

平面骨組の有限変位解析の精度に関する一考察

ACCURACY OF FINITE DISPLACEMENT ANALYSIS
OF PLANE FRAMES

後藤芳顯*・長谷川彰夫**・西野文雄***

By Yoshiaki GOTO, Akio HASEGAWA and Fumio NISHINO

1. まえがき

骨組構造物が外力を受けた際に生ずる変位は、一般に変形に関与する変位と関与しない変位である剛体変位から成り立っている。この場合、剛体変位に関する取扱いが骨組の有限変位問題の離散化解析に大きな役割を果たすのはよく知られた事実である。従来行われてきた有限変位解析の定式化では、この剛体変位を分離して解析するかしないかにより、2つの流れがある。

1つは固体に関する有限変位問題の理論的定式化の主流である Lagrange の方法^{1), 2)}により求められた直接 Lagrange 表現の非線形微分方程式に基づくもので、ここでは剛体変位を分離することなく、変形に関与する変位としない変位を一括して取り扱う。この定式化では、近年、ひずみと変位場に関する仮定と、変分原理³⁾を用い各種基本式が導かれている^{4), 5)}。これら的基本式の解法としては、解析解の求まる低次非線形のはり・柱の式⁶⁾や特定の境界条件の場合^{5), 7)}を除いて、有限要素法^{8), 9)}、差分法¹⁰⁾等の何らかの近似的な離散化手法によって、数値解が求められており、従来、Lagrangian formulation^{11), 12)}、Total Lagrangian formulation¹³⁾、Direct formulation¹⁴⁾などとよばれている。しかしこの手法では、有限要素法を用いても、容易に扱えるのは変位が比較的小さい範囲のもので^{15)~19)}、変位に制限をつけない場合については、ひずみと変位の関係における非線形項のほとんどすべてが重要¹²⁾となり、剛性方程式の誘導が非常に困難になる^{8), 9), 11)}。

一方、剛体変位を分離して解析する定式化^{14), 20)~30)}では、おもに数値解析を目的として、骨組の微小変位問題やはり・柱問題の解法を拡張する形で開発されており、

従来、Eulerian formulation^{12), 16), 25), 29)}、Eulerian Lagrangian formulation¹¹⁾、Up-dated Lagrangian formulation²⁹⁾、Indirect formulation¹⁴⁾、Moving coordinate system を用いる方法^{12), 13), 15)}、剛体変位除去の手法³⁰⁾などとよばれている。この方法は前者の方法と異なり、高次非線形の微分方程式によらず、簡単な幾何学的考察と、物理的考察から変形を表わす低次非線形の支配微分方程式を用い、初めから有限要素に関する離散化式を求める目的とした手法であり、変位が大きい場合を扱うのに数値解析上有利であると考えられている。

この手法では、通常の骨組構造物における有限変位問題の非線形性に關係しているのはおもに剛体回転であるので、これを分離して考えれば、残りの変位に関し低次非線形の微分方程式を用いて有限変位問題を扱うことが可能であろうという考え方をもとにしている。具体的には、骨組を比較的細かい有限要素に分割したうえで、各要素ごとに剛体変位を除去し、残りの変形を表わす微分方程式としては通常ははり・柱の式^{14), 20)~22), 24)~28)}あるいは微小変位の式^{21), 23), 29)}を用いる。次に、これらの変形を表わす微分方程式から導かれた要素節点間の剛性方程式に剛体回転に対する座標変換を行ったうえで、剛体変位成分を加え、全節点変位、全節点力に関する剛性方程式を求める。

先行荷重、変形状態を考慮して、増分荷重に対する支配方程式を直接求める定式化^{13), 22), 27), 28)}もあるが、これは剛体変位除去の手法における支配方程式から増分関係式を求めた場合に相当する。

この定式化では、高次非線形の微分方程式を解くことが不要で、はり・柱の式や微小変位の式などのよく知られた剛性方程式を利用し、簡単な剛体運動に対する幾何学的考察だけで、剛性法による数値解析が可能であるため、実用計算に多く用いられている。また剛体運動を厳密に評価し、要素分割長を小さくしていけば、大きな変位まで扱える直接 Lagrange 表現の支配微分方程式の

* 正会員 工修 名古屋工業大学助手 土木工学科

** 正会員 工博 東京大学助教授 工学部土木工学科

*** 正会員 Ph.D. 東京大学教授 工学部土木工学科

解に収束するであろうと一般には考えられている。

変分原理の適用による棒理論の有限変位問題の理論的定式化に関してはすでに検討がなされ、ひずみ、変位場の仮定と得られる直接 Lagrange 表現の基本微分方程式の関係が明らかにされている^{4),5)}。また剛体変位除去の手法でも、一般的な定式化が示され^{13),30)}、剛体変位除去後の変位と節点力の関係もはり・柱の式以上に精度のよい関係式も導かれている^{30),31)}。

しかし、これら 2 種類の定式化によって得られる解自体の相互関係については、数値的な検証^{28),29)}を除いて、一般的かつ厳密な検討は、ほとんどなされていないのが現状である。剛体変位を除く定式化においても、大きな変位まで扱える直接 Lagrange 表現の支配微分方程式から、何の近似もなく求めた要素の変形と節点力の関係式を用いるもの³⁰⁾もあるが、その場合の解の相互関係は自明である。しかし、このような手法では、直接 Lagrange 表現の高次非線形微分方程式を事实上扱うことになり、その解析過程は複雑で、支配微分方程式の簡略化を目的とした剛体変位除去の意味は薄れる。

本報告では、一軸曲げと軸力を受ける棒の理論⁵⁾の変位に制限をつけない有限変位弹性問題に限定し、剛体変位除去後の変形を表わす式として、低次非線形や線形の微分方程式を用いた通常の剛体変位除去の手法によって得られる解と直接 Lagrange 表現の高次非線形微分方程式の解との関係について理論的に検討する。

まず、支配微分方程式の理論解に対応するものとして、離散化解析のもとになる有限要素両節点間の幾何学、力学諸量の代数関係式を導く。関係式を導く目的が要素分割長を小さくしていった場合の剛体変位除去の手法による解の収束性、あるいは近似の程度を検討することにあるから、離散化関係式は収束に関する Parameter である要素分割長についてべき級数表示する。このとき、支配微分方程式の解法には要素分割長に関する Taylor 展開による解法³²⁾を用いる。

次に、得られたべき級数表示の離散化関係式をもとに剛体変位除去の手法において要素分割長を無限小にした極限の収束解が、直接 Lagrange 表現のどの支配微分方程式の解に対応するかを調べる。さらに、離散化関係式のべき級数の高次項を比較することにより、剛体変位除去の手法の直接 Lagrange の手法に対する近似の程度も検討する。

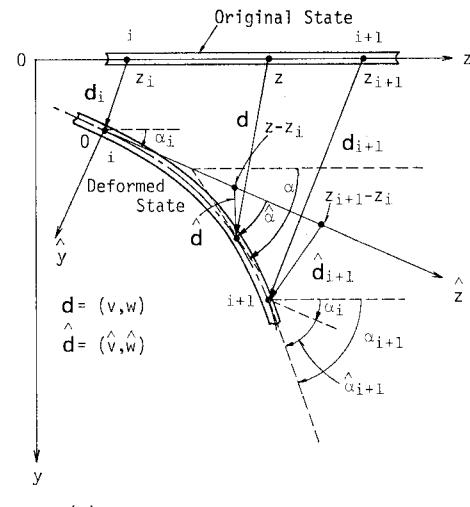
前に触れたように、数値解析に関する定式化では、視点の相違から多くの呼称が使われ、呼称と実質的手法の対応は必ずしも統一されておらず、多少の混乱³³⁾がみられる。本報告では、定式化における剛体変位除去の有無の立場から、ここで述べた 2 つの定式化を「直接 Lagrange の手法」と「剛体変位除去の手法」と便宜的によ

び区別する。

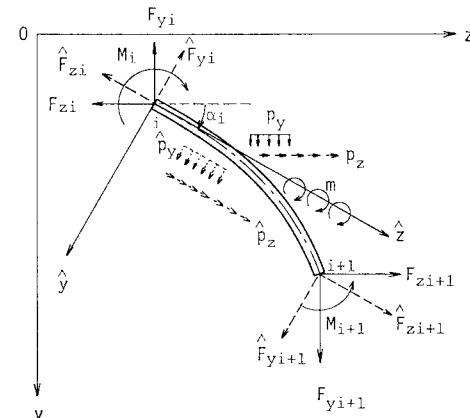
2. 座標系および幾何学・力学量成分

z 軸を変形前の骨組部材軸線方向に、 y 軸の原点を部材断面図心に、それぞれ選ぶ Fig. 1 のような直交直線座標 (y, z) と、剛体変位除去の手法に固有の局所座標として、部材をさらに分割した有限要素 $i, i+1$ の i 節点の部材断面図心を原点とし、要素の剛体変位とともに移動する直交直線座標 (\hat{y}, \hat{z}) とを考える。

この局所座標に関して Fig. 1 のように \hat{z} 軸を変形後の i 節点での部材軸接線方向に選ぶ場合^{30),34),35)}と、Fig. 2 のように $i, i+1$ 節点を結ぶ方向に選ぶ場合^{14),20)~30)}が考えられ、おもに前者は伝達マトリックス法、後者は剛性法に用いられる。ここでは微分方程式よ



(a) Displacement Components



(b) Force Components

Fig. 1 Coordinate Systems of a Beam Element.

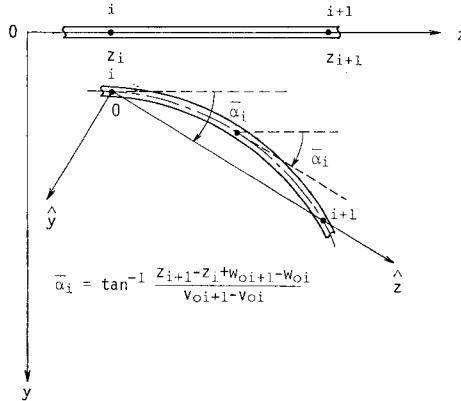


Fig. 2 An Alternative Local Coordinate.

り Taylor 展開を用いて節点諸量間の伝達形式の解を求める都合上、要素の剛体回転角を節点のたわみ角で表わす必要があるため、前者の局所座標を用いる。後者の局所座標を用いた場合についても、Fig. 2 のように要素の剛体回転角と等しい要素のたわみ角が $i, i+1$ 節点間に存在することが平均値の定理より保証されているので、たわみ角が等しくなる点において、部材軸接線方向に局所座標を設定したことに相当し、定性的には前者と同様の議論が可能と考えられる。

座標 (y, z) ならびに (\hat{y}, \hat{z}) に関する変位成分、節点力成分、分布外力成分を次のように定義する。変位については、Fig. 1 (a) に示すように (y, z) 座標成分を (v, w, α) 、部材の有限要素 $i, i+1$ の剛体変位成分を除去したものの (\hat{y}, \hat{z}) 座標成分を $(\hat{v}, \hat{w}, \hat{\alpha})$ と表わす。ここに (v, w) は並進変位成分、 α は z 軸から y 軸の向きを正にとった回転成分であり、 (\hat{v}, \hat{w}) 、 $\hat{\alpha}$ も (\hat{y}, \hat{z}) 座標に関して同様の意味を表わす。また並進変位成分の部材断面図心軸上の値を特に (v_0, w_0) 、 (\hat{v}_0, \hat{w}_0) で表わす。

両座標成分間の関係は、簡単な幾何学的考察により、

次のように表わされる。

$$\begin{bmatrix} v-v_i \\ w-w_i+z-z_i \\ \alpha-\alpha_i \end{bmatrix} = [R_i] \begin{bmatrix} \hat{v} \\ \hat{w}+z-z_i \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (1)$$

ここに

$$[R_i] = \begin{bmatrix} [r_i] & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [r_i] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_i, \sin \alpha_i \\ -\sin \alpha_i, \cos \alpha_i \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (2 \cdot a, b)$$

下添字 i は i 節点での量であることを示す。

節点力、分布外力成分についても、Fig. 1 (b) に示すように (y, z) 座標成分を (F_y, F_z, M) 、 (p_y, p_z, m) 、 (\hat{y}, \hat{z}) 座標成分を $(\hat{F}_y, \hat{F}_z, M)$ 、 $(\hat{p}_y, \hat{p}_z, m)$ と表わす。ここに、 (F_y, F_z) 、 (\hat{F}_y, \hat{F}_z) は力の成分、 M はモーメント成分、 (p_y, p_z) 、 (\hat{p}_y, \hat{p}_z) は分布力、 m は分布モーメント成分であり、外力はすべて部材断面図心軸上に作用するものと考える。

両座標の節点力、分布外力成分の関係は式 (1) の場合と同様に次式で表わされる。

$$\begin{bmatrix} F_y \\ F_z \end{bmatrix} = [r_i] \begin{bmatrix} \hat{F}_y \\ \hat{F}_z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} p_y \\ p_z \end{bmatrix} = [r_i] \begin{bmatrix} \hat{p}_y \\ \hat{p}_z \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (3 \cdot a, b)$$

3. 直接 Lagrange 表現の高次非線形支配方程式

比較の対象とする直接 Lagrange 表現の支配微分方程式としては Table 1 に示すように定式化⁵⁾された

- a) ひずみに制限のない有限変位の式
- b) 微小ひずみの有限変位の式
- c) 軸線の不伸張変形を仮定した有限変位の式 (Elastica の式)

を扱う。変位に制限をつけない有限変位問題を扱う式としては、これら 3 つの定式化ほぼすべてが網羅され

Table 1 Direct Lagrangian Expressions.

Theories	Equilibrium Equations	Boundary Conditions		Stress Resultants vs. Displacements
		Mechanical	Geometrical	
a) Finite Strains with Finite Displacements	$\left\{ N \sin \alpha + \frac{(M' - m)}{\sqrt{g_0}} \cos \alpha \right\}' + p_y = 0$	$N \sin \alpha + \frac{(M' - m)}{\sqrt{g_0}} \cos \alpha = \bar{F}_y$	$v_0 = \bar{v}_0$	$N = EA(\sqrt{g_0} - 1)$
	$\left\{ N \cos \alpha - \frac{(M' - m)}{\sqrt{g_0}} \sin \alpha \right\}' + p_z = 0$	$N \cos \alpha - \frac{(M' - m)}{\sqrt{g_0}} \sin \alpha = \bar{F}_z$	$w_0 = \bar{w}_0$	$M = -EI\alpha'$
	$M = \bar{M}$		$\alpha = \bar{\alpha}$	
b) Small Strains with Finite Displacements	$\{N \sin \alpha + (M' - m) \cos \alpha\}' + p_y = 0$	$N \sin \alpha + (M' - m) \cos \alpha = \bar{F}_y$	$v_0 = \bar{v}_0$	$N = EA(\sqrt{g_0} - 1)$
	$\{N \cos \alpha - (M' - m) \sin \alpha\}' + p_z = 0$	$N \cos \alpha - (M' - m) \sin \alpha = \bar{F}_z$	$w_0 = \bar{w}_0$	$M = -EI\alpha'$
	$M = \bar{M}$		$\alpha = \bar{\alpha}$	
c) Inextensional Finite Displacements (Elastica)	$\{N \sin \alpha + (M' - m) \cos \alpha\}' + p_y = 0$	$N \sin \alpha + (M' - m) \cos \alpha = \bar{F}_y$	$v_0 = \bar{v}_0$	$\sqrt{g_0} = 1$
	$\{N \cos \alpha - (M' - m) \sin \alpha\}' + p_z = 0$	$N \cos \alpha - (M' - m) \sin \alpha = \bar{F}_z$	$w_0 = \bar{w}_0$	$M = -EI\alpha'$
	$M = \bar{M}$		$\alpha = \bar{\alpha}$	

Remarks : The following notations are used throughout Tables presented as E =Young's Modulus, A =Cross Sectional Area, I =Moment of Inertia, N =Axial Stress Resultant, and $(\bar{F}_y, \bar{F}_z, \bar{M})$ and $(\bar{v}_0, \bar{w}_0, \bar{\alpha})$ =Prescribed Boundary Values

る。

a) の式は棒理論の仮定以外はこれら近似をしていないものである。応力とひずみの関係は普通行われている^{5), 10), 30)}ように、通常の軸方向応力 σ_z と通常の軸方向伸びひずみ e_z 、ヤング率 E を用いて次式で定義する。

جایز

$$e_z = \sqrt{(1+w')^2 + v'^2} - 1, \quad (\cdot)' = d(\cdot)/dz$$

.....(5.a, b)

式(4)の関係を Green のひずみ Tensor と Kirchhoff の応力 Tensor の関係として定義³⁾することも考えられるが、これらの量が工学的な量でないことと、棒理論の場合、実際の断面力と変位の関係がかえって複雑になる⁵⁾ことなどの理由でここでは用いない。ただし、次に述べる微小ひずみの条件のもとではこのような応力とひずみの定義による差は無視できる。

b) の式は微小ひずみの条件

$e_z \ll 1$ または $g \approx g_0 \approx 1$ (6-a, b)

ここに

$$g = (1+w')^2 + v'^2, \quad g_0 = (1+w_0')^2 + v_0'^2$$

.....(7-a, b)

のみを用い、変位には何ら近似をしていないものである。文献 5) では、微小ひずみの条件を用い $\sin \alpha \approx v_0'$, $\cos \alpha \approx 1 + w_0'$ で近似して支配方程式をすべて v_0 , w_0 の導関数で表わしているが、このようにすると $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \neq 1$ となり、三角関数の関係、言い換えれば、変位と回転角の関係に矛盾が生ずるので必ずしも適当ではない。したがって、ここでは次のような厳密な関係を用いる。

$$\sin \alpha = v_0' / \sqrt{g_0}, \cos \alpha = (1 + w_0') / \sqrt{g_0}$$

c) の式は断面図心の軸線の不伸張变形

を仮定に入れたもので、Elastica の基本式⁷⁾を一般的に

Table 2 Expressions with Separation of Rigid Body Displacements

表現したものに相当する

4. 剛体変位除去の手法における支配方程式

剛体変位除去後の変位成分 (\bar{v}_0 , \bar{w}_0 , $\bar{\alpha}$) を表わす有限要素区間の支配微分方程式としては、Table 2 に示すように変位が小さいという条件のもとに定式化³⁾された次の低次非線形形式および線形形式を検討の対象とする。

- d) 微小ひずみ・小変位の式
 e) はり・柱の式 } 低次非線形式
 f) 微小変位の式……………線形式
 d) の式は支配微分方程式に対する考察から、微小項の取扱いに統一のとれた最低次の非線形形式として文献(5)に示されているものである。この式は Table 2 に示すように、つり合い式や断面力と変位の関係式のいずれにおいても非線形形式になっており、取扱いが必ずしも容易でないため一般の数値解析に用いられる例は少ない。ここで取り上げた理由は、この式が基礎微分方程式に対する近似という点で統一のとれたものと考えられ、他の低次非線形式と比較するうえで基準となるからである。
 e) の式は柱の Euler 座屈に関するもので、剛体変位除去の手法では、剛性法の定式化が比較的容易なことと、非線形性が有限要素区間で適度に考慮され計算効率もよいことから、一般の数値計算では最も多く用いられている。
 f) の式は通常の微小変位理論の線形式であり、剛性法の定式化が最も簡単なものである。この式を用いた場合、大きな要素分割長での計算精度に難点はあるものの、要素分割長を十分小さくすれば、一般に有限変位問題を扱い得ると考えられている。

Table 2 に与えた支配方程式の表現について検討する。**Table 1** に示した直接 Lagrange 表現の高次非線形支配方程式の独立変数 z をそのままにして、変位成分

と外力成分を式(1), (3・b)により (\hat{y}, \hat{z}) 座標成分で表わし、つり合い式も (\hat{y}, \hat{z}) 座標成分で考えると、直接Lagrange表現の支配方程式に対応する剛体変位除去後の変位成分 $(\hat{v}_0, \hat{w}_0, \hat{\alpha})$ の厳密な支配方程式が求まる。これは、見掛け上、直接Lagrange表現の式と同一になる。この式をもとに、剛体変位除去の方法を用いて解析した例もある³⁰⁾が、直接Lagrange表現の高次非線形支配方程式を事实上解くことになり、計算は複雑となる。

そこで、剛体変位除去後の変位成分は小さいという物理的考察により、この成分に関するLagrange表現の厳密な高次非線形支配方程式から、小変位の条件を用いて近似簡略化したのがd)~f)の式ができる。したがって、Table 2の中の記号 $(\cdot)'$ はTable 1の場合と同様、 z に関する微分を示す。以下、本報告の中の記号 $(\cdot)'$ はすべて z に関する微分である。ただし、独立変数 \hat{z} を用いても、変形前の要素位置座標 z に $\hat{z}=z-z_i$ という形で対応しているので、 z を用いた場合とまったく同様な議論が成り立つ。

f)の式の場合は微小変位の式であるので、剛体変位後の位置からの変位を (\hat{y}, \hat{z}) 座標に関するEuler表現で与えたものとみなすこともできる。しかし、この場合剛体変位除去後の変位は微小であり、独立変数を考えた場合、要素の剛体変位後の位置と変形後の位置の区別はなく、しかも支配的な剛体変位は変形前の要素位置で表現されている。したがって独立変数を変形前の要素位置座標に選ぶのをLagrangian formulation、変形後それに選ぶのをEulerian formulationと区別する固体力学の呼称からすれば、剛体変位除去の手法はLagrangian formulationの1つでありEulerian formulationという名称は必ずしも適當でない。

5. 要素節点間の幾何学・力学量の関係式

(1) 離散化式の誘導

Table 1, 2に与える支配方程式をもとに、離散化解析の基礎となる、座標値が*i*節点 $(0, z_i)$, *i+1*節点 $(0, z_{i+1})$ の有限要素*i*, *i+1*両端の幾何学および力学量の関係式を求める。離散化解析に必要な節点での幾何学・力学量を $\{Q_j\}$ で表わし、次のように与える。

$$\{Q_j\} = \{F_y, F_z, M, v_0, w_0, \alpha\}^T \quad (j=1 \sim 6) \quad \dots \quad (10)$$

節点力の成分 F_y, F_z の*i*, *i+1*節点間の関係式は変形前の節点座標値と節点間に作用する外力 (p_y, p_z) が既知であれば、要素の変形状態に関係なく、力のつり合い条件のみで求まり、次式で表わされる。

$$F_{y_{i+1}} = F_{y_i} - \int_{z_i}^{z_{i+1}} p_y dz, \quad F_{z_{i+1}} = F_{z_i} - \int_{z_i}^{z_{i+1}} p_z dz \quad \dots \quad (11 \text{a, b})$$

他の量 $\{M, v_0, w_0, \alpha\}$ については変形が相互に関係するため、支配微分方程式を解き、両節点間の関係式を求める必要がある。関係式を求める目的は、要素分割長 dl を小さくしていった場合の剛体変位除去の手法による解の直接Lagrange表現の支配方程式の解への収束性、近似度を検討することにある。したがって、関係式は dl に関するべき級数表示の形で表現する。支配微分方程式のべき級数解を求めるために、*i*節点のTaylor展開による解法³²⁾を用いる。この解法はTable 1, 2いずれの支配微分方程式にも適用するが、ここでは直接Lagrange表現の支配方程式の場合について説明する。

*i*節点におけるTaylor展開を用いると式(11)の $F_{y_{i+1}}, F_{z_{i+1}}$ を含め*i+1*節点の量 $Q_j|_{i+1}$ は*i*節点の量 $Q_j|_i$ およびその*n*階の微係数 $Q_j^{(n)}|_i$ を用いて次のように表わされる。

$$Q_j|_{i+1} = Q_j|_i + \sum_{n=1}^{\infty} Q_j^{(n)}|_i \frac{dl^n}{n!} \quad \left. \right\} \quad (12 \text{a, b})$$

支配微分方程式から

$$\frac{dQ_j}{dz} = f_j(\{Q_k\}) \quad (13)$$

という形の1階常微分方程式が誘導されれば、微分演算とすでに求めた導関数の代入を繰り返すことにより、導関数 $\{Q_j^{(n)}\}$ は $\{Q_j\}$ の関数となる。これに*i*節点の値を代入すると、式(12)の $Q_j^{(n)}|_i$ はすべて $\{Q_k\}_i$ で表示され、 dl に関するべき級数表示の $Q_j|_{i+1}$ と $\{Q_k\}_i$ との関係式が求まる。これは*i*節点の諸量を*i+1*節点へ移すいわゆる伝達式の形となっている。

一般に、 $Q_j^{(n)}|_i$ は高階項になるにつれて $\{Q_k\}_i$ による陽な表現が困難となり、各関係式のべき級数係数の比較は初めの数項のみとなる。しかし、剛体変位除去の手法におけるTable 2の各支配微分方程式で高次の変形モードまで正確に表現できるとは考えられず、また、たとえあっても要素分割長を十分小さくすれば、高次項の重要性は少なく³²⁾、比較的低次の項のみでも解の特性は把握できるものと考えられる。

(2) 直接Lagrangeの手法における関係式

Table 1に示された支配微分方程式から、式(13)の1階常微分方程式を誘導して求めた各 $f_j(\{Q_k\})$ をTable 3に示す。同じTableの中には誘導に必要な節点力 (F_y, F_z) と断面力 (N, M) の関係も併記している。

これをもとに、(1)で述べたようにして、 $\{M, v_0, w_0, \alpha\}$ の*i*節点での微係数を順次求めた。ここで $\{F_y, F_z\}$

Table 3 First Order Differential Equations in Direct Lagrangian Expressions.

Differential Equations	a) Finite Strains with Finite Displacements	b) Small Strains with Finite Displacements	c) Inextensional Finite Displacements
$f_j(\{Q_k\})$ in Eq. (13) ($j=1 \sim 6$)	f_1 $-p_y$	$-p_y$	$-p_y$
	f_2 $-p_z$	$-p_z$	$-p_z$
	f_3 $\sqrt{g_0}(F_y \cos \alpha - F_z \sin \alpha) + m$	$(F_y \cos \alpha - F_z \sin \alpha) + m$	$(F_y \cos \alpha - F_z \sin \alpha) + m$
	f_4 $\sqrt{g_0} \sin \alpha$	$\sqrt{g_0} \sin \alpha$	$\sin \alpha$
	f_5 $\sqrt{g_0} \cos \alpha - 1$	$\sqrt{g_0} \cos \alpha - 1$	$\cos \alpha - 1$
	f_6 $-M/EI$	$-M/EI$	$-M/EI$
Nodal Forces	F_y $N \sin \alpha + \frac{(M' - m)}{\sqrt{g_0}} \cos \alpha$	$N \sin \alpha + (M' - m) \cos \alpha$	$N \sin \alpha + (M' - m) \cos \alpha$
	F_z $N \cos \alpha - \frac{(M' - m)}{\sqrt{g_0}} \sin \alpha$	$N \cos \alpha - (M' - m) \sin \alpha$	$N \cos \alpha - (M' - m) \sin \alpha$

Remarks : $\frac{dQ_j}{dz} = f_j(\{Q_k\})$ and $\sqrt{g_0} = (F_y \sin \alpha + F_z \cos \alpha)/EA + 1$

Table 4 First Order Differential Equations with Separation of Rigid Body Displacements.

Differential Equations	d) Small Strains with Relatively Small Displacements	e) Beam-Column	f) Small Displacements
$\hat{f}_j(\{\hat{Q}_k^*\})$ in Eq. (15) ($j=1 \sim 6$)	\hat{f}_1 $-\hat{p}_y$	$-\hat{p}_y$	$-\hat{p}_y$
	\hat{f}_2 $-\hat{p}_z$	$-\hat{p}_z$	$-\hat{p}_z$
	\hat{f}_3 $\hat{F}_y - N\hat{v}_0' + m$	$\hat{F}_y - \hat{F}_z\hat{v}_0' + m$	$\hat{F}_y + m$
	\hat{f}_4 \hat{v}_0'	\hat{v}_0'	\hat{v}_0'
	\hat{f}_5 $\frac{1}{EA}N - \frac{1}{2}\hat{v}_0'^2$	$\frac{1}{EA}\hat{F}_z - \frac{1}{2}\hat{v}_0'^2$	$\frac{1}{EA}\hat{F}_z$
	\hat{f}_6 $-\left\{ \frac{M}{EI} + \frac{\hat{v}_0'}{EA(1+\hat{v}_0')} (\hat{p}_y + \hat{p}_z\hat{v}_0') \right\}$ $\left[1 + \left\{ \hat{v}_0' + \frac{2N\hat{v}_0 - \hat{F}_y}{EA(1+\hat{v}_0')} \right\} \hat{v}_0' \right]$	$-\frac{M}{EI}$	$-\frac{M}{EI}$
Nodal Forces	\hat{F}_y $N\hat{v}_0' + M' - m$	$N\hat{v}_0' + M' - m$	$M' - m$
	\hat{F}_z $N - (M - m)\hat{v}_0'$	N	N

Remarks : N in the case of d) is expressed by $\{\hat{Q}_k^*\}$ as $N = \frac{1}{(1 + \hat{v}_0'^2)}(\hat{F}_y\hat{v}_0' + \hat{F}_z)$

の微係数は式 (11) に示したように定式化の相違が現われず、検討の必要がないので省略した。

具体的に求めた微係数は比較に必要な階数までで、a) ひずみに制限のない有限変位式、および b) 微小ひずみの有限変位式の場合は 3 階まで、c) 軸線不伸張の有限変位式は 3 階または 4 階までである。結果は、後で述べる剛体変位除去の手法と比較する形で Table 5, 6 に示すが、この表については次項でまとめて説明する。

(3) 剛体変位除去の手法における関係式

最初に、Table 2 に与えた支配方程式をもとに、(\hat{y} , \hat{z}) 座標における幾何学、力学量の成分

$$\{\hat{Q}_j\} = \{\hat{F}_y, \hat{F}_z, M, \hat{v}_0, \hat{w}_0, \hat{\alpha}\}^T \quad \dots \dots \dots (14)$$

について i , $i+1$ 節点間の関係式を求め、次に式 (1), (3) の変換式を用いて (y , z) 座標成分 $\{Q_j\}$ で表示した関係式を求める。

$\{\hat{Q}_j\}$ に関する i , $i+1$ 節点間の関係式は (2) と同様に Taylor 展開による解法で求める。式 (13) に対応する 1 階常微分方程式

$$\frac{d\hat{Q}_j^*}{dz} = \hat{f}_j(\{\hat{Q}_k^*\}) \quad \dots \dots \dots (15)$$

を Table 2 から導き、求めた各 $\hat{f}_j(\{\hat{Q}_k^*\})$ の結果ならびに節点力 (\hat{F}_y , \hat{F}_z) と断面力 (N , M) の関係を Table 4 に示す。ここに、 $\{\hat{Q}_k^*\}$ は $\{\hat{Q}_k\}$ の成分中 $\hat{\alpha}$ を \hat{v}_0' に変えたものである。式 (15) を導いた後の手順は (2) と同様であるが、誘導された高階の導関数から微係数を求めるとき、 i 節点での幾何学的境界条件を考慮し

$$\{\hat{Q}_j^*\}_{i\cdot} = \{\hat{F}_{y_i}, \hat{F}_{z_i}, M_i, 0, 0, 0\}^T \quad \dots \dots \dots (16)$$

なる値を代入した。

有限要素の剛体回転除去後の要素回転角 $\hat{\alpha}$ は、Table 2 の幾何学的境界条件として示しているように回転角 $\hat{\alpha}$ が小さいという条件から

$$\hat{v}_0' = \hat{\alpha} \quad \dots \dots \dots (17)$$

なる関係式を用いた。この場合 $\{\hat{Q}_k^*\}$ と $\{\hat{Q}_k\}$ は一致する。厳密に回転角の評価を行い得るであろうという考えのもとに

$$\hat{v}_0' = \sin \hat{\alpha} \quad \dots \dots \dots (18)$$

Table 5 Derivatives of Physical Values.

(a) Derivatives of M

		Theories	$M' _i$	$M'' _i$	$M''' _i$
Direct Lagrangians	a) Finite Strains with Finite Displacements	$m + \lambda \hat{F}_y$	$m' - \lambda(\hat{p}_y - \hat{F}_z \kappa)$ $- (\hat{p}_z + \hat{F}_y \kappa) \hat{F}_y / a$	$m'' - \lambda d\hat{p}_y - 2\lambda \hat{p}_z \kappa + \lambda \hat{F}_z (\lambda \hat{F}_y \kappa + m) / b - \lambda \hat{F}_y \kappa^2 - 2(\hat{F}_y \kappa + \hat{p}_z)$ $\cdot (\hat{F}_z \kappa - \hat{p}_y) / a - (\hat{F}_z \kappa^2 + \hat{F}_y (\lambda \hat{F}_y \kappa + m)) / b - 2\hat{p}_y \kappa + d\hat{p}_z) \hat{F}_y / a$	
	b) Small Strains with Finite Displacements	$m + \hat{F}_y$	$m' - \hat{p}_y + \hat{F}_z \kappa$	$m'' - d\hat{p}_y - 2\hat{p}_z \kappa + \hat{F}_z (\hat{F}_y + m) / b - \hat{F}_y \kappa^2$	
With Separation of Rigid Body Displacements Local Coordinate Expressions	d) Small Strains with Relatively Small Displacements	$m + \hat{F}_y$	$m' - \hat{p}_y + \hat{F}_z \kappa$	$m'' - d\hat{p}_y - 2\hat{p}_z \kappa + \hat{F}_z (\hat{F}_y + m) / b - 2\hat{F}_y \kappa^2 - (\hat{F}_y \kappa + \hat{p}_z) \hat{F}_z \kappa / a$	
	e) Beam-Column	$m + \hat{F}_y$	$m' - \hat{p}_y + \hat{F}_z \kappa$	$m'' - d\hat{p}_y - 2\hat{p}_z \kappa + \hat{F}_z (\hat{F}_y + m) / b$	
	f) Small Displacements	$m + \hat{F}_y$	$m' - \hat{p}_y$	$m'' - d\hat{p}_y$	

Remarks : The following notations are used throughout Tables 5, 6, 10 and 11 $\kappa = M/EI$, $\lambda = \sqrt{g_0} = \hat{F}_z/EA + 1$, $d\hat{p}_y = p_y' \cos \alpha - p_z' \sin \alpha$, $d\hat{p}_z = p_z' \cos \alpha + p_y' \sin \alpha$, $s = \sin \alpha$, $c = \cos \alpha$, $EA = a$, $EI = b$

(b) Derivatives of v_0

		Theories	$v_0' _i$	$v_0'' _i$	$v_0''' _i$
Direct Lagrangians	a) Finite Strains with Finite Displacements	λs	$-\lambda \kappa c - \frac{\hat{p}_z s}{a} - \frac{\hat{F}_y \kappa s}{a}$	$-\lambda(\hat{F}_y \kappa + m)c/b - (d\hat{p}_z/a + \lambda \kappa^2)s + 2(\hat{F}_y \kappa + \hat{p}_z)\kappa c/a$ $- (\hat{F}_z \kappa^2 + \hat{F}_y(\hat{F}_y + m)/b - 2\hat{p}_y \kappa)s/a$	
	b) Small Strains with Finite Displacements	λs	$-\lambda \kappa c - \frac{\hat{p}_z s}{a} - \frac{\hat{F}_y \kappa s}{a}$	$-\lambda(\hat{F}_y + m)c/b - (d\hat{p}_z/a + \lambda \kappa^2)s + 2(\hat{F}_y \kappa + \hat{p}_z)\kappa c/a$ $- (\hat{F}_z \kappa^2 + \hat{F}_y(\hat{F}_y + m)/b - 2\hat{p}_y \kappa)s/a$	
With Separation of Rigid Body Displacements Local Coordinate Expression	d) Small Strains with Relatively Small Displacements	λs	$-\kappa c - \frac{\hat{p}_z s}{a} - \frac{\hat{F}_y \kappa s}{a}$	$-(\hat{F}_y + m)c/b - (d\hat{p}_z/a + \kappa^2)s + (\hat{F}_y \kappa + \hat{p}_z)\kappa c/a - 2\hat{F}_z \kappa^2$ $+ \hat{F}_y(\hat{F}_y + m)/b - 2\hat{p}_y \kappa - 2m'\kappa - \hat{F}_y(\hat{F}_y \kappa + \hat{p}_z)\kappa c/a)s/a$	
	e) Beam-Column	λs	$-\kappa c - \frac{\hat{p}_z s}{a}$	$-(\hat{F}_y + m)c/b - (d\hat{p}_z/a + \kappa^2)s$	
	f) Small Displacements	λs	$-\kappa c - \frac{\hat{p}_z s}{a}$	$-(\hat{F}_y + m)c/b - d\hat{p}_z s/a$	

(c) Derivatives of w_0

		Theories	$w_0' _i$	$w_0'' _i$	$w_0''' _i$
Direct Lagrangians	a) Finite Strains with Finite Displacements	$\lambda c - 1$	$\lambda \kappa s - (\hat{F}_y \kappa + \hat{p}_z)c/a$	$\lambda(\lambda \hat{F}_y + m)s/b - (d\hat{p}_z/a + \lambda \kappa^2)c - 2(\hat{F}_y \kappa + \hat{p}_z)\kappa s/a$ $- (\hat{F}_z \kappa^2 + \hat{F}_y(\lambda \hat{F}_y + m)/b - 2\hat{p}_y \kappa)c/a$	
	b) Small Strains with Finite Displacements	$\lambda c - 1$	$\lambda \kappa s - (\hat{F}_y \kappa + \hat{p}_z)c/a$	$\lambda(\hat{F}_y + m)s/b - (d\hat{p}_z/a + \lambda \kappa^2)c - 2(\hat{F}_y \kappa + \hat{p}_z)\kappa s/a$ $- (\hat{F}_z \kappa^2 + \hat{F}_y(\hat{F}_y + m)/b - 2\hat{p}_y \kappa)c/a$	
With Separation of Rigid Body Displacements Local Coordinate Expressions	d) Small Strains with Relatively Small Displacements	$\lambda c - 1$	$\kappa s - (\hat{F}_y \kappa + \hat{p}_z)c/a$	$(\hat{F}_y + m)s/b - (d\hat{p}_z/a + \kappa^2)c - (\hat{F}_y \kappa + \hat{p}_z)\kappa s/a$ $- 2\hat{F}_z \kappa^2 + \hat{F}_y(\hat{F}_y + m)/b - 2(\hat{p}_y + m')\kappa - \hat{F}_y(\hat{F}_y \kappa + \hat{p}_z)\kappa c/a)c/a$	
	e) Beam-Column	$\lambda c - 1$	$\kappa s - \hat{p}_z c/a$	$(\hat{F}_y + m)s/b - (d\hat{p}_z/a + \kappa^2)c$	
	f) Small Displacements	$\lambda c - 1$	$\kappa s - \hat{p}_z c/a$	$(\hat{F}_y + m)s/b - d\hat{p}_z c/a$	

(d) Derivatives of α

		Theories	$\alpha' _i$	$\alpha'' _i$	$\alpha''' _i$
Direct Lagrangians	a) Finite Strains with Finite Displacements	$-\kappa$	$-(m + \lambda \hat{F}_y)/b$	$-m'/b + \lambda(\hat{p}_y - \hat{F}_z \kappa)/b + (\hat{p}_z + \hat{F}_y \kappa) \hat{F}_y / ab$	
	b) Small Strains with Finite Displacements	$-\kappa$	$-(m + \hat{F}_y)/b$	$-m'/b + (\hat{p}_y - \hat{F}_z \kappa)/b$	
With Separation of Rigid Body Displacements Local Coordinate Expressions	d) Small Strains with Relatively Small Displacements	$-\kappa$	$-(m + \hat{F}_y)/b$ $+ \kappa(\hat{F}_y \kappa + \hat{p}_z)/a$	$-m'/b + (\hat{p}_y - \hat{F}_z \kappa)/b + (\hat{p}_z + \hat{F}_y \kappa)((m + \hat{F}_y)/b - \kappa(\hat{F}_y \kappa + \hat{p}_z)/a) + d\hat{p}_z$ $+ 2\kappa[2(\hat{F}_z \kappa - \hat{p}_y)\kappa + \hat{F}_y((m + \hat{F}_y)/b - \kappa(\hat{F}_y \kappa + \hat{p}_z)/a)] + a^3$	
	e) Beam-Column	$-\kappa$	$-(m + \hat{F}_y)/b$	$-m'/b + (\hat{p}_y - \hat{F}_z \kappa)/b$	
	f) Small Displacements	$-\kappa$	$-(m + \hat{F}_y)/b$	$-m'/b + \hat{p}_y/b$	

$$\hat{v}_0' = \tan \hat{\alpha}^{(2)} \dots \quad (19)$$

なる非線形形式を用いた場合もあるが、これらの評価式の差が解に及ぼす影響については 6.(3) で検討する。

式 (1), (3) を用いて $\{\hat{Q}_j\}$ を $\{Q_j\}$ へ変換することによって得られる剛体変位除去の手法における $Q_j|_{i+1}$ と $\{Q_k|i\}$ の伝達型の関係式のべき級数係数は、式 (12) に示す各量の微係数 $Q_j^{(n)}|_i$ に対応するものと考えられる。このようにして得られた $\{M, v_0, w_0, \alpha\}$ の微係数を 3 階まで求め、直接 Lagrange 表現の支配方程式 a),

b) によるものと比較する形で Table 5 に示す。

軸線の不伸張条件のもとでの直接 Lagrange 表現の支配方程式 c) に対応する剛体変位除去後の支配方程式としては、Table 2 の軸力 N と変位との関係式の代わりに、

$$\left. \begin{array}{l} d) \text{ 微小ひずみ・小変位の式} \\ e) \text{ はり・柱の式} \\ f) \text{ 微小変位の式} \end{array} \right\} \begin{aligned} \dot{w}_0' + \frac{1}{2} \hat{v}_0'^2 &= 0 \\ \ddot{w}_0' &= 0 \end{aligned} \quad \dots \quad (20 \cdot a, b)$$

Table 6 Derivatives of Physical Values with Inextensional Deformations.

(a) Derivatives of M

		Theories	$M' _i$	$M'' _i$	$M''' _i$
Direct Lagrangians	c) Inextensional Finite Displacements		$m + \hat{F}_y$	$m' - \hat{p}_y + \hat{F}_z \kappa$	$m'' - d\hat{p}_y - 2\hat{p}_z \kappa + \hat{F}_z(\hat{F}_y + m)/b - \hat{F}_y \kappa^2$
With Separation of Rigid Body Displacements Local Coordinate Expressions	d) Small Strains with Relatively Small Displacements		$m + \hat{F}_y$	$m' - \hat{p}_y + \hat{F}_z \kappa$	$m'' - d\hat{p}_y - 2\hat{p}_z \kappa + \hat{F}_z(\hat{F}_y + m)/b - 2\hat{F}_y \kappa^2$
	e) Beam-Column		$m + \hat{F}_y$	$m' - \hat{p}_y + \hat{F}_z \kappa$	$m'' - d\hat{p}_y - 2\hat{p}_z \kappa + \hat{F}_z(\hat{F}_y + m)/b$
	f) Small Displacements		$m + \hat{F}_y$	$m' - \hat{p}_y$	$m'' - d\hat{p}_y$

(b) Derivatives of v_0

		Theories	$v_0' _i$	$v_0'' _i$	$v_0''' _i$	$v_0^{(4)} _i$
Direct Lagrangians	c) Inextensional Finite Displacements		s	$-\kappa c$	$-(\hat{F}_y + m)c/b - \kappa^2 s$	$(\hat{p}_y - m' - \hat{F}_z \kappa)c/b - 3\kappa(\hat{F}_y + m)s/b + \kappa^3 c$
With Separation of Rigid Body Displacements Local Coordinate Expressions	d) Small Strains with Relatively Small Displacements		s	$-\kappa c$	$-(\hat{F}_y + m)c/b - \kappa^2 s$	$(\hat{p}_y - m' - \hat{F}_z \kappa)c/b - 3\kappa(\hat{F}_y + m)s/b + \kappa^3 c$
	e) Beam-Column		s	$-\kappa c$	$-(\hat{F}_y + m)c/b - \kappa^2 s$	$(\hat{p}_y - m' - \hat{F}_z \kappa)c/b - 3\kappa(\hat{F}_y + m)s/b$
	f) Small Displacements		s	$-\kappa c$	$-(\hat{F}_y + m)c/b$	$(\hat{p}_y - m')c/b$

(c) Derivatives of w_0

		Theories	$w_0' _i$	$w_0'' _i$	$w_0''' _i$	$w_0^{(4)} _i$
Direct Lagrangians	c) Inextensional Finite Displacements		$c - 1$	κs	$(\hat{F}_y + m)s/b - \kappa^2 c$	$(m' - \hat{p}_y + \hat{F}_z \kappa)s/b - 3\kappa(\hat{F}_y + m)c/b - \kappa^3 s$
With Separation of Rigid Body Displacements Local Coordinate Expressions	d) Small Strains with Relatively Small Displacements		$c - 1$	κs	$(\hat{F}_y + m)s/b - \kappa^2 c$	$(m' - \hat{p}_y + \hat{F}_z \kappa)s/b - 3\kappa(\hat{F}_y + m)c/b - \kappa^3 s$
	e) Beam-Column		$c - 1$	κs	$(\hat{F}_y + m)s/b - \kappa^2 c$	$(m' - \hat{p}_y + \hat{F}_z \kappa)s/b - 3\kappa(\hat{F}_y + m)c/b$
	f) Small Displacements		$c - 1$	κs	$(\hat{F}_y + m)s/b$	$(m' - \hat{p}_y)s/b$

(d) Derivatives of α

		Theories	$\alpha' _i$	$\alpha'' _i$	$\alpha''' _i$	$\alpha^{(4)} _i$
Direct Lagrangians	c) Inextensional Finite Displacements		$-\kappa$	$-(m + \hat{F}_y)/b$	$-(m' - \hat{p}_y + \hat{F}_z \kappa)/b$	$-(m'' - d\hat{p}_y - 2\hat{p}_z \kappa + \hat{F}_z(\hat{F}_y + m)/b)/b + \hat{F}_y \kappa^2/b$
With Separation of Rigid Body Displacements Local Coordinate Expressions	d) Small Strains with Relatively Small Displacements		$-\kappa$	$-(m + \hat{F}_y)/b$	$-(m' - \hat{p}_y + \hat{F}_z \kappa)/b + \kappa^3$	$-(m'' - d\hat{p}_y - 2\hat{p}_z \kappa + \hat{F}_z(\hat{F}_y + m)/b)/b + (10\hat{F}_y + 12m)\kappa^3/b$
	e) Beam-Column		$-\kappa$	$-(m + \hat{F}_y)/b$	$-(m' - \hat{p}_y + \hat{F}_z \kappa)/b$	$-(m'' - d\hat{p}_y - 2\hat{p}_z \kappa + \hat{F}_z(\hat{F}_y + m)/b)/b$
	f) Small Displacements		$-\kappa$	$-(m + \hat{F}_y)/b$	$-(m' - \hat{p}_y)/b$	$-(m'' - d\hat{p}_y)/b$

なる軸線の不伸張条件を用いる。この場合についても、同様に $\{M, v_0, w_0, \alpha\}$ の微係数を 3 階または 4 階まで求め、c) の支配方程式によるものと比較する形で Table 6 に示す。

Table 5, 6 に示す微係数の範囲としては、比較に必要な階数までという理由で、直接 Lagrange の手法と剛体変位除去の手法間で微係数の一一致する範囲が十分網羅されるように決定した。

6. 考察

(1) 剛体変位除去の手法の収束解

剛体変位除去の手法で、要素分割長を無限小にした場合の収束解は、各量 $\{Q_j\}$ に関する要素節点間の関係式の i 節点を任意点とし、導関数の定義

$$\frac{dQ_j}{dz} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{Q_j|_{i+1} - Q_j|_i}{\Delta l} \quad \dots \dots \dots \quad (21)$$

より求められる一階常微分方程式を満足する³²⁾。したがって、この微分方程式と Table 1 の直接 Lagrange 表現の微分方程式から導かれた Table 3 に示す 1 階常微分方程式とを比較することにより、剛体変位除去の手法における収束解の性質がわかる。

式(13)から明らかなように、これらの微分方程式を表わす導関数は Table 5, 6 の 1 階の微係数に対応し、収束解が満足する微分方程式は定式化 d), e), f) に關係なく、軸線の不伸張変形を仮定しない一般の場合 (Table 5), と仮定する場合 (Table 6) に分けられる。Table 5, 6 の結果をもとに、具体的に剛体変位除去の手法における導関数を示すと、軸線の不伸張変形を仮定しない一般の場合には

$$\left. \begin{aligned} F_y' &= -p_y, \quad F_z' = -p_z \\ M' &= \hat{F}_y + m = F_y \cos \alpha - F_z \sin \alpha + m \\ v_0' &= (\hat{F}_z / EA + 1) \sin \alpha = \sqrt{g_0} \sin \alpha \\ w_0' &= (\hat{F}_z / EA + 1) \cos \alpha - 1 = \sqrt{g_0} \cos \alpha - 1 \\ a' &= -M/EI \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(22.a~f)}$$

軸線の不伸張を仮定する場合には、 $\{F_y', F_z', M', \alpha'\}$ は式 (22-a~c, f) と同じで

$$v_0' = \sin \alpha, \quad w_0' = \cos \alpha - 1 \dots \dots \dots \quad (23 \text{a, b})$$

となる。

収束解の満足する 1 階の常微分方程式 (22), (23) を Table 3 の結果と比較すると、一般の場合は直接 Lagrange 表現の支配微分方程式中の b) 微小ひずみの有限変位式と一致し、軸線不伸張の場合は同様の仮定を設けた c) の式と一致する。

したがって、剛体変位を除去する手法において、いか

に要素分割長を小さくしても除去されるのは回転に関する剛体変位成分で、支配方程式として、Table 2 に示すような式を用いている限り、a) の式に相当するひずみに制限のない場合は扱えないことがわかる。このような場合を、剛体変位除去の手法で扱うには、Table 2 の支配方程式中で、微小変位の式に対応するもので考えれば、少なくともモーメントのつり合い式を次のような軸線の伸びを考慮した式に変える必要がある。

$$\left\{ \frac{M' - m}{(1 + w_0')} \right\}' + \hat{p}_y = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (24)$$

これは、軸線の伸びを剛体回転で除くことができないの
で、つり合い式に伸び成分を反映する必要があるためで
ある。

(2) 剛体変位除去の手法の近似の程度

べき級数表示された伝達形式の有限要素両端の幾何学・力学諸量の関係式において、 Δl を無限小にしたときの収束解については、前項で述べたように、 Δl の 1 次の係数のみが重要であった。しかし、実際の数値計算では、要素分割長は有限であり、離散化解析において Δl の 1 次項の検討だけでは不十分で、より高次の項がどの程度収束解と一致しているかを検討することが重要になる。これは常微分方程式の 1 次の近似離散化解法である Euler 法が実際の計算には必ずしも役立たず、より高次の項まで考慮した手法が用いられる³²⁾ことからも理解できる。

したがって、ここでは有限の要素分割長での近似の程度を調べる意味から、各量 $\{Q_j\}$ のべき級数表示の関係式について、剛体変位除去の手法が対応する直接 Lagrange の手法と $4l$ の何次項まで一致するかを調べる。

Table 5, 6 の結果とともに剛体変位除去の各定式化、各物理量別に、直接 Lagrange の手法と一致している最大次数を直接 Lagrange の手法における微小ひずみの有限変位式の場合と軸線不伸張の場合とに分けて示せば **Table 7, 8** のようになる。

Table 7 から明らかなように、軸線の不伸張を仮定しない一般の剛体変位除去の手法の直接 Lagrange の手法に対する近似の程度は、はり・柱の式によるものがよく、変位 $\{v_0, w_0\}$ に関しては他と同じ $4l$ の 1 次項までであるが、 α に関しては 3 次、 M に関しては 2 次まで一致している。逆に微分方程式としての見掛けの精度のよい微小ひずみ・小変位の式は α について 1 次項までしか一致しておらず、微小変位の式の場合より一致の程度は悪い。この結果から、最も精度のよいはり・柱の式でも変位 $\{v_0, w_0\}$ に関する要素節点間の関係式は Euler 法における離散化式程度でしかないことがわかる。

一方、 $\{M, \alpha\}$ については、要素節点の関係式において

Table 7 Coincidence of the Order of Derivatives for Small Strains with Finite Displacements.

Theories		M	v_0	w_0	α
With Separation of Rigid Body Displacements	Small Strains with Relatively Small Displacements	2	1	1	1
	Beam-Column	2	1	1	3
	Small Displacements	1	1	1	2

Table 8 Coincidence of the Order of Derivatives for Inextensional Finite Displacements.

Theories		M	v_0	w_0	α
With Separation of Rigid Body Displacements	Small Strains with Relatively Small Displacements	2	4	4	2
	Beam-Column	2	3	3	3
	Small Displacements	1	2	2	2

て $\{v_0, w_0\}$ との連成はなく、はり・柱の式を用いた場合、2次の離散化解法である簡易 Runge-Kutta 法³²⁾ 程度の近似式となっている。したがって、 $\{M, \alpha\}$ と同様に $\{v_0, w_0\}$ との連成のない $\{F_y, F_z\}$ を含め、 $\{F_y, F_z, M, \alpha\}$ 間の伝達式だけで解析が可能となる問題では $\{v_0, w_0\}$ が問題に関係しないため $\{F_y, F_z, M, \alpha\}$ に関し、少なくとも、簡易 Runge-Kutta 法による解と同程度の近似解が得られる。

しかし、剛体変位除去の手法を直接 Lagrange 表現の微小ひずみの有限変位式の近似解法として、純粹に数学的立場から考えた場合、離散化近似の程度は必ずしもよくなく、 $\{v_0, w_0\}$ の離散化関係式は、Euler 法における誤差の集積と同じ問題をもっているといえよう。また、剛体変位除去の手法における支配方程式として、微小ひずみ・小変位の式と要素回転角評価式(17)を用いた場合の Table 7 に示す結果からわかるように、微分方程式に対する近似がその解の近似に必ずしも反映されないこともわかる。

軸線の不伸張変形を仮定した場合には Table 8 から明らかのように、全般に近似の程度は向上する。特に、 $\{v_0, w_0\}$ に関して微小ひずみ・小変位の式の場合は $4l$ の4次、はり・柱の式は3次、微小変位の式でも2次項まで直接 Lagrange の手法と一致する。このことは一般的の場合でも、軸線の伸張変形が微小であれば、 $\{v_0, w_0\}$ に関して Table 8 に示す $4l$ の次数まで係数がほぼ一致しているとみなせ、事実上は Euler 法以上の精度で計算し得ることを示している。

一般の鋼骨組の有限変位問題では曲げ変形が卓越し、軸線の伸張が微小である場合が多く、Table 7 に示す一般の場合でも工学上は精度よく解析し得るものと考えられる。実際、軸線の伸張を認めた剛体変位除去の手法による結果が軸線の不伸張を仮定した Elastica の解析

解⁷⁾と比較され、よく一致することが示されている^{26), 29)}。

なお、軸線の伸張変形が無視できない場合、直接 Lagrange 表現の微小ひずみの有限変位式自体の精度が悪くなることには注意されてよい。

(3) 剛体回転除去後の回転角評価

5.(3) で述べたように剛体回転除去後の回転角 $\hat{\alpha}$ と \hat{v}_0' との関係は式(17)のほかに、厳密に評価しようという考え方から高次非線形の関係式(18), (19)を用いた場合もある²⁶⁾。式(19)は倉方・西野³⁶⁾が述べているように Euler 表現の関係式であり、微小ひずみ・小変位の式やはり・柱の式のような、近似式であるにせよ、Lagrange 表現の式に用いる根拠は乏しい。ただし、微小変位の式については Lagrange, Euler 両表現の差はないので、式(17)～(19)だけで、その根拠を論ずることはできない。

回転角評価の差が解に及ぼす影響を明らかにするには、Table 5, 6 の各物理量の微係数が各評価式によって、どのように変化するかを調べなければならない。評価式の差が影響するのは剛体回転も含めた全体の回転角 α の微係数のみであり、ここでは式(18), (19)より、実際に α の微係数を求め、比較を行う。

i 節点における剛体回転除去後の $\hat{\alpha}$ と \hat{v}_0' との微係数間の関係を $\hat{\alpha}$ の4階まで Table 9 に示す。この表から、 $\hat{\alpha}$ の2階の微係数までは、各評価式間の差がなく、Table 5, 6 の全体回転角 α の微係数も変化しない。差が現われる α の3階以上の微係数について検討する。Table 9 を用いて、軸線の伸張を認める一般の場合と、軸線の不伸張変形を仮定した場合に関し、 i 節点での α の3階の微係数を求め、それぞれ表の注)に示した直接 Lagrange 表現の式の収束解の微係数と比較する形で Table 10, 11 に示す。4階以上の微係数については式(17), (18), (19)いずれの評価式を用いても、収束解と一致するものはないので、具体的な表示を省略した。

Table 10 から明らかのように、3階の微係数は評価式(17)を用いたときのはり・柱の式のみ収束解と一致し、式(18), (19)を用いた場合にはどの定式化も一致しない。また Table 11 から、評価式(17)を用いた場合ははり・柱の式のみが、式(18)を用いた場合は微小ひずみ・小変位の式のみがそれぞれ収束解に一致し、

Table 9 Derivatives of $\hat{\alpha}$ at Node i .

Derivatives	$\hat{\alpha} = \hat{v}_0'$ by Eq. (17)	$\sin \hat{\alpha} = \hat{v}_0'$ by Eq. (18)	$\tan \hat{\alpha} = \hat{v}_0'$ by Eq. (19)
$\hat{\alpha}'$	v_0''	\hat{v}_0''	\hat{v}_0''
$\hat{\alpha}''$	\hat{v}_0'''	\hat{v}_0'''	\hat{v}_0'''
$\hat{\alpha}'''$	$\hat{v}_0^{(4)}$	$\hat{v}_0^{(4)} + (\hat{v}_0'')^3$	$\hat{v}_0^{(4)} - 2(\hat{v}_0'')^3$
$\hat{\alpha}^{(4)}$	$\hat{v}_0^{(5)}$	$\hat{v}_0^{(5)} + 6(\hat{v}_0'')^2\hat{v}_0'''$	$\hat{v}_0^{(5)} - 12(\hat{v}_0'')^2\hat{v}_0'''$

Table 10 Third Derivative α''' at Node i .

Definitions	Small Strains with Relatively Small Displacements	Beam-Column	Small Displacements
$\hat{\alpha} = \hat{v}_y'$ by Eq. (17)	$-(m' - \hat{p}_y + \hat{F}_z \kappa)/b + \kappa^3 + D$	$-(m' - \hat{p}_y + \hat{F}_z \kappa)/b$	$-(m' - \hat{p}_y)/b$
$\sin \hat{\alpha} = \hat{v}_y'$ by Eq. (18)	$-(m' - \hat{p}_y + \hat{F}_z \kappa)/b + D$	$-(m' - \hat{p}_y + \hat{F}_z \kappa)/b - \kappa^3$	$-(m' - \hat{p}_y)/b - \kappa^3$
$\tan \hat{\alpha} = \hat{v}_y'$ by Eq. (19)	$-(m' - \hat{p}_y + \hat{F}_z \kappa)/b + 3\kappa^3 + D$	$-(m' - \hat{p}_y + \hat{F}_z \kappa)/b + 2\kappa^3$	$-(m' - \hat{p}_y)/b + 2\kappa^3$

Remarks : Exact α''' by direct Lagrangian expressions = $-(m' - \hat{p}_y + \hat{F}_z \kappa)/b$, and D in the Table = $(\hat{p}_z + \hat{F}_y \kappa) \{(m + \hat{F}_y)/b - \kappa(\hat{F}_y \kappa + \hat{p}_z)/a\}/a + 2\kappa[2(\hat{F}_z \kappa - \hat{p}_y)\kappa + \hat{F}_y \{(m + \hat{F}_y)/b - \kappa(\hat{F}_y \kappa + \hat{p}_z)/a\} + d\hat{p}_z - 2m'\kappa]/a$

Table 11 Third Derivative α''' at Node i with Inextensional Deformations.

Definitions	Small Strains with Relatively Small Displacements	Beam-Column	Small Displacements
$\hat{\alpha} = \hat{v}_y'$ by Eq. (17)	$-(m' - \hat{p}_y + \hat{F}_z \kappa)/b + \kappa^3$	$-(m' - \hat{p}_y + \hat{F}_z \kappa)/b$	$-(m' - \hat{p}_y)/b$
$\sin \hat{\alpha} = \hat{v}_y'$ by Eq. (18)	$-(m' - \hat{p}_y + \hat{F}_z \kappa)/b$	$-(m' - \hat{p}_y + \hat{F}_z \kappa)/b - \kappa^3$	$-(m' - \hat{p}_y)/b - \kappa^3$
$\tan \hat{\alpha} = \hat{v}_y'$ by Eq. (19)	$-(m' - \hat{p}_y + \hat{F}_z \kappa)/b + 3\kappa^3$	$-(m' - \hat{p}_y + \hat{F}_z \kappa)/b + 2\kappa^3$	$-(m' - \hat{p}_y)/b + 2\kappa^3$

Remarks : Exact α''' by direct Lagrangian expressions = $-(m' - \hat{p}_y + \hat{F}_z \kappa)/b$

式 (19) はいずれの定式化でも収束解に一致しない。

したがって、剛体変位除去後の成分に関する式として、はり・柱の式や微小変位の式などを用い、角度評価にのみ式 (18) のような高次非線形形式を用いても精度向上は望めず、逆に精度低下もあり得ることがわかる。これは、はり・柱の式や微小変位の式が Lagrange 表現の式であっても、変位が小さいという条件で大幅に近似したものであるので、角度評価にのみ高次非線形形式を用いると、回転角評価のバランスが崩れるためと考えられる。

このことは微小変位の式を Euler 表現の式とみなし、式 (19) を評価式として用いる場合についてもいえる。したがって、非線形の評価式を用いて精度向上を図るためにには、剛体変位除去の手法における支配方程式自体に所定の精度を確保することが必要であるといえる。これは、はり・柱の式より若干精度がよいと考えられる微ひずみ・小変位の式の場合、Lagrange 表現の非線形の評価式 (18) を用いると、Table 8 と 11 を比較してわかるように、一致する階数が 1 つ増し、精度が向上する事実からも裏付けられよう。

7. 結 論

骨組の有限変位問題を数値的に解析する目的で、一般に用いられている剛体変位除去の手法による解の直接 Lagrange 表現による高次非線形支配方程式の解に対する関係を理論的に検討した。剛体変位除去後の局所座標系での支配方程式としては、Lagrange 表現の低次非線形および線形の微分方程式、また直接 Lagrange

表現の支配方程式としては、変位に制限のない高次非線形の微分方程式を取り上げ、それぞれ要素分割長に関する Taylor 展開による離散化表現を求めるこにより、両者の解の比較を行った。得られた結果は次のとおりである。

(1) 剛体変位除去の手法において、骨組の要素分割長を小さくしていくと、軸線の伸張を認める一般の場合は、直接 Lagrange 表現の微ひずみ・有限変位の式の解に収束し、軸線不伸張を仮定した場合は同じ仮定を導入した直接 Lagrange 表現の解に収束する。

(2) 剛体変位除去の手法は、軸線の伸張を認める場合、一般に直接 Lagrange 表現の微分方程

式の要素分割長 $4l$ に関して少なくとも 1 次の離散化解法であるが、軸線の伸張が無視できるような場合には、剛体変位除去後の式としてはり・柱の式を用いれば少なくとも 2 次の離散化解法となり得る。

(3) 剛体変位除去後の回転角評価に高次非線形の式を用いて解の精度を向上させるためには、剛体変位除去の手法における支配方程式にも回転角評価と同等の精度を確保する必要がある。一般には、その支配方程式として数値解析における効率の点から低次非線形形式を用いるので、回転角評価のみに高次非線形形式を用いても効果は期待できない。

謝 辞：本研究を進めるにあたり、Northwestern 大学の岩熊哲夫助手、新日本技研（株）の倉方慶夫氏および名古屋工業大学の松浦聖教授から有益な示唆と助言を受けた。本研究の一部は、文部省科学研究費の援助を受けた。ここに記して感謝する。

参 考 文 献

- 1) Fung, Y.C.; 大橋, 村上, 神谷共訳：固体の力学／理論, 培風館, 1970.
- 2) Prager, W. : Introduction to Mechanics of Continua, Dover Publications, 1961.
- 3) Washizu, K. : Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, 1968.
- 4) Reissner, E. : On One-Dimensional Finite-Strain Beam Theory, ZAMP, Vol. 23, pp. 795~804, 1972.
- 5) 西野文雄・倉方慶夫・後藤芳顯：一軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位理論, 土木学会論文報告集, No. 237, pp. 11~26, 1975-5.
- 6) Connor, J.J., R.D. Logcher and S.C. Chan : Nonlinear Analysis of Elastic Framed Structures, Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 94, No. ST 9, pp.

- 2081～2103, Sept., 1968.
- 7) Timoshenko, S.P. and J.M. Gere : Theory of Elastic Stability, 2nd. Ed., McGraw-Hill, pp. 76～82, 1961.
 - 8) Tada, Y. and G.C. Lee : Finite Element Solution to an Elastica Problem of Beams, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 2, pp. 229～241, 1970.
 - 9) Epstein, M. and D.W. Murray : Large Deformation In Plane Analysis of Elastic Beams, Computers and Structures, Vol. 6, pp. 1～9, 1976.
 - 10) 近藤一夫・川井忠彦：低次形状関数を用いた梁柱の座屈および大挑み問題の有限要素解析, 日本造船学会論文集, No. 142, pp. 197～207, 1977.
 - 11) James, M.E., T.J. Koziak and J.E. Martines : Effect of Curvature on Nonlinear Frame Analysis, Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 100, No. ST 7, pp. 1451～1457, July, 1974.
 - 12) Jagannathan, D.S., H.I. Epstein and P. Christiano : Fictitious Strain due to Rigid Body Rotation, Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 101, No. ST 11, pp. 2472～2476, Nov., 1975.
 - 13) Stricklin, J.A., W.A. Von Rieseman, J.R. Tillerson and W.E. Haisler : Static Geometric and Material Nonlinear Analysis, Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, U.S.-Japan Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design, Univ. of Alabama Press, Aug., 1972.
 - 14) Powell, G.H. : Theory of Nonlinear Elastic Structures, Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 95, No. ST 12, pp. 2687～2701, Dec., 1969.
 - 15) Mallet, R.H. and P.V. Marcal : Finite Element Analysis of Nonlinear Structures, Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 94, No. ST 9, pp. 2081～2103, Sept., 1968.
 - 16) 堀井健一郎・斎藤 進・川原睦人・森 繁：骨組構造の大変形解析, 土木学会論文報告集, No. 191, pp. 15～29, 1971-5.
 - 17) Rajasekaran, S. and D.W. Murray : Incremental Finite Element Matrices, Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 99, No. ST 12, pp. 2423～2438, Dec., 1973.
 - 18) 篠崎 武：平面骨組の大変形解析, 土木学会論文報告集, No. 224, pp. 47～53, 1974-4.
 - 19) Care, R.F., R.E. Lawther and A.P. Kabaila : Finite Element Analysis for Frames, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, pp. 833～849, 1977.
 - 20) Saafan, S.A. : Nonlinear Behavior of Structural Plane Frames, Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 89, No. ST 4, pp. 557～579, Aug., 1963.
 - 21) Jennings, A. : Frame Analysis Including Change of Geometry, Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 94, No. ST 3, pp. 627～644, Mar., 1968.
 - 22) 後藤茂夫：有限変形法に関する二、三の考察, 土木学会論文報告集, No. 163, pp. 61～66, 1969-3.
 - 23) 安藤浩吉・成岡昌夫：変形を考慮した任意の平面骨組構造の解析, 土木学会誌, 54-4, pp. 38～42, 1969-4.
 - 24) 大地洋三：構造解析とコンピューター, 産業図書, pp. 239～252, 1971.
 - 25) Oran, C. : Tangent Stiffness in Plane Frames, Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 99, No. ST 6, pp. 973～985, June, 1973.
 - 26) 前田幸雄・林 正・中村 守：増分法による平面骨組の大変形解析の加速計算法, 土木学会論文報告集, No. 223, pp. 1～9, 1974-3.
 - 27) 三本木茂夫：梁および板の非線形解析, 日本鋼構造協会第5回大会研究集会, マトリックス構造解析法研究発表論文集, pp. 186～193, 1971-6.
 - 28) 後藤茂夫・羽根悟朗・田中達郎：接線剛性法による骨組構造物の大変形解析, 土木学会論文報告集, No. 238, pp. 31～42, 1975-8.
 - 29) 吉田 裕・増田陳紀・森本 刚・広沢規行：立体骨組構造の増分つり合い方程式とその解法, 土木学会論文報告集, No. 300, pp. 21～31, 1980-8.
 - 30) 阿井正博・西野文雄：離散化系の幾何学的非線形問題での力学関係と平面骨組への適用, 土木学会論文報告集, No. 304, pp. 17～32, 1980-12.
 - 31) Baron, F. and M.S. Venkatesan : Nonlinear Formulation of Beam-Column Effects, Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 97, No. ST 4, pp. 1305～1340, April, 1971.
 - 32) Henrich, P.; 清水, 小林共訳：計算機による常微分方程式の解法 I, II, サイエンス社, 1973-5.
 - 33) 渡辺 昇・稼農知徳・薄木征三：薄肉曲線桁の変位場に基づく有限ねじれ解析, 土木学会論文報告集, No. 317, pp. 31～45, 1981-1.
 - 34) 成岡昌夫・中村恒善編：骨組構造解析法要覧, 培風館, pp. 200～205, 1976-4.
 - 35) 後藤芳顯・倉方慶夫・西野文雄：薄肉直線材の耐荷力解析における一手法, 土木学会第30回年次学術講演会講演概要集, I-142, pp. 292～294, 1975-10.
 - 36) 倉方慶夫・西野文雄：充実曲線棒材の有限変位場と応力場, 土木学会論文報告集, No. 317, pp. 15～30, 1981-1.

(1982.3.26・受付)