パラメーター $\xi (=2h/L)$ を変化させた
 場合の位相速度 c_φ を、せん断波の波速 $c_s (= \sqrt{G/\rho})$ と
 の比として描いたものである。ここでは逆対称モードの
 1次および2次, すなわち A-I および A-II (1次は
 前節の板厚モードの A-I に、2次は A-III にそれぞれ
 類似した性状のモード) ならびに対称モードの1次, す
 なわち S-I (前節の板厚モードの S-II に類似した性
 状のモード) について示してあるが、これによると、全
 体を通じて固有値計算の結果と同じく B-V 理論, A-理
 論とが、また Schmidt 理論と Mindlin 理論 ($\kappa^2=5/6$)
 とがそれぞれまったく同一の値を示すとともに Mindlin
 ($\kappa^2=\pi^2/12$) とも非常に近い値となっている。

また A-I のモードについてみると、 ξ が小さい範囲
 では各理論による値に差はなく、 ξ が大きくなるとその
 差が生じ始める。しかし古典理論による値が $\xi \approx 0.2$ より
 大きくなると厳密解^{(48), (49)}からはなはだしく離れ、ま
 た、修正 B-V 理論による値が $\xi \approx 3.5$ 以後減少傾向

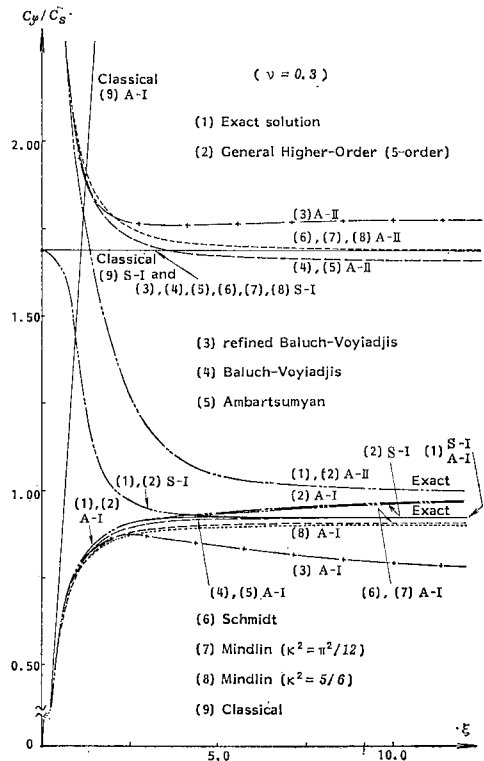


Fig. 10 Dispersion relation (phase velocity spectrum c_φ/c_s versus ξ) of an infinite plate ($\nu=0.3$) with traction free surfaces.

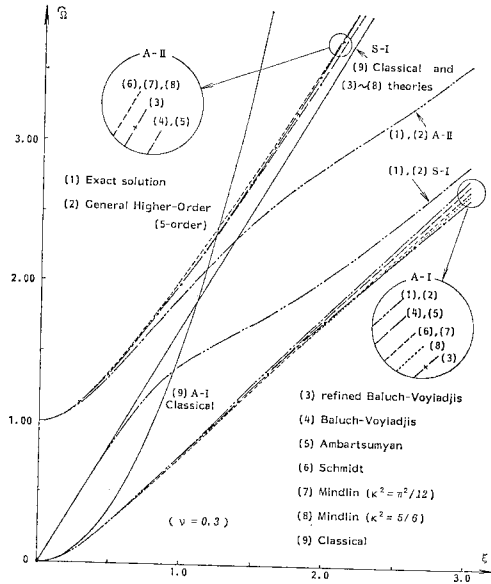


Fig. 11 Dispersion relation (frequency spectrum Ω versus ξ) of an infinite plate ($\nu=0.3$) with traction free surfaces.

を呈して、厳密解から離れていく以外は他の各理論ともほぼ同等の値を示し、かなり厳密解にも近い値となっている。しかし、A-II のモードでは $\xi \approx 0.6$ あたりから各理論間の差が生じ始め、 $\xi \approx 3.0$ 以後は修正 B-V 理論、Schmidt 理論および Mindlin 理論 ($\kappa^2=5/6$, $\kappa^2=\pi^2/12$)、B-V 理論および A-理論は互いに近い値を示しつつ各値ともほぼ変化しなくなる。したがって、この結果は $\xi \approx 10.0$ より大きいところで 1.0 近辺の値に漸近する厳密解およびこれにきわめて近い値を示す G.H. 理論の 5-order との間に大きな差を生じることになる。

また、S-I のモードについてみると G.H. 理論の 5-order での値は厳密解との間に、 $\xi \approx 5.0$ 以後においてある程度の誤差範囲でよい一致を示しているが、他のすべての理論による値は古典理論とまったく同じで、 ξ の値にかかわらず厳密解の $\xi=0.0$ の極限での値に一致した一定値を示すため大きな誤差を含んだものとなっている。

次に Fig. 11 は本質的に Fig. 10 と同等であって、この図は $\xi=0$ から $\xi=3.0$ までの間を拡大し ξ の変化に対する SV 波の振動数パラメーター $\Omega (=c_p/c_s \xi)$ の変化を描いたものである。この図からも上述の傾向を別の角度から検証することができる。

5. 結 言

本論文では Mindlin 理論をはじめとするいわゆるせん断変形を考慮した最近の提案になる幾つかの高次近似

の平板理論に、古典理論を加えた各種の理論の概要とそれらの理論間の関連性について検討し、曲げ（面外）挙動のみならず伸縮（面内）挙動を含めた単純支持の等質等方矩形板の固有振動解析および無限板の分散関係について詳細な数値計算を行い各理論式のもつ動特性について考察した。ここで得られた成果の一部を挙げれば以下のようなものである。

(1) 単純支持の矩形平板に対する固有値の定量的な比較およびそれぞれの振動モードに対する応力、変位等の各力学量の板厚方向の分布図を求め、それらの挙動についての精度特性を詳細に検討した。また無次元化モードパラメーター φ の変化による代表的な位置での応力、変位の変動を提示し、各理論間の関係について比較考察した。

(2) 無限板を伝播する SV 波および P 波の分散特性を計算し、それぞれの理論と厳密解との精度比較を行った。

(3) ここで実施した固有振動解析および分散関係の両者を通じ、対象として取り上げた各種の近似理論のうち G.H. 理論の 5-order のものが全般的にきわめて精度のよい結果を与えることが判明した。

参 考 文 献

- 1) Leissa, A.W. : Vibration of plates, NASA SP-160, U.S. Govt. Printing Office, 1969.
- 2) Leissa, A.W. : The free vibration of rectangular plates, J. Sound Vib., Vol. 31, pp. 257~293, 1973.
- 3) Leissa, A.W. : Recent research in plate vibrations : classical theory, Shock Vib. Dig., Vol. 9, pp. 13~24, 1977.
- 4) Leissa, A.W. : Recent research in plate vibrations. 1973-1976 : complicating effects, Shock Vib. Dig., Vol. 10, pp. 21~35, 1978. ; Plate vibration research, 1976-1980 : complicating effects, Shock Vib. Dig., Vol. 13(10) pp. 19~36, 1981.
- 5) Bert, C.W. : Recent research in composite and sandwich plate dynamics, Shock Vib. Dig., Vol. 11 pp. 13~23, 1979. ; Research on dynamics of composite and sandwich plates, 1979-81, Shock Vib. Dig., Vol. 14 (10) pp. 17~34, 1982.
- 6) Todhunter, I. : A history of the theory of elasticity, Vol. 1, Dover, pp. 147~160, 1960. ; Vol. 2, Part 2, Dover, pp. 39~107, 1960.
- 7) Timoshenko, S.P. (川口昌宏訳) : 材料力学史, 鹿島出版, pp. 108~112, pp. 226~229, 1974.
- 8) Love, A.E.H. : A treatise on the mathematical theory of elasticity, 4th edition, Dover, pp. 1~31, 1944.
- 9) Westergaard, H.M. : Theory of elasticity and plasticity, Dover, pp. 8~45, 1952.
- 10) Pao, Y.H. and R.K. Kaul : Waves and vibrations in isotropic and anisotropic plates, R.D. Mindlin and Applied Mechanics (ed. by G. Herrmann), Pergamon Press, pp. 149~195, 1973.
- 11) Naghdi, P.M. : The theory of shells and plates, in Encyclopedia of Physics (ed. by S. Flügge), Vol. VIa/2, Springer pp. 425~640, 1972.

- 12) Bell, J.F. : The experimental foundations of solid mechanics, in Encyclopedia of Physics (ed. by S. Flügge), Vol. VIa/1, Springer, 1973.
- 13) Rayleigh, L. : On the free vibrations of an infinite plate of homogeneous isotropic elastic matter, Proc. Lond. Math. Soc., Vol. 20, pp. 225~234, 1889.
- 14) Lamb, H. : On waves in an elastic plate, Proc. Roy. Soc., London, Ser. A 93, pp. 114~128, 1917.
- 15) Rayleigh, L. : The theory of sound, Two Vol., Dover, 1960.
- 16) 前出 8)
- 17) 吉川昭吉郎 : 通信革命を担う弾性表面波, 科学朝日, pp. 65~69, 1980-11.
- 18) Mindlin, R.D. : Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, J. Appl. Mech., pp. 31~38, 1951.
- 19) Mindlin, R.D. : Thickness-shear and flexural vibrations of crystal plates, J. Appl. Phys., Vol. 22, pp. 316~323, 1951.
- 20) Mindlin, R.D. : An introduction to the mathematical theory of vibrations of elastic plates, U.S. Army Signal Corps. Eng. Lab., Fort Monmouth, 1955.
- 21) Herrmann, G. (ed.) : R.D. Mindlin and Applied Mechanics, Pergamon Press, 1973.
- 22) Dökmeci, M.C. : Recent advances-Vibrations of piezoelectric crystals, Int. J. Eng. Sci., Vol. 18, pp. 431~448, 1980.
- 23) 根岸嘉和・平島健一 : せん断変形を考慮した一連の平板向けの理論について, 山梨大学工学部研究報告, No. 32, pp. 28~42, 1981.
- 24) 平島健一・根岸嘉和 : 板厚方向の成分を考慮した代表的な2次元化平板理論の精度に関する考察, 土木学会論文報告集, 第330号, pp. 1~14, 1983-2.
- 25) Reissner, E. : The effects of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, J. Appl. Mech. pp. A 69~A 77, 1945.
- 26) Ambartsumyan, S.A. (神谷紀生訳) : 異方弾性板の理論, 森北出版, pp. 175~187, 1975.
- 27) Schmidt, R. : A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation, J. Indust. Math. Soc., Vol. 27, pp. 23~38, 1977.
- 28) Voyiadjis, G.Z. and Baluch, M.N. : Refined theory for flexural motions of isotropic elastic plates, J. Sound Vib., Vol. 76, pp. 57~64, 1981.
- 29) Hirashima, K., P.C.Y. Lee and Y. Negishi : General Higher-Order Equations of Two-Dimensional Static and Dynamic Theories for Homogeneous and Laminated Elastic Plates, Proc. Ninth U.S. National Congr. of Appl. Mech., Ithaca, Cornell Univ., p. 476, 1982.; 平島健一・根岸嘉和 : 異方性・層状性を考慮した平板の高次近似理論, 土木学会 年次学術講演会概要集第1部, pp. 29~30, 1981.
- 30) Panc, V. : Theories of elastic plates, Noordhoff Int. Pub., pp. 13~356, 1974.
- 31) Hencky, H. : Über die Berücksichtigung der Schubverformung in ebenen platten, Ing. Arch., Vol. 16, pp. 72~76, 1947.
- 32) Lo, K.H., R.M. Christensen and E.M. Wu : A high order theory of plate deformation, J. Appl. Mech., pp. 663~676, 1977.
- 33) Vlasov, V.Z. : The method of initial function in problems of theory of thick plates and shells, Proc. 9th Int. Cong. Appl. Mech., Vol. 6, pp. 321~330, 1956.
- 34) Das, Y.C. and A.V. Setlur : Method of initial functions in two-dimensional elastodynamic problems, J. Appl. Mech. pp. 137~140, 1970.
- 35) Iyenger, K.T.S.R., K. Chandrashekhar and V.K. Sevastian : On the analysis of thick rectangular plates, Ing. Arch., Vol. 43, pp. 317~330, 1974.
- 36) Iyenger, K.T.S.R. and P.V. Raman : Free vibration of rectangular plates of arbitrary thickness, J. Sound Vib., Vol. 54, pp. 229~236, 1977.
- 37) Rao, N.S.V.K. and Y.C. Das : A mixed method in elasticity, J. Appl. Mech., pp. 51~56, 1977.
- 38) Celep, Z. : On the axially symmetric vibration of thick circular plates, Ing. Arch., Vol. 47, pp. 411~420, 1978.
- 39) Iyenger, K.T.S.R. and P.V. Raman : Free vibration of circular plates of arbitrary thickness, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 64, pp. 1088~1092, 1978.
- 40) Celep, Z. : Free vibration of some circular plates of arbitrary thickness, J. Sound Vib., Vol. 70, pp. 379~388, 1980.
- 41) Celep, Z. : On the elastodynamic theory of thick circular plates, ZAMM, Vol. 60, pp. 323~333, 1980.
- 42) Iyenger, K.T.S.R., K. Chandrashekhar and V.K. Sevastian : Thick rectangular beams, J. EM Div., Proc. ASCE, Vol. 100, pp. 1277~1282, 1974.
- 43) Iyenger, K.T.S.R. and P.V. Raman : Free vibration of rectangular beams of arbitrary depth, Acta Mech., Vol. 32, pp. 249~259, 1979.
- 44) Chen, S. : Elasticity theory of plates and a refined theory, J. Appl. Mech., pp. 644~650, 1979.
- 45) Mindlin, R.D., A. Schacknow and H. Deresiewicz : Flexural vibrations of rectangular plates, J. Appl. Mech., pp. 430~436, 1956.
- 46) Lee, Y. C. and H. Reissner : Dynamics of rectangular plates, Int. J. Eng. Sci., Vol. 7, pp. 93~113, 1969.
- 47) Srinivas, S., C.V.J. Rao and A.K. Rao : An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates, J. Sound Vib., Vol. 12, pp. 187~199, 1970.
- 48) Potter, D.S. and C.D. Leedham : Normalized numerical solutions for Rayleigh's frequency equation, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 41, pp. 148~153, 1967.
- 49) Dong, S.B. and R.B. Nelson : On natural vibrations and waves in laminated orthotropic plates, J. Appl. Mech., pp. 739~745, 1972.