

## 砂漣上の粘性振動流の Oseen 近似\*

OSEEN APPROXIMATION OF VISCOUS OSCILLATORY  
FLOW OVER A RIPPLED BED

沢 本 正 樹\*\*

By Masaki SAWAMOTO

## 1. はじめに

砂漣あるいは波形底面上の振動流に関する理論的取扱いは Lyne (1971)<sup>1)</sup> に始まる。彼は Brooke Benjamin (1958)<sup>2)</sup> が波形底面上の一方向流を取り扱った方法にならない、直交曲線座標系での渦度方程式を用い、 $a \ll \delta$  の条件のもとで、 $d_0 \ll \lambda$  と  $d_0 \gg \lambda$  の両極限における定常の streaming を論じた。ここに  $a$  は砂漣の振幅、 $\delta$  は Stokes layer の厚さの尺度  $\sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$ 、 $\omega$  は振動流の角周波数、 $\nu$  は動粘性係数、 $d_0$  は、振動流の水粒子のストローク（振幅の 2 倍）、 $\lambda$  は砂漣の波長である。これにより、球のまわりの振動流にみられる streaming が、波形底面のような曲面境界をもつ場では一般的な現象であることが示された。その後、Sleath<sup>3)~5)</sup>、日野ら<sup>6), 7)</sup>、金子ら<sup>8)~10)</sup>が、同様に渦度方程式を出発点として、 $d_0 \ll \lambda$  の場合について詳しく論じている。さらに、実験による streaming の検証も報告されている<sup>7)~10), 16)</sup>。

以上のものとは異なった系列の理論的研究としては、Longuet-Higgins (1981)<sup>11)</sup> のものが挙げられる。彼は、円柱背後の流れのシミュレーションに有効な成果を上げている非粘性渦糸群モデルを砂漣上の流れに適用し、実際の砂漣の諸元の範囲における流れを表現している。

本研究で論じる問題の出発点は Lyne に始まる系列のものと基本的に同じである。すなわち、次の渦度方程式を考える。

$$\frac{1}{J} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} - S \frac{\partial(\psi, \bar{\omega})}{\partial(\kappa\xi, \eta)} = \frac{1}{2} D^2 \bar{\omega} \quad (1)$$

ここに、 $(\xi, \eta)$  は、砂漣面を  $\eta=0$  とする直交曲線座標系で、デカルト座標  $(x, y)$  とは、次の写像関数で関係づけることとする。

$$z = \xi + i \frac{\varepsilon}{\kappa} e^{i\kappa\xi} \quad (2)$$

\* 第 37 回 (1982) 土木学会年次学術講演会にて概要を発表  
\*\* 正会員 工博 東京工業大学助教授

$z = x + iy$ 、 $\zeta = \xi + i\eta$  は  $\delta$  で、時間  $t$  は  $\omega$  で無次元化されている。変換 (2) の詳細は文献 12) で論じられている。 $\bar{\omega}$ 、 $\psi$  は、それぞれ、 $u_b/\delta$ 、 $u_b\delta$  ( $u_b$  は、底面の影響のない場所での流速の振幅) で無次元化された渦度および流関数で、両者の関係は

$$\bar{\omega} = -JD^2\psi \quad (3)$$

で与えられる。 $J$  は、変換 (2) に伴う Jacobian で、

$$J = \frac{1}{1 - 2\varepsilon e^{-\kappa\eta} \cos \kappa\xi + \varepsilon^2 e^{-2\kappa\eta}} \quad (4)$$

演算子  $D^2$  は

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

である。無次元パラメーター  $\varepsilon$ 、 $\kappa$ 、 $S$  は、それぞれ次のように定義されている。

$$\varepsilon = ak = \pi \frac{2a}{\lambda}, \quad \kappa = k\delta, \quad S = \frac{d_0}{\lambda} \pi \quad (5)$$

境界条件は、

$$\left. \begin{array}{l} \eta = \infty \text{ で } \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \cos t \\ \eta = 0 \text{ で } \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0 \end{array} \right\} \quad (6)$$

を用いる。

式 (1) は、本質的には Navier-Stokes の式を書き直しただけであり、一般的に解くことは不可能である。それゆえ、これから先へ進むには、どのようなパラメーターの範囲で、どのような近似法を用いるかが問題となってくる。式 (5) のパラメーターを用いると、Lyne の論文の対象条件は  $\varepsilon/\kappa \ll 1$  かつ  $S \gg 1$  または、 $S \ll 1$  に相当する。また、Sleath、日野ら、金子らのものは  $S \ll 1$  に相当し、流体力学的に大変興味深い成果を上げている。ところで、波形底面上の振動流というものを考える場合、海岸工学的見地からすると、まず第 1 に思い浮ぶのは波によって生じる砂漣であろう。この場合、 $d_0/\lambda$  は 1.6 程度、あるいは、それ以上の値をとり、 $S \ll 1$  の成果をそのまま用いることはできない。従前よりすぐれた成果が発表されているにもかかわらず今回再び、この問題

を取り上げた動機は、この点にある。すなわち、 $S \ll 1$ でない範囲で砂漣上の流れを取り扱うことが本論文の目的である。この目的のために、ここでは次のような基本方針にそって近似解析を展開する。波によって生じた砂漣近くの流れは、砂漣の峰で流れが剝離し、砂漣背後に強い集中渦が形成されることで特徴づけられる。このような剝離を伴った流れでは、移流慣性項が重要な役割を果たしている。このことは、式(1)の左辺第2項の $S$ のかかった項が $S \ll 1$ でないため、他の2項、局所慣性項と粘性項と同程度の重要性をもっているということと同じである。しかし、この項は非線形項でありそのままでは扱い得ない。それゆえ、以後3段階の近似を行うが、その際に最も簡略化された形で移流慣性項を考慮し、それによって流れを表現する。このような大胆な近似を用いているため、得られた結果の精度についての厳密な議論は別の機会にゆずるとし、剝離とか渦の形成など流れのいくつかの特徴を表わし得ればよしとするのが本研究の立場である。

## 2. 理 論

式(1)左辺第2項を次のように簡略化する。まず、流関数 $\psi$ をポテンシャル流れを表わす $\psi_p$ とそれ以外の部分 $\psi_r$ の和として表わす。

$$\psi = \psi_p + \psi_r \dots \quad (7)$$

$\psi_p$ は $\zeta$ 面では一様流となり

$$\psi_p = \eta \cdot \cos t \dots \quad (8)$$

となる。これを用いると移流慣性項は

$$-S \frac{\partial \psi_p}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} - S \frac{\partial \psi_r}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} + S \underbrace{\frac{\partial \psi_p}{\partial \eta}}_{\sim} \underbrace{\frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi}}_{\sim}$$

$$+ S \frac{\partial \psi_r}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi}$$

となる。第1項は、式(8)を代入すると0となる。残り3項を、いま第3項のみで代表させることとする。すると式(1)は、次のようになる。

$$\frac{1}{J} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + S \cos t \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} = \frac{1}{2} D^2 \bar{w} \dots \quad (9)$$

移流慣性項にかかる流速が一様流であるという意味から、これをOseen近似とよぶことにする。これは、渦度方程式中の移流慣性項を最も簡略化された表現で代表させたものであり、本研究ではこの式をまず第1段階の近似とする。

ここで、このOseen近似の意味を厳密に考えてみよう。砂漣上の流関数 $\psi^*$ (次元のある形を上付きのアスタークスで表わすことにする)は、時間、座標、および、いくつかのパラメーターの関数として次のように与えられる。

$$\psi^* = \psi^*(t^*, x^*, y^*; u_b, T, a, \lambda, \nu)$$

これらパラメーターがある特別な値をとる場合には、厳密解が得られる。たとえば、 $u_b=0$ または $u_b \cdot T=0$ の場合には、 $\psi^*=0$ すなわち流れがないという解、 $a=0$ のときは平板上のStokes layerの流れ、 $\nu=0$ の場合には、ポテンシャル解が得られる。これら厳密解の近くの流れは、支配方程式系をそのパラメーターでTaylor展開することによって表現し得る。これは、椎貝・京藤(1981)<sup>13)</sup>が示したパラメーター展開法そのものである。 $u_b=0$ の厳密解を0次近似として、そのまわりでTaylor展開を行うと、第1次近似は、局所慣性項と粘性項のみよりなるいわゆるStokes近似となる。一方、 $\nu=0$ のポテンシャル流れを0次近似としてそのまわりでTaylor展開を行うと、式(9)と同じ形のものが1次近似の支配方程式として導かれる。すなわち、ここで用いたOseen近似は、 $\nu=0$ のまわりでの近似解と解釈し得る。この点、球のまわりの流れに対する本来のOseen近似がレイノルズ数がゼロのまわりで有意であると根本的に異なっている。

ここで用いているOseen近似は、このように $\nu=0$ のまわりでのTaylor展開の第1次近似としての意味をもつが、この際、0次近似の方程式の階数が下がるため、0次近似がすべての境界条件を満たすことはできず、non-slipの条件は、1次近似の段階で処理しなければならなくなる。このことは、球に対する本来のOseen近似においても同様であり、Oseen近似を採用する際に目をつぶらざるを得ない矛盾である。

式(9)および式(3)は、線形であるが変数係数であるので解析的に扱うのは容易ではない。そこで流関数 $\psi_r$ 、渦度 $\bar{w}$ を次のように $\epsilon$ で摂動展開する。

$$\left. \begin{aligned} \psi_r &= \psi_0 + \epsilon \psi_1 + \epsilon^2 \psi_2 + \dots \\ \bar{w} &= \bar{w}_0 + \epsilon \bar{w}_1 + \epsilon^2 \bar{w}_2 + \dots \end{aligned} \right\} \dots \quad (10)$$

これを、式(3)、(9)に代入して $\epsilon$ のorderごとに整理すると、

$\epsilon^0$ では

$$\left. \begin{aligned} D^2 \psi_0 + \bar{w}_0 &= 0 \\ \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial t} + S \cos t \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \xi} - \frac{1}{2} D^2 \bar{w}_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \quad (11)$$

$\epsilon^1$ では

$$\left. \begin{aligned} D^2 \psi_1 + \bar{w}_1 &= 2 \bar{w}_0 \cos \kappa \xi e^{-\kappa \eta} \\ \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial t} + S \cos t \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \xi} - \frac{1}{2} D^2 \bar{w}_1 &= 2 \cos \kappa \xi e^{-\kappa \eta} \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial t} \end{aligned} \right\} \dots \quad (12)$$

$\epsilon^2$ では

$$\left. \begin{aligned} D^2 \psi_2 + \bar{w}_2 &= 2 \bar{w}_1 \cos \kappa \xi e^{-\kappa \eta} - \bar{w}_0 e^{-2 \kappa \eta} \\ \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial t} + S \cos t \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial \xi} - \frac{1}{2} D^2 \bar{w}_2 &= 2 \cos \kappa \xi e^{-\kappa \eta} \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial t} - e^{-2 \kappa \eta} \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial t} \end{aligned} \right\} \dots \quad (13)$$

境界条件は、

$$\eta=0 \quad \text{で} \quad \psi_0 = \psi_I = \psi_{II} = \dots = 0$$

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial \eta} = -\cos t, \quad \frac{\partial \psi_I}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi_{II}}{\partial \eta} = \dots = 0 \quad \dots \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta = \infty \text{ で } \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} &= \frac{\partial \psi_I}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi_{II}}{\partial \xi} = \dots = 0 \\ \frac{\partial \psi_0}{\partial \eta} &= \frac{\partial \psi_I}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi_{II}}{\partial \eta} = \dots = 0 \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

式(11)は、見掛け上、移流慣性項を含むが、 $\epsilon=0$  すなわち、砂漣の凹凸がないときの式であるから、 $\xi$  方向に一様で、移流慣性の効果を含まない Stokes layer の流れを解にもつ。すなわち、 $\psi_0$ ,  $\bar{w}_0$  は次のようになる。

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \left\{ -\frac{1}{2} e^{-\eta} \sin \eta - \frac{1}{2} (1 - e^{-\eta} \cos \eta) \right\} \cos t \\ &\quad + \left\{ -\frac{1}{2} (1 - e^{-\eta} \cos \eta) + \frac{1}{2} e^{-\eta} \sin \eta \right\} \sin t \\ \bar{\omega}_0 &= \left\{ -e^{-\eta} \cos \eta - e^{-\eta} \sin \eta \right\} \cos t \\ &\quad + \left\{ e^{-\eta} \cos \eta - e^{-\eta} \sin \eta \right\} \sin t\end{aligned} \quad \dots \quad (16)$$

移流慣性項を考慮するには、少なくとも  $\epsilon^1$  まで解く必要がある。ところで、本研究では移流慣性項の効果を最も簡略化された形で評価することを目的としているので  $\epsilon^2$  以上の高次の項を求めるとはしない。

$\bar{\omega}_1$  は既知であるので、式(12)は  $\xi, t$  に関して周期的な外力を受けたときの  $\psi_1, \bar{\omega}_1$  の応答を求める問題と解釈し得る。 $\xi$  に関して左辺は定数係数で、右辺外力項は  $\xi$  に関しては  $\cos \kappa \xi, \sin \kappa \xi$  の形のみを含むので、 $\psi_1, \bar{\omega}_1$  は  $\xi$  に関しては  $\cos \kappa \xi, \sin \kappa \xi$  のみより成り立っている。 $t$  に関しては  $\bar{\omega}_1$  が基本周波数成分  $\cos t, \sin t$  より成り立っているので、 $\psi_1, \bar{\omega}_1$  もその成分がかなりの割合を占めているものと推測される。しかし、移流慣性項の係数に  $\cos t$  を含むので、周波数間の相互作用が起こる。ここでは、最も簡略化されたものとして、基本周波数成分と  $\cos t$  との相互作用のみを考える。すなわち、基本周波数成分  $\cos t, \sin t$  のほかに、これと係数  $\cos t$  との積として生じてくる定数項、および  $\cos 2t, \sin 2t$  のみを考慮することとする。以上の考察より、 $\psi_1$  を次のように有限 Fourier 展開する。

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= A_0 \cos \kappa \xi + B_0 \sin \kappa \xi \\ &+ A_1 \cos \kappa \xi \cos t + B_1 \sin \kappa \xi \cos t \\ &+ A_2 \cos \kappa \xi \sin t + B_2 \sin \kappa \xi \sin t \\ &+ A_3 \cos \kappa \xi \cos 2t + B_3 \sin \kappa \xi \cos 2t \\ &+ A_4 \cos \kappa \xi \sin 2t + B_4 \sin \kappa \xi \sin 2t \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ここに、 $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, B_0, B_1, B_2, B_3, B_4$  は  $\eta$  の  
みの閾数であり、境界条件は  $x=0$  および  $\infty$  で

である。 $\bar{w}_1$  についても式(17)と同様の展開を行うが

ここでは省略する。

$\psi_1$ ,  $\bar{w}_1$  についての展開式を式(12)に代入し, Galerkin 法を用いて整理する. すると,  $A_0, B_1, B_2, A_3, A_4$  がすべてゼロとなることが導かれる. これは, 物理的には, 順流時の流れと逆流時の流れが対称であることを表わしている. それ以外のものについては, 式(12)より  $\bar{w}_1$  を消去して  $\psi_1$  のみの式に書き直した後整理すると, 次のような 5 元連立常微分方程式となる.

$$\begin{aligned}
& \{\ddot{B}_0 - 2\kappa^2 \dot{B}_0 + \kappa^4 B_0\} + S\{\ddot{A}_1 - \kappa^2 A_1\} = -S \cdot E_1 \\
& -S\{\ddot{B}_0 - \kappa^2 B_0\} + \frac{1}{2}\{\ddot{A}_1 - 2\kappa^2 \dot{A}_1 + \kappa^4 A_1\} \\
& -\{\ddot{A}_2 - \kappa^2 A_2\} - \frac{1}{2}S\{\ddot{B}_3 - \kappa^2 B_3\} = -\frac{1}{2}\{\dot{E}_1 - \kappa^2 E_1\} \\
& \{\ddot{A}_1 - \kappa^2 A_1\} + \frac{1}{2}\{\ddot{A}_2 - 2\kappa^2 \dot{A}_2 + \kappa^4 A_2\} \\
& -\frac{1}{2}S\{\dot{B}_4 - \kappa^2 B_4\} = \frac{1}{2}\{\dot{E}_2 - \kappa^2 E_2\} \\
& \frac{1}{2}S\{\ddot{A}_1 - \kappa^2 A_1\} + \frac{1}{2}\{\ddot{B}_3 - 2\kappa^2 \dot{B}_3 + \kappa^4 B_3\} \\
& -2\{\dot{B}_4 - \kappa^2 B_4\} = -\frac{1}{2}S \cdot E_1 \\
& \frac{1}{2}S\{\ddot{A}_2 - \kappa^2 A_2\} + 2\{\dot{B}_3 - \kappa^2 B_3\} \\
& + \frac{1}{2}\{\dot{B}_4 - 2\kappa^2 \dot{B}_4 + \kappa^4 B_4\} = \frac{1}{2}S \cdot E_2
\end{aligned}
\quad \dots \quad (19)$$

ここに  $\cdots$ ,  $\cdots$  は  $\eta$  に関する 4 階, 2 階の微分を表わす.  
また

$$E_1 = 2(\cos \eta + \sin \eta) e^{-(1+\kappa)\eta}$$

$$E_2 = 2(\cos \eta - \sin \eta) e^{-(1+\kappa)\eta}$$

である。

式(19)は、定数係数であるのでその特殊解は容易にみつかり、その形は次のようになる。

$$\begin{aligned} B_0 &= C_0 \cos \eta e^{-(1+\kappa)\eta} + D_0 \sin \eta e^{-(1+\kappa)\eta} \\ A_1 &= C_1 \cos \eta e^{-(1+\kappa)\eta} + D_1 \sin \eta e^{-(1+\kappa)\eta} \\ A_2 &= C_2 \cos \eta e^{-(1+\kappa)\eta} + D_2 \sin \eta e^{-(1+\kappa)\eta} \\ B_3 &= C_3 \cos \eta e^{-(1+\kappa)\eta} + D_3 \sin \eta e^{-(1+\kappa)\eta} \\ B_4 &= C_4 \cos \eta e^{-(1+\kappa)\eta} + D_4 \sin \eta e^{-(1+\kappa)\eta} \end{aligned} \quad \dots (20)$$

$C_0 \sim C_4$ ,  $D_0 \sim D_4$  は、式 (20) を式 (19) に代入し  $\cos \eta$ ,  $\sin \eta$  ごとに整理することによって得られる 10 元 1 次連立方程式の解として与えられる。

特殊解 (20) のみでは境界条件 (18) を満たすことはできないので、次に式 (19) の齊次解を求める。式 (19) の齊次方程式は定数係数であるので次の形の解をもつ。

$$\left. \begin{array}{l} B_0 = L_0 e^{\sigma \eta} \\ A_1 = L_1 e^{\sigma \eta} \\ A_2 = L_2 e^{\sigma \eta} \\ B_3 = L_3 e^{\sigma \eta} \\ B_4 = L_4 e^{\sigma \eta} \end{array} \right\} \dots \quad (21)$$

式(21)を式(19)の齊次方程式に代入すると

$$\begin{array}{ccccc|c} \frac{1}{2}(\sigma^2 - \kappa^2)^2 & \frac{1}{2}S(\sigma^2 - \kappa^2) & 0 & 0 & 0 & L_0 \\ -S(\sigma^2 - \kappa^2) & \frac{1}{2}(\sigma^2 - \kappa^2)^2 & -(\sigma^2 - \kappa^2) & -\frac{1}{2}S(\sigma^2 - \kappa^2) & 0 & L_1 \\ 0 & (\sigma^2 - \kappa^2) & \frac{1}{2}(\sigma^2 - \kappa^2)^2 & 0 & -\frac{1}{2}S(\sigma^2 - \kappa^2) & L_2 = 0 \\ 0 & \frac{1}{2}S(\sigma^2 - \kappa^2) & 0 & \frac{1}{2}(\sigma^2 - \kappa^2)^2 & -2(\sigma^2 - \kappa^2) & L_3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}S(\sigma^2 - \kappa^2) & 2(\sigma^2 - \kappa^2) & \frac{1}{2}(\sigma^2 - \kappa^2)^2 & L_4 \end{array} \quad (22)$$

$L_0 \sim L_4$  がすべてゼロではない解をもつためには係数の行列式がゼロでなければならないので、これより  $\sigma^2$  のとり得る値が決まる。すなわち  $\mu = \frac{1}{2}(\sigma^2 - \kappa^2)$  とおくと

$$\mu^6 \left\{ \mu^4 + (5+S^2) \mu^2 + \left( 4 + S^2 + \frac{3}{16} S^4 \right) \right\} = 0$$

..... (23)

が  $\mu$  (あるいは  $\sigma^2$ ) を与える固有方程式となり,  $L_0 \sim L_4$  を求めることは, それに対応する固有ベクトルを求める同じである.

式(23)を満たす  $\sigma$  は 10 個得られるが、そのうち  $\eta = \infty$  での境界条件を考慮して  $\eta = \infty$  で発散するものを除くと、次の 5 つの形の  $\sigma$  が得られる。

$$\sigma = -\kappa, \quad -r_1 \pm i\delta_1, \quad -r_2 \pm i\delta_2$$

ここに、

$$\mu_n = \left\{ \left( \frac{5}{2} + \frac{S^2}{2} \right) \pm \frac{1}{2} \left( 9 + 6 S^2 + \frac{1}{4} S^4 \right)^{1/2} \right\}^{1/2}$$

複号は  $n=1$  で  $+$ ,  $n=2$  で  $-$  をとる.

$\sigma = -\kappa$  は重根なので、式(21)の形の解のほかに  $\eta \cdot e^{-\kappa y}$  の形の解をもつことを考慮し、さらに関数形をすべて実数型に直して、式(19)の齊次解を書き下すと

$$\begin{aligned}
B_0(\eta) &= c_0 e^{-\kappa \eta} + d_0 \eta e^{-\kappa \eta} \\
&\quad + e^{-r_1 \eta} (g_1 \cos \delta_1 \eta + g_2 \sin \delta_1 \eta) \\
&\quad + e^{-r_2 \eta} (g_3 \cos \delta_2 \eta + g_4 \sin \delta_2 \eta) \\
A_1(\eta) &= c_1 e^{-\kappa \eta} \\
&\quad + (f_{11} \cdot i) e^{-r_1 \eta} (-g_1 \sin \delta_1 \eta + g_2 \cos \delta_1 \eta) \\
&\quad + (f_{13} \cdot i) e^{-r_2 \eta} (-g_3 \sin \delta_2 \eta + g_4 \cos \delta_2 \eta) \\
A_2(\eta) &= c_2 e^{-\kappa \eta} + d_0 f_{20} \eta e^{-\kappa \eta} \\
&\quad + f_{21} e^{-r_1 \eta} (g_1 \cos \delta_1 \eta + g_2 \sin \delta_1 \eta) \\
&\quad + f_{23} e^{-r_2 \eta} (g_3 \cos \delta_2 \eta + g_4 \sin \delta_2 \eta) \\
B_3(\eta) &= c_3 e^{-\kappa \eta} + d_0 f_{30} \eta e^{-\kappa \eta} \\
&\quad + f_{31} e^{-r_1 \eta} (g_1 \cos \delta_1 \eta + g_2 \sin \delta_1 \eta) \\
&\quad + f_{33} e^{-r_2 \eta} (g_3 \cos \delta_2 \eta + g_4 \sin \delta_2 \eta) \\
B_4(\eta) &= c_4 e^{-\kappa \eta} \\
&\quad + (f_{41} \cdot i) e^{-r_1 \eta} (-g_1 \sin \delta_1 \eta + g_2 \cos \delta_1 \eta) \\
&\quad + (f_{43} \cdot i) e^{-r_2 \eta} (-g_3 \sin \delta_2 \eta + g_4 \cos \delta_2 \eta)
\end{aligned}$$

..... (24)

15

$$f_{20} = 8S/(S^2 - 8), \quad f_{30} = -2S^2/(S^2 - 8)$$

$$(f_{11} \cdot i) = 2 \mu_1/S, \quad (f_{13} \cdot i) = 2 \mu_2/S$$

$$f_{21} = -\frac{2}{3} \frac{1}{S} \left( -\mu_1^2 + \frac{3}{4} S^2 - 2 \right)$$

$$f_{23} = -\frac{2}{3} \frac{1}{S} \left( -\mu_2^2 + \frac{3}{4} S^2 - 2 \right)$$

$$f_{31} = -\frac{8}{3} \frac{1}{S^2} \left( -\mu_1^2 + \frac{3}{8} S^2 + 1 \right)$$

$$f_{33} = -\frac{8}{3} \frac{1}{S^2} \left( -\mu_2^2 + \frac{3}{8} S^2 + 1 \right)$$

$$(f_{41} \cdot i) = \frac{4}{3} \frac{\mu_1}{S^2} \left( -\mu_1^2 + \frac{3}{4} S^2 + 1 \right)$$

$$(f_{43} \cdot i) = \frac{4}{3} \frac{\mu_2}{S^2} \left( -\mu_z^2 + \frac{3}{4} S^2 + 1 \right)$$

$S = \sqrt{8}$  の場合には別の形で表現されるが、ここでは重要でないので示さない。

式(20)と式(24)を加えたものが一般解である。10個の定数  $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, d_0, g_1, g_2, g_3, g_4$  は  $\eta=0$  での境界条件より決定される。

以上まとめると、式(1)～(6)の非線形偏微分方程式系は、Oseen 近似、 $\epsilon$  による摂動展開、時間についての有限 Fourier 展開により、移流慣性の効果を最も簡略化された形で含んだまま、式(18)、(19)の 5 元連立線形常微分方程式に変換された。さらに、5 元連立常微分方程式の特殊解は 10 元連立方程式を求める問題に、齊次解は固有値と固有ベクトルを求める問題および 10 元連立方程式を解く問題に帰着された。

偏微分方程式を線形常微分方程式に書き換えるまでの演算には、実は、Oseen 近似は必要としない。 $\epsilon$  の摂動展開と有限 Fourier 展開のみで線形常微分方程式にたどりつくことができる。ただし、その場合には常微分方程式は分布係数となり、式(17)あるいは式(21)のように簡単に解の形を見つけることは不可能となる。この点にも Oseen 近似の解析上の利点がある。

近似の精度あるいは理論の適用範囲については、本来詳細な検討が望ましいが、今回は前に述べた本論文の趣旨から、次の 2 点のみを指摘するにとどめる。 $\epsilon$  に関する摂動展開は、結果的には  $\xi$  方向に直交関数である三角関数による展開を行ったことになるので、一般的な摂動展開よりはよい結果を期待し得る。時間に関する有限 Fourier 展開には、Galerkin 法を用いているので、少

なくとも切り捨てた残差の中には、展開成分は残っていないことが結論し得る。

### 3. 結果の例

図-1(a)に、半周期間の流速の分布を示す。計算条件は、著者ら<sup>14)</sup>の振動流風洞における流速測定と比較するために  $d_0/\lambda=2$ ,  $2a/\lambda=0.1$ ,  $\lambda/\delta=100$ とした。砂漣の steepness がやや小さめである点を除き、波で生じる砂漣の諸元と同程度である。流れは、加速時 ( $t=-1/3\pi$ ) には剝離しない。最大流速時 ( $t=0$ ) 以降、流れは剝離し、逆流を伴う渦が砂漣背後に現われる。これらの特徴は実験<sup>14)</sup>とよく一致している。減速が進むにつれ、渦はしだいに谷の中央部およびさらに下流部で顕著になる。流れの逆転時 ( $t=-1/2\pi$ ) には、底面近くに平板上の振動流と同様な強い流れの先走りが計算されている。この 2 点については、実験とは一致しない。これは、主流成分が小さい位相時に、この近似の内含する誤差が際立って目につくためであろう。

今回の解析は層流理論である。一方、実験で測定された流れは乱流である。それで、動粘性係数  $\nu$  の代わりに渦動粘性係数  $\nu_T$  をとり、仮に  $\nu_T=100\nu$  とおいて

同様の計算を行った。結果は図-1(b)に示す。実測結果と比較すると、壁面で non-slip の条件の影響が、かなり上方にまで及び実際の現象<sup>14)</sup>とは異なっている。このように、単に  $\nu$  を  $\nu_T$  におきかえるだけではうまくいかず、むしろ層流解析の方が現象をよく説明し得る。

図-2 に図-1(a)の流れのときの底面せん断応力を示す。図中破線 ( $\epsilon^0$ ) は、直交曲線座標での Stokes 流れとしてのもの、実線 ( $\epsilon^1$ ) は、 $\epsilon^1$  まで考慮した際の結果を示す。(a) は、半周期間の 4 つの異なる位相におけるせん断応力の分布を示す。最大流速時 ( $t=0$ ) では、 $\kappa\xi=0 \sim \pi$  の砂漣背後では、渦の存在による負のせん断応力がみとめられる。 $\kappa\xi=\pi \sim 2\pi$  の峰の上流斜面では、正のせん断応力が卓越する。これにより、谷の中の砂が、両側の峰に掃き上げられることが予想される。転流時 ( $t=\pi/2$ ) では、せん断応力は、小さくなり砂の輸送が大きくなることは期待できない。結局、この例では、せん断応力は砂漣を発達させる傾向にあるといえる。(b) は、砂漣の峰、中間、谷の 3 点におけるせん断応力の時間変動を示す。 $\epsilon^0$  で示される直交曲線座標系での Stokes layer の流れでは、せん断応力は主流と  $\pi/4$  の位相差をもつが、 $\epsilon^1$  まで考慮した今回の結果では、峰上では、主流との位相差はほとんどなくなっている。一方、

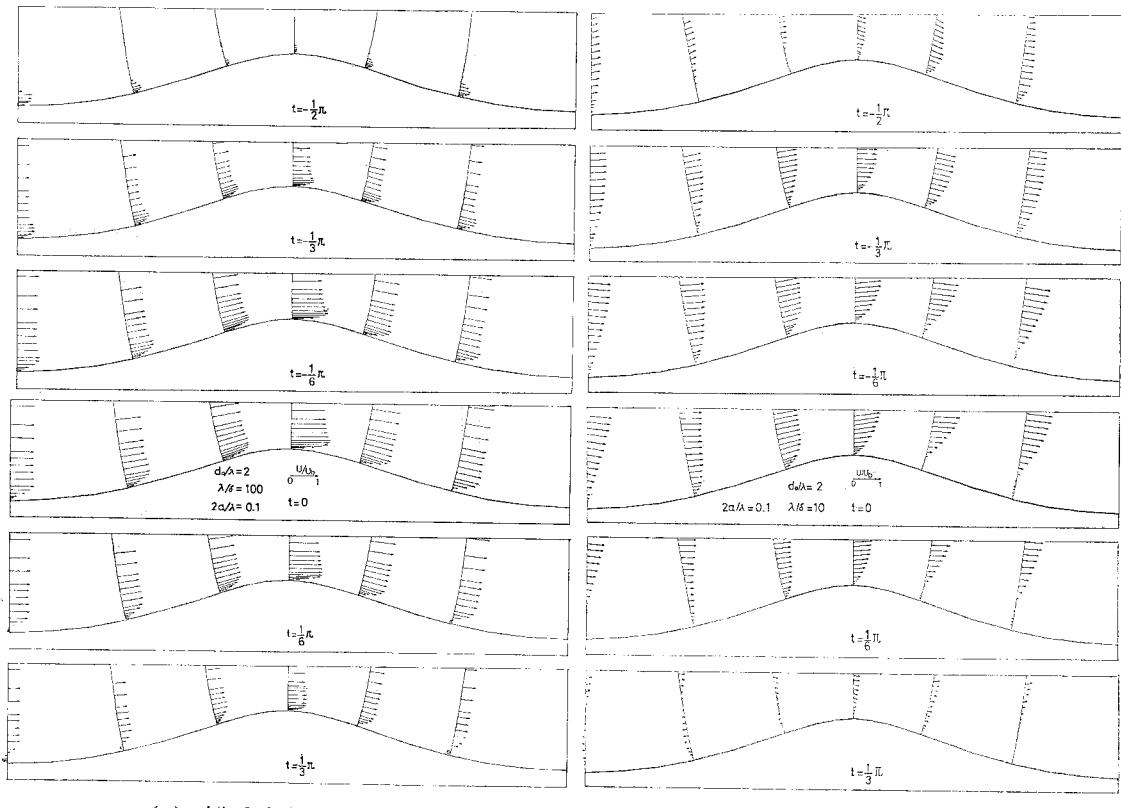


図-1 砂漣上の流速分布

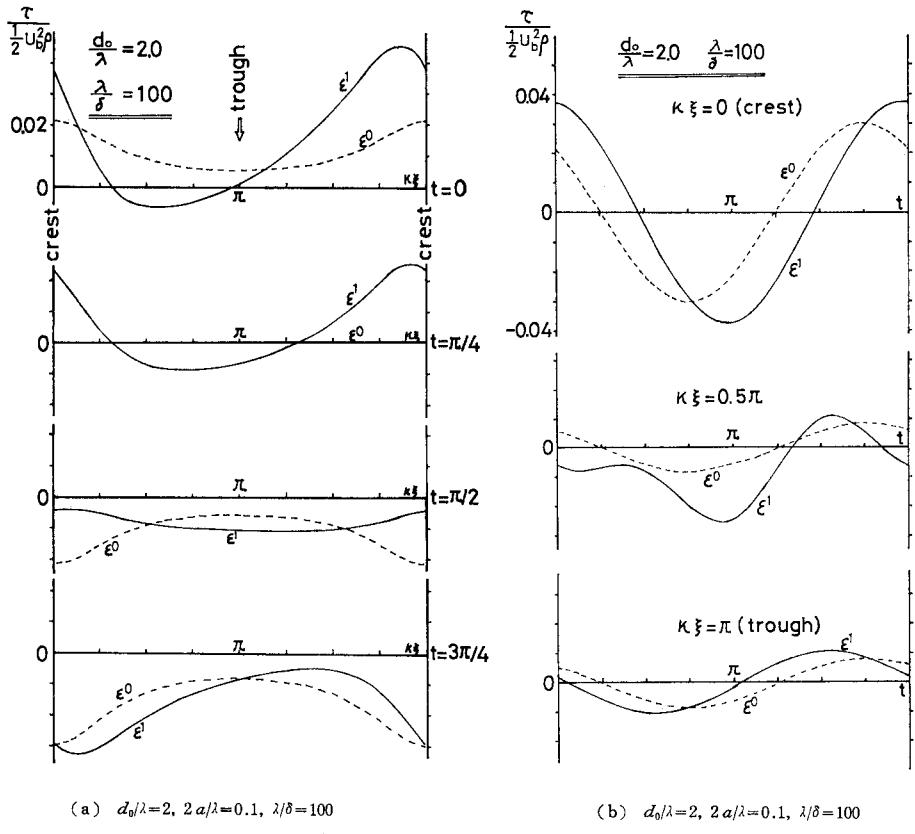


図-2 底面せん断応力分布

谷では、位相差がより大きくなっている。

図-3 には、DuToit & Sleath (1981)<sup>15)</sup> の流速の実測結果との比較を示す。上の図は峰上の断面における流速の振幅の分布を示す。図中、白丸は実測値、四角印は彼らが引用している Sleath の数値解析の結果である。横軸  $\gamma_2$  は、峰の頂点よりの無次元距離である。下の図は、上図矢印の点における流速変動を示す。実測の流速変動は、大略正弦的に変動しているが、ピーク付近で鋭く正弦変動からずれている。今回の解析では基本周波数の倍成分までしか考慮していないので、このような急激な変化には追随できない。実測値の多くは、粘性があまり顕著ではなくポテンシャル流れとみなせる領域にあるため、層流解としての適否を比較することは難しい。しかし、データのばらつき程度を考慮すれば、流速の振幅については、大体良好な一致がみられる。

式(17)の展開形の中で  $B_0 \sin \kappa \xi$  は定常項であるから、これだけを取り出すといわゆる定常 streaming が得られる。定常 streaming については日野・藤崎<sup>7)</sup>、金子ら<sup>8)~10)</sup>、榎山ら<sup>11)</sup>が実験的に調べているが、ここでは金子らとの比較を図-4 の (a), (b) に示す。(a) は文献 9) 中の図-1 に対応する条件、(b) は文献 8) 中の

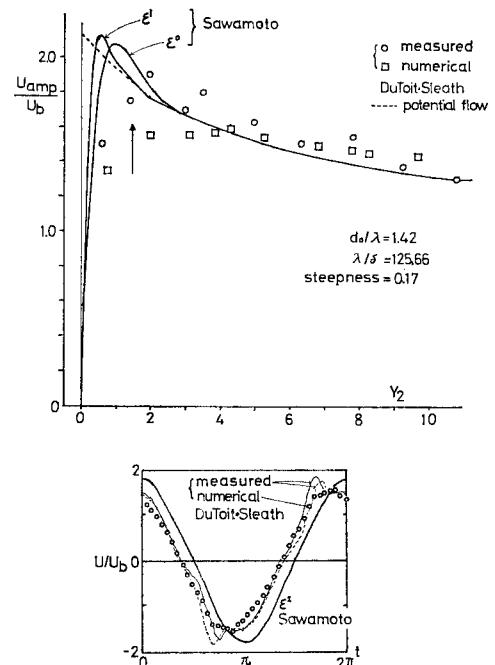


図-3 DuToit &amp; Sleath (1981) との比較

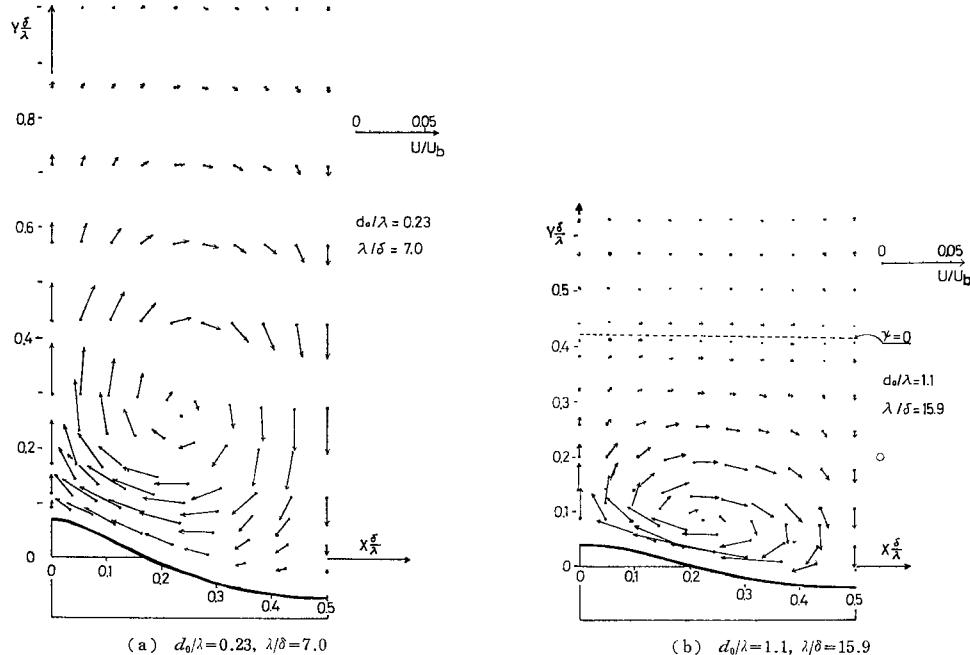


図-4 定常 streaming

図-9 に対応する条件での計算結果である。流速の大きさについてのこれらの文献中には実測値はないので比較し得ないが、流れのパターンは概略再現されている。(b)の場合  $\psi=0$  の線が示されているが、このような線が存在することは、金子らのいう double structure に対応している。ただこれの発生限界は  $d_0/\lambda$ ,  $\lambda/\delta$  の両パラメーターを変化させると複雑に変化し、文献 8) で示されている発生限界  $\lambda/\delta > 26$  は確かめられなかった。

#### 4. 結 論

砂漣上の振動流を Oseen 近似、steepness での摂動展開、時間に関する有限 Fourier 展開を用いて解析的に解いた。これにより、移流慣性項が重要な役割を果たすパラメーターの範囲の流れを再現することができた。

謝 辞：本研究は、鹿島学術振興財団の援助のもとに、著者がアメリカ、マサチューセッツ工科大学マドセン助教授のもとに滞在していた間に行ったものである。この機会を与えて下さった同財団およびその他関係者各位に深く謝意を表します。

#### 参 考 文 献

- 1) Lyne, W.H. : Unsteady viscous flow over a wavy wall, Jour. of Fluid Mech., 50, pp. 33~48, 1971.
- 2) Brooke Benjamin, T. : Shearing flow over a wavy wall, Jour. of Fluid Mech., 6, pp. 161~205, 1958.
- 3) Sleath, J.F.A. : Stability of laminar flow at seabed, ASCE, WW 2, pp. 105~122, 1974.
- 4) Sleath, J.F.A. : A contribution to the study of vortex ripples, Jour. of Hydraulic Research, 13, pp. 315~328, 1975.
- 5) Sleath, J.F.A. : On rolling-grain ripples, Jour. of Hydraulic Research, 14, pp. 69~80, 1976.
- 6) 宇多高明・日野幹雄：波状曲面上の層流振動流れの理論、土木学会論文報告集、第 237 号、pp. 27~36, 1975.
- 7) 日野幹雄・藤崎治男：波底面上の粘性振動流、第 22 回海岸工学講演会論文集、pp. 35~40, 1975.
- 8) Kaneko, A. and H. Honji : Double structures of steady streaming in the oscillatory viscous flow over a wavy wall, Jour. of Fluid Mech. 93, pp. 727~736, 1979.
- 9) Matsunaga, N., A. Kaneko and H. Honji : A numerical study of steady streamings in oscillatory flow over a wavy wall, Jour. of Hydraulic Research, 19, pp. 29~42, 1981.
- 10) Kaneko, A. : Oscillation sand ripples in viscous fluids, Proc. of JSCE, No. 307, 1981.
- 11) Longuet-Higgins : Oscillating flow over steep sand ripples, Jour. of Fluid Mech. 107, pp. 1~35, 1981.
- 12) 沢本正樹：波底面上の半無限領域の写像関数、土木学会論文報告集、第 269 号、pp. 147~150, 1978.
- 13) 権貝博美・京藤敏達：流体力学に用いられる摂動法について、NAGARE, 13-4, pp. 14~18, 1981.
- 14) Sawamoto, M., T. Yamashita and T. Kurita : Vortex formation over rippled bed under oscillatory flow, Technical Report, 27, Dept. of Civil Engg, Tokyo Institute of Technology, pp. 75~85, 1980.  
または、沢本正樹・山下俊彦：砂漣上の振動流境界層流れ、第 26 回海岸工学講演会、pp. 51~55, 1979.
- 15) DuToit, C.G. and J.F.A. Sleath : Velocity measurements close to rippled beds in oscillatory flow, Jour. of Fluid Mech. 112, pp. 71~96, 1981.
- 16) 横山 勉・三村信男・渡辺 晃：砂漣上の振動流境界層に関する実験的研究、第 28 回海岸工学講演会、pp. 237~241, 1981.