

固有値解を用いた一弾塑性応答解析法

A METHOD FOR ELASTIC-PLASTIC RESPONSE USING EIGENSOLUTION

水田洋司*・平井一男**

By Yoji MIZUTA and Itio HIRAI

1. まえがき

前報¹⁾では Reanalysis の考え方を動的応答解析に拡張することを目的としていたため、与系が一部修正された場合に与系の動特性を利用して修正後の系の応答を求める方法とその適用例について述べた。そこでは、運動方程式を最初から数値的に解く直接積分法を用いて、理論式の誘導を行い、弾性振動での固有振動数・固有モードを用いる方法については付録で概略を述べるにとどめた。また、応力-ひずみの関係が復元力特性曲線上のどの位置にあるかによって、付加外力の算定式は異なり、その式は複雑であった。

本論文では、弾性振動での固有振動数・固有モードを用いる弾塑性応答解析について述べ、付加外力の算定式が応力-ひずみの復元力特性曲線の位置に関係なく1つの式で表わせることを示した。弾塑性応答解析に弾性振動での固有振動数、固有モードが適用できれば、運動方程式をはじめから数値的に解く直接積分法に比較して、計算時間の短縮が期待できることはいうまでもないであろう。数値計算では、橋脚・基礎・地盤の連成振動、高橋脚をもつ7径間連続箱桁橋の地震応答解析を取り上げ、本法のほかに、直接積分法でも応答計算を行い、本法の計算精度、利点を明らかにした。

2. 解析原理

構造物部材の応力-ひずみの関係が図-1に示すバイリニア型で履歴を繰り返し、それが1本の部材と仮定すれば、前報より、付加外力は、塑性域のAB, CD, EB区間で未知力となり、弹性域のBC, DE区間に既知力

となる。このことを考慮して、未知力を付加外力で表わし、既知力を外力項に組み入れると、モード分解後の運動方程式、付加外力 ΔF_i 、運動方程式の解は、次式のように書き表わすことができる。

ただし、 h は時間間隔である。

運動方程式

$$\ddot{q}_i + 2\zeta\omega\dot{q}_i + \omega^2 q_i = \Phi^T (f_i + \Delta F_i) \quad \dots \dots \dots (1)$$

付加外力と既知外力

AB区間

$$\begin{aligned} \Delta F_i = & - \left(I + \frac{h^2}{4} \bar{K} \Phi e^2 Q \Phi^T \right)^{-1} \bar{K} \Phi \\ & \times \left\{ \frac{h^2}{4} e^2 Q (\Phi^T f_i - 2\zeta\omega E_{i-1} - \omega^2 G_{i-1}) + G_{i-1} \right\} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$f_i = F_i + \Delta K X_y \quad \dots \dots \dots (3)$$

BC区間

$$\Delta F_i = \mathbf{0} \quad \dots \dots \dots (4)$$

$$f_i = F_i + \Delta K (X_y - X_p) \quad \dots \dots \dots (5)$$

CD区間

$$\begin{aligned} \Delta F_i = & - \left(I + \frac{h^2}{4} \bar{K} \Phi e^2 Q \Phi^T \right)^{-1} \bar{K} \Phi \\ & \times \left\{ \frac{h^2}{4} e^2 Q (\Phi^T f_i - 2\zeta\omega E_{i-1} - \omega^2 G_{i-1}) + G_{i-1} \right\} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (6)$$

$$f_i = F_i + \Delta K (X_y - X_p + X_{y'}) \quad \dots \dots \dots (7)$$

DE区間

$$\Delta F_i = \mathbf{0} \quad \dots \dots \dots (8)$$

$$f_i = F_i + \Delta K (X_y - X_p + X_{y'} - X_{p'}) \quad \dots \dots \dots (9)$$

EB区間

$$\Delta F_i = - \left(I + \frac{h^2}{4} \bar{K} \Phi e^2 Q \Phi^T \right)^{-1} \bar{K} \Phi \quad \dots \dots \dots$$

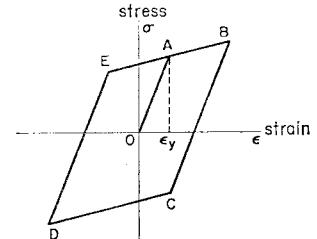


図-1 復元力特性曲線

* 正会員 工修 八代工業高等専門学校助教授 土木建築工学科

** 正会員 工博 熊本大学教授 工学部土木工学科

$$\times \left\{ \frac{h^2}{4} e^2 Q (\Phi^T f_i - 2 \zeta \omega E_{i-1} - \omega^2 G_{i-1}) + G_{i-1} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (10)$$

$$f_i = F_i + 4K(X_y - X_p + X_{y'} - X_{p'} + X_{y''}) \quad \dots \dots \dots \quad (11)$$

運動方程式の解

$$\ddot{q}_i = \mathbf{Q} \cdot \{\Phi^T(\mathbf{f}_i + \mathcal{A}\mathbf{F}_i) - 2\zeta\omega E_{i-1} - \omega^2 G_{i-1}\} \quad \dots \quad (12)$$

$$Q = \left(I + e\zeta\omega + \frac{h^2}{4} e^2 \omega^2 \right)^{-1} \quad \dots \dots \dots \quad (15)$$

$$G_{i-1} = q_{i-1} + h e \dot{q}_{i-1} + \frac{h^2}{4} e^2 \ddot{q}_{i-1} \quad \dots \dots \dots \quad (17)$$

$$e = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \dots & 0 \\ 0 & e_{**} & & \end{bmatrix} \quad \dots \quad (18)$$

$$e_j = \frac{\tan(\pi h/T_j)}{\pi h/T_j} \dots \quad (19)$$

ここに、 \mathbf{q} は基準座標 (時間関数ベクトル)、添字 i は時間点、 $\mathbf{\zeta}$ は減衰定数からなる対角マトリックス、 ω は固有振動数 (rad/s) からなる対角マトリックス、 $\mathbf{\Phi}^T$ はモードマトリックス $\mathbf{\Phi}$ の転置マトリックス、 \mathbf{F}_i は外力ベクトルである。 e_j については文献 2) p. 17 に詳細に述べており、ここではその説明を省略する。 $\Delta \mathbf{K}$ は部材の応力-ひずみの関係が塑性域にある部材の剛性変化による剛性マトリックスの変化量であり、 $\overline{\Delta \mathbf{K}}$ は $\Delta \mathbf{K}$ の零要素からなる行と列を取り除いた縮小マトリックスであり、式 (2), (6), (10) 中の一 $\Delta \mathbf{K}$ が $\overline{\Delta \mathbf{K}}$ に縮小されたことに伴うマトリックスの縮小を示す。 X_y , X_p , X'_y , X'_p は応力-ひずみの関係がそれぞれ、A 点、B 点、C 点、D 点にあるときの変位ベクトルであり、式 (19) 中の T_j は j 次の固有振動数に対応する固有周期である。式 (2)～式 (11) より、次のことが推測される。応力-ひずみの関係が弾性域から塑性域に入るたびに、 $\Delta \mathbf{K} X_y$ あるいは $\Delta \mathbf{K} X'_y$ だけ外力が増加し、応力-ひずみの関係が塑性域から弾性域に入るたびに $\Delta \mathbf{K} X_p$ あるいは $\Delta \mathbf{K} X'_p$ だけ外力が減少する。また、付加外力は部材の応力-ひずみの関係が塑性域 (EAB 区間, CD 区間) にある部材のみに生じ、弾性域 (OA 区間, BC 区間, DE 区間) では零であることがわかる。しかも、式 (2), (6), (10) より、塑性域での付加外力算定の式は同一の式である。以上のことを参考にして、数個の部材の応力-ひずみの関係がそれぞれ、AB 直線、BC 直線、CD 直線、DE 直線のいずれかにある場合の i 時間点での弾塑性振動の方程式、付加外力は次式で表わされ

る。

$$\ddot{q}_i + 2\zeta\omega\dot{q}_i + \omega^2 q_i = \Phi^T(f_i + \Delta F_i) \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{F}_i + \sum \Delta K_j X_{yj} - \sum \Delta K_k X_{pk} \quad \dots \dots \dots \quad (21)$$

$$\Delta F_i = - \left(I + \frac{h^2}{4} \sum_r \Delta K_r \Phi e^2 Q \Phi^T \right)^{-1} \sum_r \Delta K_r \Phi \\ \times \left\{ \frac{h^2}{4} e^2 Q (\Phi^T f_i - 2 \zeta \omega E_{i-1} - \omega^2 G_{i-1}) + G_{i-1} \right\} \dots \dots \dots \quad (22)$$

二二三

ΔK_r : (i) 時間点において、部材の応力-ひずみの関係式が EB 直線、CD 直線上にある塑性域の部材の剛性マトリックスの変化量を表わす。

ΔK_j : (i) 時間点あるいは、それより前の時間点で応力-ひずみの関係式が塑性域にあった部材の剛性マトリックスの変化量を表わす。

ΔK_k : (i) 時間点あるいは、それより前の時間点で応力-ひずみの関係式が塑性域から BC 直線、DE 直線で表わされる弾性域へ入った部材の剛性マトリックスの変化量を表わす。

X_{yj} : 部材の応力-ひずみの関係式が A 点, C 点, E 点にあるときの変位ベクトル

X_{pk} : 部材の応力-ひずみの関係式が B 点, D 点にあるときの変位ベクトル

式(21), (22)中の ΔK_r , ΔK_j , ΔK_k は、剛性マトリックスが増加する場合に正の符号を、減少する場合に負の符号をもつ。また、 ΔK_r , ΔK_j , ΔK_k の添字 r, j, k はそれぞれの応力-ひずみ関係を示す部材の個数を表わす。剛性マトリックスの変化量 $\sum_r \Delta K_r$ の零要素からなる行と列を取り除いた縮小マトリックス $\sum_r \Delta K_r$ を用いると、式(22)は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \Delta F_i = & -\left(I + \frac{h^2}{4} \sum_r \sum_{m \times m} \Delta K_r \Phi e^2 Q \Phi^T \right)^{-1} \sum_r \sum_{m \times m} \Delta K_r \Phi \\ & \times \left\{ \frac{h^2}{4} e^2 Q (\Phi^T f_n - 2 \zeta \omega E_{i-1} - \omega^2 G_{i-1}) + G_{i-1} \right\} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (23)$$

ここに, m は $\sum_r \Delta K_r$ のマトリックス次数, l は計算に用いるモードの個数である. 計算の手順は次のようにある. まず, $(i-1)$ 時間点における各部材の応力-ひずみ関係と (i) 時間点でのそれとが等しいと仮定して, $\sum_r \Delta K_r$, $\sum_j \Delta K_j$, $\sum_k \Delta K_k$ を計算し, 式(21), (23) より f_n , ΔF_i を算定する. 次に, 式(16)～式(18)を用いて時間関数ベクトル q_i を計算し, 次式で変位応答を求める.

この変位応答を用いて (i) 時間点での各部材の応力-ひずみ関係を求め、(i-1) 時間点でのそれと比較する。そ

の関係に変化がなければ(i)時間点の計算は終了であるが、変化があればそのときの $\sum_r \Delta K_r$, $\sum_j \Delta K_j$, $\sum_k \Delta K_k$ を計算し、以下、前と同様の計算を実行する。

3. 数値計算

提案法の精度と有効性を確かめるために、広島大橋の橋脚と高橋脚をもつ7径間連続箱桁橋の2つを取り上げ、地震加速度を作用させたときの弾塑性応答を求めた。本法のほかに Newmark の β 法 ($\beta=1/4$, $\tau=1/2$) でも応答を求め、計算精度、計算時間の比較を行った。

(1) 橋脚・基礎・地盤の連成振動

計算に用いた広島大橋の橋脚とその力学モデルを図-2に、その諸元を表-1に、質量を表-2に示して

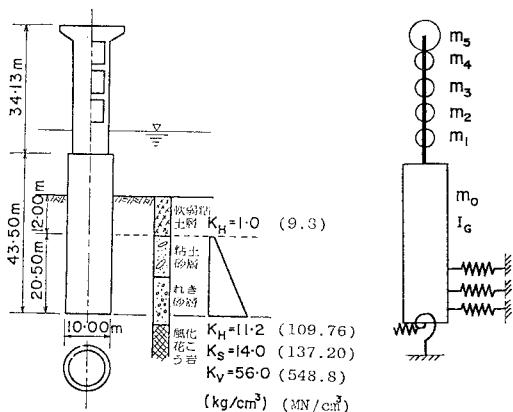


図-2 広島大橋の橋脚とその力学モデル

表-1 広島大橋の橋脚の諸元

| | | |
|------------------|---|------------------------------|
| 橋脚の重量 W_p | 1 673 t | (16.395 MN) |
| 上部構造の重量 W_u | 1 769 t | (17.336 MN) |
| ケーリングの重量 W_c | 6 300 t | (61.740 MN) |
| ケーリングの底面積 A | 78.54 m ² | |
| 底面の断面2次モーメント I | 490.9 m ⁴ | |
| 橋軸直角方向曲げ剛性 EI | 1.907×10^8 t m ² | (18.689 GN m ²) |
| 重力加速度 g | 9.8 m/s ² | |
| ケーリングの回転慣性 | 105.39×10^8 t s ² m | (1.0328 GN s ² m) |

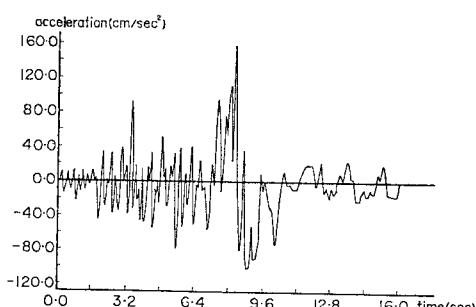


図-3 新潟地震の加速度波

いる。外力は図-3に示す新潟地震(1964年6月16日、EW成分、最大加速度159 gal)の加速度波であり、これを橋軸直角方向に作用させた。図-2では、橋脚部は剛棒・回転ばね、基礎は剛体、地盤部は水平ばね、回転ばねを用いてモデル化した。地盤ばねの復元力特性曲線は図-1と同じバイリニア型とし、塑性域の剛性は弹性域の剛性の40%とした。応答計算の時間間隔は

0.02秒で、応力ひずみの関係が弹性域を越えると時間間隔を0.01秒としている。本法で求められた応答の精度、計算時間の比較のために、減衰が零の場合について、直接積分法(Newmarkの β 法)でも応答を求めたが、この2つの手法で求められた応答は一致し、本法の精度の低下はみられない。表-3には、計算時間の比較を示しているが、構造物の自由度が少ないので計算時間に大きな差はない。

本モデルでは、橋脚、基礎部は弹性挙動をし、地盤ばねが弾塑性挙動をする。したがって、橋脚とケーリング接合部の曲げモーメント応答を示す図-4の弹性応答と塑性応答の差は、地盤ばねの履歴特性によるものである。この図からわかるように、地盤ばねの降伏によるエネルギー吸収(地盤ばねの弾塑性履歴によって失われるエネルギー)の影響が顕著で、最大値は弹性応答の場合より小さくなっている。エネルギー吸収の程度は降伏ひずみの大きさによって異なり、応答に違いが生じている。

(2) 7径間連続箱桁橋の地震応答解析

実橋への適用例として国鉄呼子線松浦川に架設された7径間連続PC箱桁橋を取り上げ、新潟地震による弾塑性応答性状について調べた。橋梁の諸元、モデル化、

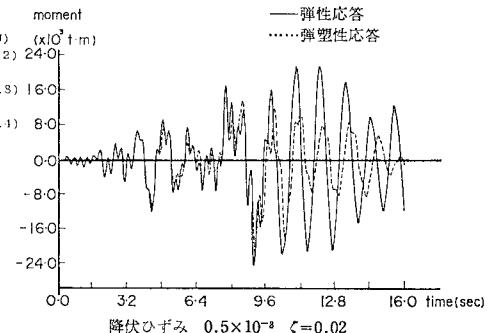


図-4 基礎と橋脚接合部の曲げモーメント応答

表-2 質量

| point | mass (t s ² /m) (kg) |
|-------|---------------------------------|
| 0 | $642.86 (6.30 \times 10^6)$ |
| 1 | $34.14 (3.35 \times 10^5)$ |
| 2 | $34.14 (3.35 \times 10^5)$ |
| 3 | $34.14 (3.35 \times 10^5)$ |
| 4 | $34.14 (3.35 \times 10^5)$ |
| 5 | $197.58 (1.94 \times 10^6)$ |

表-3 計算時間

| 手法 | CPU Time (s) |
|-------|--------------|
| 弾性応答 | 2.41 |
| 本法 | 2.72 |
| 逐次積分法 | 3.08 |

動特性については文献 3) に詳しく述べてあり、ここで割愛した。この橋梁は 32 個の質点をもつ系にモデル化されており、1 つの質点では図-5 に示す 3 個の自由度を有する。橋脚部は橋脚と地盤特性からばね定数を決定しているが、橋脚は地盤より剛であるため、そのばね特性は地盤特性に支配されると考えよろしくであろう。ばねの復元力特性曲線は、(1) と同じバイリニア型である。本法の応答計算に

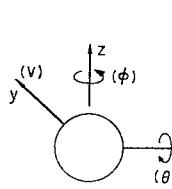


図-5 質点の自由度 用いたモード数は低次から 10 個で、本法のほかに直接積分法 (Newmark の β 法、 $\beta=1/4$) でも求め、計算時間、計算精度について比較した。時間間隔は 0.02 秒であるが、応力-ひずみの関係が弾性域を越えると、0.01 秒としている。地盤ばねの

剛性マトリックスの変化回数

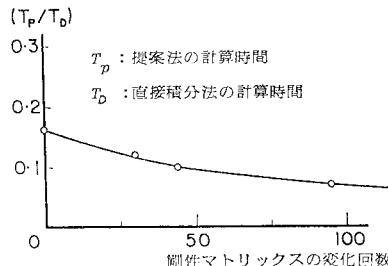


図-6 計算時間の比較

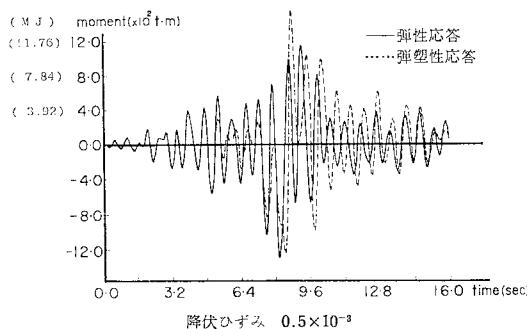


図-7 質点 11 の橋軸直角方向変位に関する曲げモーメント応答

降伏ひずみを 1.0×10^{-3} 、減衰を零としたときの本法と直接積分法の計算時間の比較を図-6 に示しており、2 つの方法で求めた応答は一致する。図-6 の計算時間は、本法、直接積分法が弾性応答解析に必要な固有値解析、逆マトリックス計算に要する時間を除外したものである。減衰は比例減衰とし、各モードに 2% の減衰を作用させ、降伏ひずみが 1.0×10^{-3} と 0.5×10^{-3} の場合について応答を求めた。紙面の都合で図示していないが、このとき、橋脚 P_2 から橋脚 P_0 の回転ばね K_θ が弾塑

性挙動を示す。

図-7 には、質点 11 の橋軸直角方向変位に対応するモーメント応答を図示しているが、弾塑性応答の最大値は弾性応答の最大値の 15% 増の値を示しており、しかも、応答振幅が小さくなる 10 秒以降の応答は、弾性応答より弾塑性応答の方が大きい値を示している。これは、地盤ばねの降伏によるエネルギー吸収の効果よりも、地盤ばねの降伏による剛性低下の影響が大きいためであろう。なお、本法と直接積分法に要する計算時間の比 (本法/直接積分法) は弾性応答解析時のモード解析法と直接積分法に要する計算時間の比よりも小さくなり、その程度は剛性マトリックスの変化回数に関係している。

(1), (2) の数値計算には、九州大学電子計算機センターの FACOM M-200 を用いた。

4. 結論

本論文では、弹性振動での固有振動数・固有モードを弾塑性応答解析に適用する方法について述べ、その妥当性を数値計算によって確かめた。図-6 に示すように、提案法では、弾塑性応答解析に一般に用いられる直接積分法よりも短い計算時間で弾塑性応答を求めることができる。しかも、同じ時間間隔で応答を求める場合には両方法で求めた値は一致するため、提案法は計算時間の面において直接積分法より有利といえよう。また、数値計算の結果、次のようなことがわかった。多自由度系の弾塑性応答では、弾塑性挙動を示す構造部材の履歴によるエネルギー吸収のために応答振幅が小さくなる構造物と、反対に剛性低下のために応答が大きくなる構造物があり、それらの程度は降伏条件の与え方によって異なる。

謝辞：九州大学工学部小坪清真教授には、数値計算について貴重な助言をいただいた。記して謝意を表する。

参考文献

- 1) 水田・平井：付加外力を用いて効率化した一非線形応答解析法、土木学会論文報告集、第 287 号、pp. 1~9, 1979-7.
- 2) 水田・西山・平井：Newmark の β 法における位相遅れ補正の一方法、土木学会論文報告集、第 268 号、pp. 15~21, 1977-12.
- 3) 成富ほか 4 名：多径間連続箱桁橋の振動特性と地震応答、九大工学集報、第 53 卷 5 号、pp. 505~512, 1980-10.
- 4) 土質工学会編：土と構造物の動的相互作用、土質工学会、pp. 1~66, 1973-10.

(1982.4.22・受付)