土木学会論文報告集
第332号・1983年4月
【討　　議】

渡辺　昇
稼農　知徳　共著
薄木　征三

“薄肉曲線桁の変位場に基づく有限ねじれ変形解析”への討議

（土木学会論文報告集 第317号・1982年1月掲載）

▶討議者（*Discussion*）――――――――――阿井正博（法政大学）・西野文雄（東京大学）
By Masahiro Ai and Fumio Nishino

本論文で述べられている著者らの有限変位問題の離散化に関する立場について討議・質問したい．著者らは，その序論において，Lagrange 座標でのひずみ-変位関係の近似以内であれば何らの座標変換を必要としないはずであり，前田・林の計算法[17]では，その増分形剛性方程式の誘導において，Lagrange 座標系でのひずみ-変位関係を用いながら各増分段階の最初でそれまでの（剛体）変位に対する座標変換を行うという Euler 的手法が混用されているとし，このことを矛盾として指摘している．筆者らは，離散系の有限変位問題において要素の節点自由度をその剛体位置と変形の自由度に分解して扱う変位法の一般論について報告[20]しているが，そこでの考え方に準じて，前田・林の計算法が解析の方針として誤りでないという立場で討議を進めたい．

3次元問題を想定して，$\{X, Y, Z\}$ を固定された空間座標，$\{x, y, z\}$ と $\{x', y', z'\}$ は空間で剛体的に並進・回転し得る座標系，さらに $\{\xi, \eta, \zeta\}$ を物体固定の Lagrange 座標として考える．このとき，まず第一に，$\{\xi, \eta, \zeta\}$ 座標に関する Green のひずみテンソルは，その変位を $\{X, Y, Z\}$，$\{x, y, z\}$，$\{x' y', z'\}$ のいずれの座標系で測るか，また要素の無応力時の初期位置をどこに置いて考えるかに左右されない．解析のうえでは，ひずみの表現の直前までに．これら $\{x, y, z\}$，$\{x', y', z'\}$ 座標および要素の初期位置が確定されていれば十分である．Green のひずみが，要素の剛体変位に対して零であることより，逆に，その初期位置，空間座標の位置に無関係であることは証明を要しないであろう．ひずみの表現において，$\{X, Y, Z\}$，$\{x, y, z\}$，$\{x', y', z'\}$ のうち，解析手法上有利であるいずれを採用してもよいことになる．

有限変位微小ひずみの問題では，（空間固定座標に関する）変位公配は十分大きい．したがって，離散化されたときの各要素は十分大きく並進・回転するが，生ずるひずみは単位に比較して十分小さい．要素の変位・変形の独立な自由度は空間固定座標に関する要素の節点自由度と考えてよいが，ここで，$\{x, y, z\}$ 座標を要素の剛体変位とともに並進・回転する要素座標として定義するものとすれば，$\{x, y, z\}$ に関する要素内各点の変位：$\{u(\xi, \eta, \zeta), v(\xi, \eta, \zeta), w(\xi, \eta, \zeta)\}$ は，要素のいわゆる変形に起因するものと考えてよく，前述の微小ひずみの条件のもとに要素分割さえ細かくすれば要素の大きさに相対して十分小さくすることができる．すなわち，要素の剛体変位の除去という正確に扱うことのできる非線形処理のもとに，要素座標 $\{x, y, z\}$ に関する変位は弱非線形の Field Equation で扱うことができることになる．この要素の変形の自由度は，節点自由度より剛体変位の自由度を差し引いた数になる．次に，いくぶん手法論に傾くが，荷重増分という解析手法を考えて，$\{x', y', z'\}$ を各増分の最初での要素の剛体位置に定める局所座標とした場合でも，適切な変位段階を考えるという条件のもとに $\{x', y', z'\}$ に関する次段階までの変位は，その間 $\{x', y', z'\}$ が空間固定であることより増分間の剛体変位成分をも含むが，十分小さいと考えてよく，前述の要素座標 $\{x, y, z\}$ と有限変位微小ひずみ問題に対する有効性は同等であるものと思われる．前田・林の示している計算法はこの立場にあると筆者らは考えている．強非線形の有限変位問題において，要素の変形成分のみを取り出し弱非線形の Field Equation に適用して問題を解くことができるということは，強非線形の Field Equation が扱いにくいという理由できわめて有効であり，この考え方に準じた解析は平面骨組ではかなり以前より行われている．一つの考え方としてすでに確立されていると筆者らは認識してる．

連続，離散系を問わず，Lagrange の手法である限り，系の内力（応力）はいわゆる変位公配の方向に，作用外力は空間座標方向に分解して表わされるのが普通である．それらのつり合いを考えるときには，明示されるかされないかを問わず，一方の他方方向への変換が必要で

あり，その変換は要素の剛体位置が支配的である．たとえば，平面曲げ有限変位問題の連続系としてのつり合い式[20]は，

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{\underline{\frac{1}{g_G}\begin{bmatrix}X_G', & -Y_G'\\ Y_G', & X_G'\end{bmatrix}}\begin{Bmatrix}N\\ M-m'\end{Bmatrix}}{g_G}\right)+\begin{Bmatrix}\bar{p}_X\\ \bar{p}_Y\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

（$\{\bar{p}_X,\ \bar{p}_Y\}$：分布外力の $\{X, Y\}$ 方向成分，$\{N, (M-m')/g_G\}$：断面の内力としての軸力とせん断力）と表わされるが，式中下線の直交マトリックスは変位後の軸線方向，軸線直角方向の力の $\{X, Y\}$ 方向への変換を意味する．この変換は，前述の離散系有限変位問題に対する剛体位置に関係した変換と明らかに同等であるが，Euler 的手法とは無関係である．

以上の有限変位問題の離散化の扱いにおいて，$\{x, y, z\}$ 座標を用いた前者は，幾何学的非線形問題の力学的意味に沿った一つの整理の立場であり，$\{x', y', z'\}$ 座標を用いた後者は，step-by-step という意味で Euler 的手法との混用とみる見方もあり得るが，いずれの場合も $\{\xi, \eta, \zeta\}$ 座標で規定される物質点が解析の全段階を通じて同一点を表わすという意味では明らかに Lagrange の手法である．この種の考え方に沿った解析の種々の報告の中には，細部でなお未整理の部分が含まれていることも考えられるが，考え方のうえで著者らのいう誤りという意味での矛盾はないものと筆者らは考えている．

参 考 文 献

20) 阿井正博・西野文雄：離散化系の幾何学的非線形問題での力学的関係と平面骨組への適用，土木学会論文報告集，No. 304, pp. 17～32, 1980-12.

▶討議者(*Discussion*)——前 田 幸 雄（大阪大学）・林 正（長岡技術科学大学）
By Yukio Maeda and Masa Hayashi

構造物の非線形解析では，非線形項の評価や座標系の表示法について種々の提案があり，あらゆる非線形挙動を統一的に扱うことができる理論は完成されていない．また，マトリックス構造解析法は数値解法であるがゆえに数値計算における解式の取扱い方が重要であり，式の適用方法によっては解式の意味が異なったものになる．

表記の論文において，討議者らの論文[17]での式の扱い方に疑問が提示されているので，マトリックス法による有限変位解析についての討議者らの考え方を明らかにしておきたい．

（1） 有限変位解析における座標系

変位法による有限変位解析は，未知量 $\boldsymbol{D}$ に関する次の連立非線形方程式の問題として定式化される．

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{D})=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{D})-\boldsymbol{P}=\boldsymbol{0}\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{a})$$

ここに，ベクトル $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{P}$ はそれぞれ節点変位，節点に作用する部材端力，等価節点外力（定数ベクトル）である．これらの力学量を全体座標系（空間固定座標）で記述する．

部材端力 $\boldsymbol{f}$ と部材端変位 $\boldsymbol{d}$ の関係を局所座標系で示せば，部材の剛性行列を用いて次式のようになる[17]．

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{d})=[\boldsymbol{k}(\boldsymbol{d})]\boldsymbol{d}\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{b})$$

ここに $\boldsymbol{d}$ は $\boldsymbol{D}$ を変換したものであり，$\boldsymbol{f}$ を逆変換して式 (a) の $\boldsymbol{F}$ が与えられる．

式 (a) を数値的に解くために増分法を用いる．正確な解を得るために反復法（Newton 法など）を併用するが，ここでは直接関係しないので省略する．

増分理論[21]により式 (a) を線形化すれば次式を得る．

$$[\varDelta\boldsymbol{K}(\boldsymbol{D}^{(0)})]\varDelta\boldsymbol{D}=\varDelta\boldsymbol{P}-\boldsymbol{R}^{(0)}\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{c})$$

ここに添記号 $\varDelta$ は増分量を，上付記号 $^{(0)}$ は前増分段階での力学量を表わす．$\boldsymbol{R}^{(0)}$ は残差ベクトル（不平衡力）であり，構造全体の接線剛性行列 $\varDelta\boldsymbol{K}$ は式 (b) を線形化した次式の $\varDelta\boldsymbol{k}$ から求められる．

$$\varDelta\boldsymbol{f}=[\varDelta\boldsymbol{k}(\boldsymbol{d}^{(0)})]\varDelta\boldsymbol{d}\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{d})$$

さて，討議者らは数値計算において式 (d) をまったく使用しておらず，また式 (c) は $\boldsymbol{D}$ の近似値の補正量を求めるために用いるだけである．したがって，（反復法を併用して）収束した値の精度は式(a)，すなわち式(b) と座標変換行列の精度のみに依存する．

局所座標系には移動座標を用いているが，この座標系は剛体移動するだけで変形しない変形前の直交デカルト座標系である．また，式 (b) には常に総変位 $\boldsymbol{d}$ を用いているので，部材のもとの形状（直線部材）から $\boldsymbol{f}$ を求めている．したがって，式 (b) の算出にグリーンのひずみを用いることに矛盾はない[22),23)]．

著者らが矛盾と指摘された座標系の使い方は，式 (d) を用いて

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}^{(0)}+\varDelta\boldsymbol{f}=\sum_k\varDelta\boldsymbol{f}^{(k)}\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{e})$$

とした場合であると考えられる．この場合には物体の移動とともに変形する移動座標系で Euler 表示されたひずみ成分を用いる必要がある．

荷重増分に対して常に総変位 $\boldsymbol{D}$ を変数として式 (a) を解く手法は文献 24) でも用いており（文献 24) の式 (13)．ただし変形後の座標系は前述の意味での直交デカルト座標系である)，エラスティカの問題でも許容誤差の精度内で正確に解くことができる．

（2） 座標変換を用いる長所

著者らは座標変換を用いない total Lagrange 表示法は優れた解析法であると結論しておられる．単純な構造

物に対してはこの表示法の長所もあるが，種々の問題を扱うには座標変換を用いた解法の方が一般性があり，適用範囲が広いと考える．

すなわち，グリーンのひずみ成分を用いて平衡方程式を定式化した場合には，部材の剛体回転が大きくなると応力の方向が問題になり，断面の主軸方向の応力成分を無視したはり理論では誤差が大きくなる．一方，座標変換により剛体変位成分を除去しておけば部材の見掛けの変形は小さくなるので，より変位の大きい問題まで適用できる．

（3） 数値計算の精度と効率化

数値計算では，解析仮定や定式化による誤差が解式に含まれていても，数学モデルに置き換えた解式はこの誤差の大きさとは無関係に正確に計算する必要がある．弾性安定問題の計算では数学上の特異点が存在するために，特異点の近傍で接線剛性行列が悪条件になる．したがって，行列や残差ベクトルの要素の値がごくわずかに変化するだけで解の値が著しく異なり，収束計算では解が安定しなくなることが起きる．

討議者らは別の文献 25）で解の安定性と数値計算の効率化を計るために剛性行列の解析的な定式化の重要性を述べたが，本論文では数値積分を用いておられる．

曲率が小さくて直線桁に近い場合（$f/L=1/2000$）には解が安定しなかったようですが，この場合の P_X-ϕ 曲線から判断しますと接線剛性行列は特異行列に近いとは思われませんので，数値積分を使用されたことが解が不安定になる一因とも考えられます．

なお，座屈後の解析には変位増分法が適しており，解の安定がよくて優れた収束性を示すことを申し添えます[25),26)]．

参考文献

21） 鷲津久一郎：弾性学の変分原理，コンピュータによる構造工学講座Ⅱ-3-A，培風館，pp. 131～135，1972.

22） 同上，pp. 107～123.

23） Fung, Y.C.（大橋義夫・村上澄男・神谷紀生共訳）：固体の力学/理論，培風館，pp. 88～93，1970.

24） 前田幸雄・林 正・中村 守：増分法による平面骨組構造物の大変形解析の加速計算法，土木学会論文報告集，No. 223，1974.

25） 前田幸雄・林 正・森 寛司：有限帯板法による薄板の有限変位解析，土木学会論文報告集，No. 316，1981.

26） 前田幸雄・林 正：構造解析における多元連立非線形方程式の数値計算法，マトリックス解析法研究発表論文集，JSSC 第11回大会，1977.

▶回答者（*Closure*）——渡 辺 昇（北海道大学）・稼農知徳・薄木征三（秋田大学）

By Noboru Watanabe, Tomonori Kano and Seizo Usuki

有限変位解析の先達からの長文の討議・ご意見を承りお礼申し上げます．両者の討議・ご意見には共通点が多くありますので，回答は一応両者おのおのへの2つの回答としますが，記号は両者共通のものを使わせていただきます．

1．阿井・西野への回答

空間固定座標 $\{X, Y, Z\}$ から，荷重の作用によって注目する物体内の要素が，剛体的に並進・回転して $\{x, y, z\}$ になったとし，$\{\xi, \eta, \zeta\}$ は物体固定座標とした場合，座標系 $\{x, y, z\}$ にいる観測者が $\{\xi, \eta, \zeta\}$ 座標に関する Green のひずみテンソルを用いるのが討議者の立場と理解されます．そしてこれら2種類のいずれの座標系から $\{\xi, \eta, \zeta\}$ 座標に関する Green のひずみテンソルを定義しても，その形式は同一であること，またこのひずみテンソルを用いることの妥当性は討議者のいうとおりであります．

しかし $\{x, y, z\}$ 座標から観測する変位と $\{X, Y, Z\}$ 座標から観測する変位は異なったものであり，それゆえ $\{x, y, z\}$ 座標での変位と応力，あるいは剛性法での部材座標系における節点変位 $\boldsymbol{d}$ と等価節点力 $\boldsymbol{f}$ は $\{X, Y, Z\}$ 座標あるいは全体座標系へ座標変換してやらねばならない．この座標変換は要素の剛体的な並進・回転を表わす自由度から構成される，とするのが剛体変位除去の考え方であると理解されます．この考え方は，電子計算機が早くから発達してきたアメリカで，1960年の末頃から平面骨組構造を手始めとして確立されてきたものと思われます．

要素の剛体的な並進・回転を表わす $\{x, y, z\}$ 座標を適切に定めることができたとすると，$\{x, y, z\}$ に関する変位 $\{u(\xi, \eta, \zeta), v(\xi, \eta, \zeta), w(\xi, \eta, \zeta)\}$ は要素の大きさを適当に小さくすると，要素の大きさに比べて小さくすることができる．それゆえ棒部材でいうならば，$\{x, y, z\}$ 座標において微小変位の変位場と2次項の一部を落とした Green のひずみテンソルを用いることができる[17)]．より正確には，部材軸線の変位の2次項[17)]あるいは $\{x, y, z\}$ 座標での節点自由度の3次項まで考える[26)]と同時に Green のひずみテンソルのすべての2次項を考慮することもできる．

以上が討議者の考え方かと思われます．ただ増分理論における局所（部材）座標 $\{x', y', z'\}$ に関する次段階までの変位についての討議者の考え方は納得できますが，増分量について支配方程式あるいは剛性方程式を前田・林の討議の式(c)または(d)のように線形化できるとするのが本質と考えられます．

2. 前田・林への回答

（1） 局所（部材）座標を $\{x, y, z\}$，全体座標を $\{X, Y, Z\}$ とすると，剛体的に移動・回転したと考えた $\{x, y, z\}$ 座標から，はり要素に固定した座標 $\{\xi, \eta, \zeta\}$ に関する Green のひずみテンソルを式(b)の算出に用いることに矛盾がないのは討議者のいうとおりであります．ただ式(d)を座標変換して全体座標に関する式(c)を作製しているものと考えられますが，文献 17)では，この間の事情が述べられておらず，それがために式（e）のような計算をされたものと著者らは解釈したものです．このことを言葉の使い方は必ずしも適切でありませんでしたが，Euler 的手法を混用していると述べたのであります．

（2） 座標変換を用いない total Lagrange 表示法は，剛性マトリックスは部材要素の変形と断面力を含む複雑な形となるが，これは討議者の座標変換を用いる方法，あるいは剛体変位を除去する方法において，上述の $\{x, y, z\}$ 座標での式(b)から全体座標 $\{X, Y, Z\}$ へ座標変換された式（a），あるいは増分形の式（c）に相当するものである．

空間的に複雑な構造，たとえば曲線格子桁の有限変位解析を想定してみると，total Lagrange 表示法で格子桁が変形する以前の各部材要素の位置を全体座標系へ座標変換しておけばよい．これは微小変位解析における座標変換[27]と同じ趣旨のものであり，荷重を作用させる以前に1度だけ行えばよい．この意味では total Lagrange 表示法の方が簡単なように思われる．

それと討議者の「断面主軸方向の………誤差が大きくなる．」は，著者と討議者はともにはりの断面形不変を前提としているのであるから無関係のように思われますが．

（3） 討議者の指摘するとおりで，数値積分による誤差が特に座屈荷重近傍で影響しないようにしなければなりません．本論文 p. 63, **5.**（**1**）の **b**）にも述べていますが，1要素内での Gauss 点の数を $n=15$ としております．微小変位理論での曲線桁の剛性マトリックスは著者らが文献 27）に示してありますが，これを数値積分で求めた結果と比較したところ，有効数字8桁程度の一致を確かめてあります．しかしながら Gauss 点の数 n をより大きくして，本論文の結果の収束性を検討してみる余地はあると思われます．

結論として，討議者らの手法には Euler 的手法が増分理論の中で用いられているとしても，増分量は常に全体座標系（空間固定座標系）へ座標変換されているがゆえに誤りや矛盾はない．有限変位解析の手法としては，total Lagrange と座標変換（剛体変位除去）の手法があり，両者は並立してあるべきものであると考えられます．

参 考 文 献

27） 薄木征三・稼農知徳：薄肉断面曲線材の変形法による解析，土木学会論文報告集，No. 235, 1975-3.