

求心誤差が測定値に及ぼす影響について

THE INFLUENCE OF THE CENTERING
ERROR IN ANGLE MEASUREMENT近 津 博 文*
By Hirofumi CHIKATSU

1. ま え が き

従来、水平角を測定する場合、各種器械誤差を除去してもなお、測定値に含まれる不定誤差としては視準誤差および読み取り誤差が一般的であり、求心に際しての測点中心と器械中心との不一致に基づく視測誤差、すなわち求心誤差は器械誤差と同様な定誤差として考えられ、その値は視準距離、測定角、偏心距離および偏心角を知ることによって算出される。

ところで、実際に水平角を測定する場合、視準距離および測定角は可測量であるのに対して、偏心距離および偏心角は非可測量であり、これらの非可測量に左右される求心誤差は不定誤差として考えなければならない。

そこで本論文では、まず非可測量である偏心距離および偏心角をそれぞれ独立な確率変数として求心誤差の 2 乗平均を与える式を誘導する。

次に、従来視準誤差および読み取り誤差を考慮して誘導されている測定値に対する分散を与える式に代わって、新たに求心誤差の影響をも考慮する式を提唱し、その提唱式と実測結果とより視準、読み取りおよび求心の各不定誤差の値を求め、さらに、算出される求心誤差の値は求心誤差の 2 乗平均の平方根にほぼ等しいとすることより、求心誤差は可測量である視準距離および測定角を用いて評価できることを示す。

2. 求心誤差の評価

(1) 求心誤差の 2 乗平均式の誘導

図-1 より求心に際して測点中心 (O) と器械中心 (O') とが不一致のため求めるべき水平角 ($\angle AOB = \theta$) に生ずる誤差、すなわち求心誤差を与える式は次式である。

* 正会員 工修 東京電機大学助手 理工学部建設工学科

$$\Delta\theta = e \left(-\frac{\sin\varphi}{S_1} + \frac{\sin(\varphi - \theta')}{S_2} \right) \dots\dots\dots (a)$$

ここに、 $\Delta\theta$: 求心誤差 (rad),
 e : 偏心距離 (m), φ : 偏心角
(器械点において向かって左側の視準点から右回りに測点まで測った水平角, $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$), θ' : 測定角 ($0^\circ \leq \theta' < 360^\circ$), S_1, S_2 : 視準距離 (m).

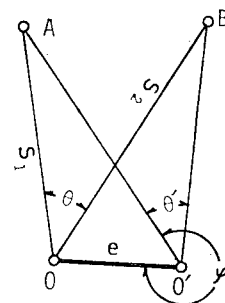


図-1

さて、式 (a) から明らかなように求心誤差は e, φ, S_1, S_2 および θ' により変化する。ところで、実際に水平角を測定する場合、 S_1, S_2 および θ' は可測量であるのに対して e および φ は非可測量である。

いま、非可測量 e および φ をそれぞれ独立な確率変数とすると、求心誤差の 2 乗平均は次式となる。

$$\Delta\theta^2 = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \Delta\theta^2 \cdot p(\varphi) \cdot p'(e) d\varphi de \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $p(\varphi)$ および $p'(e)$ はそれぞれ φ および e の確率密度関数を表わす。

φ はその性質上一様分布に従うことから、

$$p(\varphi) = \frac{1}{2\pi} [0^\circ \leq \varphi < 360^\circ]$$

また、偏心距離 e は常に正であるから、その分布として正規分布の正の部分だけを考えれば、

$$p'(e) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma'} \exp\left(-\frac{e^2}{2\sigma'^2}\right) [e \geq 0]$$

ただし、 σ' は分布の形状を定めるパラメーターで、 σ' が小さいほど原点における曲線の縦距が長く曲線がすみやかに横軸に接近するから、偏心距離 e の分布の精度が高いことを意味する。

一方、式 (a) より

$$\Delta\theta^2 = e^2 \cdot f(\varphi) \dots\dots\dots (b)$$

ここに、 $f(\varphi) = \left(-\frac{\sin \varphi}{S_1} + \frac{\sin(\varphi - \theta')}{S_2} \right)^2$

式 (b) を式 (1) に代入すれば

$$\begin{aligned} \overline{\Delta\theta^2} &= \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cdot p(\varphi) d\varphi \int_0^\infty e^2 \cdot p'(e) de \\ &= \overline{e^2} \left(\frac{1}{2S_1^2} + \frac{1}{2S_2^2} - \frac{\cos \theta'}{S_1 S_2} \right) \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

ところで、

$$\begin{aligned} \overline{e^2} &= \int_0^\infty e^2 \cdot p'(e) de \\ &= \int_0^\infty e^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma'} \exp\left(-\frac{e^2}{2\sigma'^2}\right) de = \sigma'^2 \dots\dots\dots(c) \\ \overline{e} &= \int_0^\infty e \cdot p'(e) de \\ &= \int_0^\infty e \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma'} \exp\left(-\frac{e^2}{2\sigma'^2}\right) de = \frac{2\sigma'}{\sqrt{2\pi}} \dots\dots\dots(d) \end{aligned}$$

であるから、式 (c)、(d) より次の関係が得られる。

$$\sqrt{\overline{e^2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \overline{e} \approx 1.25 \overline{e} \dots\dots\dots(3)$$

ここで式 (3) の関係を式 (2) に代入すれば求心誤差の 2 乗平均の平方根を与える式は次式となる。

$$\sqrt{\overline{\Delta\theta^2}} = \frac{1.25 \overline{e}}{2 S_1 S_2} \sqrt{2(S_1^2 + S_2^2) - 4 S_1 S_2 \cos \theta'} \dots\dots\dots(4)$$

ところで、式 (4) に含まれる偏心距離の平均値 \overline{e} は視準距離および角の大きさとは無関係に、使用する器械、たとえばさげ振りにより求心を行う器械か、あるいは求心望遠鏡により求心を行う器械かによって大きく左右される値と考えられる。そこで \overline{e} は以下の実験的方法により決定することとする。

(2) 実測概要

2 点 A、B が測点 O に張る水平角 θ の実測を行うにあたり、まず見通しのよい 3 点を選び、それぞれ測点 O、視準点 A および B とし (図-2)、各地点に 90×90×300 mm のコンクリート杭を埋設した。次に、測点杭頂部に $\phi 12$ mm の測量鋺を埋め込み、鋺表面に刻まれている幅 1.5 mm の十字形の溝の中心を求心することとし、また視準点杭頂部には $\phi 2$ mm、長さ 60 mm のトランシット用調整ピンを垂直に立て、これを視準することとした。なお、実測に使用した器械の名称および性能などは表-

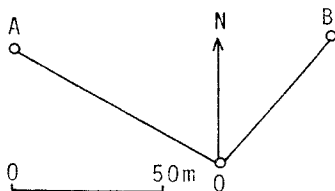


図-2

表-1 使用器械の性能¹⁾

仕様 項目 器械名	望遠鏡			水平目盛盤		気泡管感度	求心望遠鏡	
	全長 (mm)	像有効径 (mm)	倍率 (倍)	直徑 (mm)	最読定小値 ($^{\circ}$)	横気泡管 ($\frac{''}{2\text{mm}}$)	像倍率 (倍)	
ニコン NT-2	167	正	40	25	84	20	40	正 2.2

1 のとおりである。

実測は昭和 56 年 5 月の曇天日を選び、完全に調整された器械を用いて反復法により下記の要領で行った。すなわち、1 度測点に据えた器械 (望遠鏡正) で反復数 1 から 6 まで測定を行い、各反復数に対応する値を読み取っておく。次に、器械を測点からはずし、改めて器械の据え付けから始めて上記の測定を行うという操作を各操作ごとに目盛盤の同一箇所を使用するようにして 50 回繰り返して行った。

本研究では、反復数 3 の測定により得られた $101^{\circ}41'26''$ (このときの測定値に対する不定誤差; $4''.3$) を水平角 θ の測定角 θ' とし、また、50 m スチールテープを用いて区間 OA および OB をそれぞれ 3 回測定し、温度補正・定数補正を施した結果得られた 79.662 m および 56.716 m をそれぞれ視準距離 S_1 および S_2 とした。

(3) \overline{e} の決定

従来、トランシットにより水平角を測定する場合、測定値に含まれる不定誤差として視準誤差および読み取り誤差が知られている。視準誤差を α (正確にはある目標を視準するときの精度を標準偏差で表わした値で、 β および r も同様である)、読み取り誤差を β とし、 $2n$ 回の視準と 2 回の読み取りとから成り立つ反復法を用いて観測角 ω を測定するとき、測定角 ω に対する分散 $\sigma_{\omega, n}^2$ は一般に次式として与えられる^{2), 3)}。

$$\sigma_{\omega, n}^2 = \frac{2}{n} \left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{n} \right) \dots\dots\dots(e)$$

式 (e) 以外にも、いくつかの報告^{4)~7)}があるが、それらの式はいずれも求心誤差を器械誤差などの定誤差と同様なものとして扱ったものであり、森・星⁷⁾らの報告以外は、目盛り誤差は読み取り誤差に含め、あるいは、両遊標の読み取り誤差に代わって、各遊標の読定値の平均値に対して 1 つの読み取り誤差を考え、従来の反復法を採用すればいずれの場合も式 (e) と同一となる。

そこで著者は器械を動かさない限り、反復数とは無関係に測定値に対して 1 回だけ影響を及ぼし、器械を据え換えるごとに偶然性を帯びた変数となる求心誤差 r を考慮して、測定角に対する分散を与える式として新たに式 (5) を提唱する。

$$\sigma_{\omega, n}^2 = \frac{2}{n} \left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{n} \right) + r^2 \dots\dots\dots (5)$$

さて、一般的に従来は求心誤差を除いて視準および読み取りの不定誤差だけを評価しているのに対して、著者の提唱する式 (5) と本実測結果とによれば視準、読み取りおよび求心の各不定誤差を同時に評価することができる。そこで、式 (5) と実測により得られた各反復数に対応する不定誤差 $\sigma_{\omega, n}$ [$n=1, 2, 3, \dots, 6$] の値とにより、視準誤差 α 、読み取り誤差 β および求心誤差 r の最確値を最小 2 乗法によって算出した結果、

$$\alpha = 4'' .4 \quad \beta = 2'' .4 \quad r = 2'' .1$$

を得た⁸⁾。

ここで、上記により算出された求心誤差 ($r=2'' .1$) はその 2 乗平均の平方根にほぼ等しいとすると、式 (4) より

$$\sqrt{4\theta^2} = \frac{0.63 \bar{e} \rho}{S_1 S_2} \sqrt{2(S_1^2 + S_2^2) - 4 S_1 S_2 \cos \theta'}$$

$$\cong r = 2'' .1$$

ここに、 $\rho = 206\,265''$ 、 $S_1 = 79.662\text{ m}$ 、 $S_2 = 56.716\text{ m}$ 、 $\theta' = 101^\circ 41' 26''$

これを解いて

$$\bar{e} = 0.0005\text{ m}$$

を得る。この値は森⁹⁾が求心望遠鏡の調整方法を実験的に究明した結果得られた偏心距離の値とほぼ一致する。

(4) 求心誤差の評価式

前節の結果より、求心望遠鏡により求心を行う場合、測点中心と器械中心とのずれ、すなわち偏心距離の平均値は約 0.5 mm であり、測定値に影響を及ぼす求心誤差は $r \cong \sqrt{4\theta^2}$ として次式で評価することができる。

$$r \cong \sqrt{4\theta^2} = \frac{a}{S_1 S_2} \sqrt{2(S_1^2 + S_2^2) - 4 S_1 S_2 \cos \theta'}$$

(rad)

\dots\dots\dots (6)

ここに、 $a = 0.63 \times \bar{e} = 3.0 \times 10^{-4}(\text{m})$

ところで、本研究で使用した器械の求心望遠鏡の倍率は 2.2 倍であり、現在使用されているおもな器械の求心望遠鏡の倍率は目盛の最小読定値に関係なく約 2 倍 (たとえば、測機舎製; 2.0 倍、カールツァイス製; 2.0 倍、日本光学製; 2.2 倍、ウィルド製; 2.5 倍) である。このことを考慮すると、式 (6) はすべての器械を使用して測角を行う際の求心誤差の評価に対して適用することができると思われる。

一方、式 (6) から明らかなように求心誤差は可測量である視準距離と測定角とに支配され、求心誤差が測定値に及ぼす影響は $\theta' = 180^\circ$ のとき最大であり、 $S_1 = S_2 = S$ とすればその最大値は

$$r_{\max} = \frac{a}{S^2} \sqrt{8 S^2} = \frac{2\sqrt{2}a}{S} \text{ (rad)} \dots\dots\dots (7)$$

となり、式 (7) より視準距離を 175 m 以上を取れば、求心誤差が測定値に与える影響は 1'' 以下となることがわかる。

3. 考 察

さげ振りに代わって求心望遠鏡を用いて求心を行い、測鏡鏡によって角を読み取ることが一般的となった昨今、測定値に含まれる読み取り誤差および求心誤差はその大きさが著しく減少したと思われる。また、通常最も一般的であるマイクロ読みトランシットを使用する場合でも、20'' 以下の細かい値まで読み取れること、さらに反復法により測定値に含まれる視準および読み取り誤差を減少させ得るのに対して、求心望遠鏡で求心を行う際には、器械に関係なく測点中心と器械中心とは、平均約 0.5 mm 偏心していること、また同一角を測定するにあたって求心誤差の影響は反復数に関係なく一定であることなどを考慮すると、反復法における反復回数を大きくすればするほど、測定値に含まれる視準誤差、読み取り誤差および求心誤差のうち、求心誤差の占める割合が大きくなると思われる。

一方、角測定によって得られる測定値の良否を判定するためには使用するトランシットの性能に応じてある制限値 (たとえば、角の閉合差の上限) が従来定められていた。しかし、高性能な器械を使用するようになった結果、測定値の精密度が向上し、たとえ操作上のミスがあってもそれを検出することができない場合も考えられる。さらに、従来の制限値を適用するならば、単測法だけで十分精密な測定結果を得ることができると思われる。

以上のことを考慮すると、測線長を十分に長く取れない場合には、求心誤差を正しく評価した後、使用するトランシットの種類および反復数を決定するのがよい。また、閉合差を測角数で等分して測定角の調整を行う従来の方法に対して、各測点において式 (6) より算出される求心誤差に比例して閉合差を配分するののも一つの方法であろう。

今後、器械の性能と閉合差などで代表される制限値との間にどのような関連があるかを検討する必要があると思われる。

4. 結 語

本研究で得られた結果を要約すると下記のとおりである。

- (1) 非可測量である偏心距離および偏心角をそれぞれ独立な確率変数とすると、求心誤差の 2 乗平均の平方

根を与える式は式(4)となる。

(2) 視準誤差 α 、読み取り誤差 β および求心誤差 r の影響を考慮して、器械を据え換えて観測する場合の測定角に対する不定誤差を与える式を式(5)として表わす。また、実測結果と式(5)とを用いて各誤差を最小2乗法により算出した結果 $\alpha=4''.4$ 、 $\beta=2''.4$ および $r=2''.1$ を得た。

(3) 式(4)および(2)の結果とを用いて $r \cong \sqrt{\Delta \theta^2}$ とすると、求心望遠鏡(2.2倍)を使用して求心を行う際の測点中心と器械中心との偏心距離の平均値は約0.5mmとなり、この値は使用する器械の種類などとは無関係に、求心望遠鏡(2.2倍)を使用する限り一定である。この結果、求心誤差を評価する式(6)が誘導される。

(4) 求心誤差の最大値を求めた結果、式(7)より視準距離を175m以上に取れば、求心誤差が測定値に及ぼす影響は1"以下となることがわかる。

(5) 本研究に使用した器械の求心望遠鏡の倍率(2.2倍)と、現在おもに使用されている器械の求心望遠鏡の倍率(約2倍)とがほぼ等しいことより、すべての器械を使用する際の求心誤差は可測量である視準距離と測定

角とを知ることにより式(6)で評価することができる。

おわりに、本研究を行うにあたりご助言をいただいた中央大学理工学部、春日屋伸昌教授に深く謝意を表わす次第です。

参 考 文 献

- 1) 日本光学カタログ。
- 2) 春日屋伸昌：測量学I，朝倉書店，pp. 103~111，1978。
- 3) 中村英夫・村井俊治：測量学，技報堂，pp. 97~98，1977。
- 4) Brinker, P.C. and P.R. Wolf: Elementary Surveying, 6th Edition, Thomas, Y. Crowell, pp. 191~192, 1977.
- 5) Kissam, P.: Surveying for Civil Engineers, McGraw-Hill, pp. 108~110, 1956.
- 6) Nábauer, M.: Vermessungs Kunde, Springer-Verlag, ss. 88~91, 1949.
- 7) 森 忠次・星 仰：ダムの精密三角測量における誤差の検討，土木学会論文集，第141号，pp. 56~65，1967。
- 8) 近津博文：観測角に影響を与える各種不定誤差とトラバースの同時調整法，測量，第31巻第9号，pp. 28~32，1981。
- 9) 森 忠次：固定式光学求心装置の調整法について，測量，第17巻第4号，pp. 4~7，1967。

(1981.7.31・受付)