

# 板厚方向の成分を考慮した代表的な 2 次元化 平板理論の精度に関する考察

SOME CONSIDERATIONS ON ACCURACIES OF TYPICAL TWO-DIMENSIONAL PLATE THEORIES INCLUDING THE EFFECTS OF TRANSVERSE COMPONENTS

平 島 健 一\*・根 岸 嘉 和\*\*

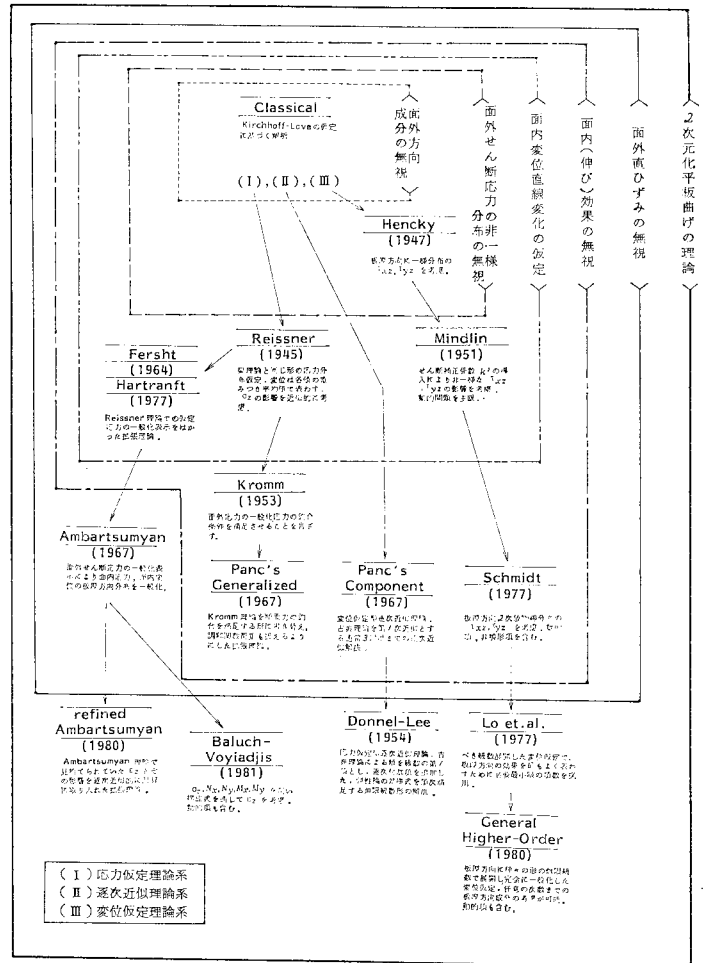
By Ken-ichi HIRASHIMA and Yoshikazu NEGISHI

## 1. 緒 言

Kirchhoff-Love の仮定に基づき、板厚方向の応力およびひずみの成分を無視した古典平板理論は、板厚とスパンまたは板厚と荷重の特性長との比がある値より大きくなると、解析結果の精度が低下してくことから、そのような平板に対してもある程度の精度を保ち得る修正理論が従来から提案され現在に至っている。その代表的な理論は静的な問題にあっては、断面のせん断変形を考慮に入れようとするものであり、動的な問題にあっては、さらに回転慣性の効果をも導入しようとするもので、これらの理論に関する記念碑的論文として前者に対し Reissner<sup>1)</sup>、後者に対し Mindlin<sup>2)</sup> のものが挙げられる。これらの論文が発表されてすでに 30 年以上の歳月を経過した現在においても、これらの論文を基調とした計算例ないし若干の改良を施した理論の提案が多数行われているのが現状である。もちろん、この間およびこれ以前にも 3 次元弾性論に立脚した幾つかの弾性厳密解の提案がなされている<sup>3)~18)</sup>が、実用性という観点からいえば汎用性に乏しく、また一般的な形状、荷重、境界の各状態を考慮した場合、その解を得ることがかなり困難であるという欠陥は否めない。このゆえに先に挙げた Reissner, Mindlin 両理論が

注目されるゆえんであるが、これらの理論は力学的な境界条件として古典論とは異なり 3 つの条件を考慮に入れることができるという意味でより実際に近いとともに、基本的には着目する力学量を板厚方向座標に関して展開

Table 1 Review of developments of two-dimensional plate theories including the effects of transverse components.



\* 正会員 工博 山梨大学助教授 工学部 土木工学科  
 \*\* 正会員 工修 福島工業高等専門学校講師 土木工学科

した2次元化平板理論の一種として位置付けられるものであって、それらに対するその後の理論的發展を含めた概要を著者の一人は先に本報告集で表形式(文献<sup>14)</sup>のTable 1参照)で提示した。

ここでは、いまま少し観点を換え、2次元化理論の概要を図式化した表をTable 1に示す。なお、ここに示した各理論以外の2次元化理論(たとえばLoveの理論など)も見受けられるが、本文においては主としてこの表中に示された各種理論のうちの代表的なものについての支配式とそれらの相互関係を整理し、いくつかの数値計算例によって解析精度の検討考察を行うと同時に、一般化高次理論(著者らの理論)の有効性を併せて検証することを目的としたものである。特に板厚と辺長との比ないし板厚と荷重周期の幅との比のかなり大きな値の範囲について検討を行うが、これは等分布、部分分布ないし集中荷重状態に対してこれらをFourier級数で展開した形で計算を実行する際に必然的に重要な検討項目とならざるを得ないものであり、このことを具体的に等分布荷重が作用する単純支持矩形板に適用してそれらの解の収束状況と精度について検討する。なお本論文では理論式の提示ならびに数値計算例は等質等方一定厚さの弾性平板の静的な場合のみに限定する。

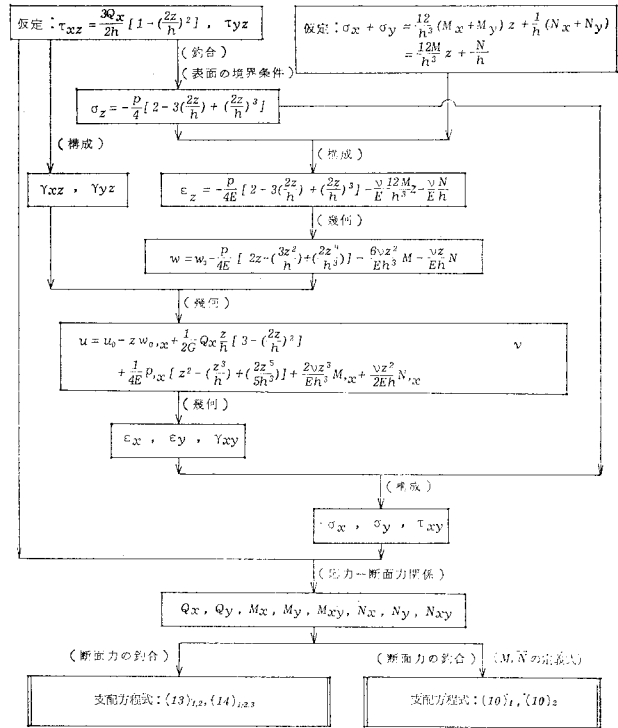
## 2. 代表的な2次元化平板理論の概要

### (1) 板厚方向成分のすべてを考慮した理論(BaluchおよびVoyiadjisの理論<sup>16),17)</sup>

断面のせん断変形および動的な問題にあっては、せん断変形と回転慣性を考慮したReissner, Mindlinの理論<sup>1),2)</sup>さらにはAmbartsumyanの理論<sup>18)</sup>においてさえも板厚方向の直ひずみ $\epsilon_z$ の考慮がなされておられないことからこの $\epsilon_z$ の影響を何らかの形で導入しようと試みた理論として著者の一人の提案になるAmbartsumyan理論の逐次近似型の改良理論<sup>14)</sup>を挙げることができるが、その後、最近BaluchおよびVoyiadjisらは、この項の影響を定式化の最初の段階で考慮することによって閉じた型の解析式を提案しているのは注目に値するものと思われる<sup>注1)</sup>。この理論は、後に示す基本的な計算例によって、その精度特性が解明されるがTable 1の分類からいえば一つの応力仮定型理論系の特徴をそなえているものであり、そこで誘導された結果を特殊化すれば、従来のReissner理論<sup>1)</sup>, Reissnerの改良理論<sup>19)</sup>, Ambar-

注1) 本論文の投稿後Reissnerの新しい論文<sup>19)</sup>が雑誌に掲載されたが、それはほぼここで示したB-V理論と同一系列の内容である。

Table 2 Flow chart of deduction of governing equations due to Baluch-Voyiadjis's theory.



tsumyan 理論<sup>18)</sup>に帰着するものである。したがってここではこの理論の導出過程のflow chartをTable 2に示しておく(なおBaluchおよびVoyiadjisの理論<sup>16),17)</sup>(B-V理論)では面内の軸力 $N$ の項は考慮されていないが、ここでは、著者らの修正補足したものを示している。したがってこの $N$ の項を無視すればBaluchら自身が導いたものに基本的に一致することになる)。基礎式の概要を以下に示そう。

まずReissnerあるいはAmbartsumyanの理論<sup>注2)</sup>と同じく、板厚にわたる面外せん断応力の分布を板厚方向の座標 $z$ の2次式で仮定することから出発し、後出の弾性学のつり合い方程式の第3式から板厚方向の直応力 $\sigma_z$ を境界条件(ここではFig. 1のように板の上表面( $z = -h/2$ )に下向きの鉛直荷重 $p$ が作用する場

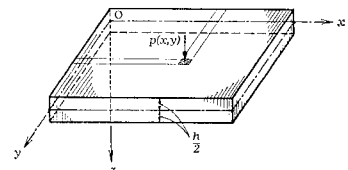


Fig. 1 Geometry of rectangular plate and rectangular Cartesian coordinate system (x, y, z).

注2) Ambartsumyanの著書<sup>18)</sup>には $z$ に関する関数形については一応、任意形 $f(z)$ とした理論の定式化が基本となされているが、ここでは具体的に $z$ の2次式を採用した結果のものを対象として議論を進めてゆく。

合)を満たすように定めるとそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{3}{2h} Q_x \left\{ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right\} \\ \tau_{yz} &= \frac{3}{2h} Q_y \left\{ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right\} \\ \sigma_z &= -\frac{p}{4} \left\{ 2 - 3 \left( \frac{2z}{h} \right) + \left( \frac{2z}{h} \right)^3 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

ここに  $Q_x, Q_y$  は断面に働くせん断力であつて  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  を板厚方向にわたつて積分した結果に等しい量である。

次に等方性の幾何学関係式ならびに構成方程式：

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= u_{,x} = \frac{1}{E} \{ \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \} \\ \epsilon_y &= v_{,y} = \frac{1}{E} \{ \sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x) \} \\ \epsilon_z &= w_{,z} = \frac{1}{E} \{ \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \} \\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= v_{,z} + w_{,y} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \gamma_{xz} &= w_{,x} + u_{,z} = \frac{1}{G} \tau_{xz} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

の第3式から板厚方向変位  $w$  を算定するのであるが、その際、式中に現われる面内直応力の和  $\sigma_x + \sigma_y$  の評価としては、後出の断面力としての軸力  $N_x, N_y$  および曲げモーメント  $M_x, M_y$  を用いて次のように与えられると仮定する。

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= \frac{1}{h} (N_x + N_y) + \frac{12z}{h^3} (M_x + M_y) \\ &\equiv \frac{1}{h} N + \frac{12z}{h^3} M \dots\dots\dots(3) \end{aligned}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} N &= N_x + N_y = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x + \sigma_y) dz \\ M &= M_x + M_y = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x + \sigma_y) z \cdot dz \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[ (u_{0,x} + \nu v_{0,y}) - z(w_{0,xx} + \nu w_{0,yy}) + \frac{z}{2Gh} \left\{ 3 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right\} (Q_{x,x} + \nu Q_{y,y}) \right. \\ &\quad + \frac{\nu z^2}{2Eh} (N_{,xx} + \nu N_{,yy}) + \frac{2\nu z^3}{Eh^3} (M_{,xx} + \nu M_{,yy}) + \frac{1}{4E} \left\{ z^2 - \left( \frac{z^3}{h} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{2z^5}{5h^3} \right) \right\} (p_{,xx} + \nu p_{,yy}) \left. \right] - \frac{\nu}{4(1-\nu)} \left\{ 2 - 3 \left( \frac{2z}{h} \right) + \left( \frac{2z}{h} \right)^3 \right\} p, \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[ (v_{0,y} + \nu u_{0,x}) - z(w_{0,yy} + \nu w_{0,xx}) + \frac{z}{2Gh} \left\{ 3 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right\} (Q_{y,y} + \nu Q_{x,x}) \right. \\ &\quad + \frac{\nu z^2}{2Eh} (N_{,yy} + \nu N_{,xx}) + \frac{2\nu z^3}{Eh^3} (M_{,yy} + \nu M_{,xx}) + \frac{1}{4E} \left\{ z^2 - \left( \frac{z^3}{h} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{2z^5}{5h^3} \right) \right\} (p_{,yy} + \nu p_{,xx}) \left. \right] - \frac{\nu}{4(1-\nu)} \left\{ 2 - 3 \left( \frac{2z}{h} \right) + \left( \frac{2z}{h} \right)^3 \right\} p, \\ \tau_{xy} &= G \left[ (u_{0,y} + v_{0,x}) - 2z w_{0,xy} + \frac{z}{2Gh} \left\{ 3 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right\} (Q_{x,y} + Q_{y,x}) + \frac{\nu z^2}{Eh} N_{,xy} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4\nu z^3}{Eh^3} M_{,xy} + \frac{1}{2E} \left\{ z^2 - \left( \frac{z^3}{h} \right) + \left( \frac{2z^5}{5h^3} \right) \right\} p_{,xy} \right]. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

上記の(3)は最終的に求められた応力  $\sigma_x, \sigma_y$  とはもちろん差異はあるが、初期段階の近似としては一応妥当であろう。

さて(2)<sub>3</sub>に(1)<sub>3</sub>および(3)を代入し積分すると

$$\begin{aligned} w &= w_0 - \frac{\nu z}{Eh} N - \frac{6\nu z^2}{Eh^3} M \\ &\quad - \frac{p}{4E} \left\{ 2z - \left( \frac{3z^2}{h} \right) + \left( \frac{2z^4}{h^3} \right) \right\} \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

が得られる。ここに、上式の右辺第1項の  $w_0 = w_0(x, y)$  は板中央面でのたわみを表すものであり、第2項以降が板厚方向の直ひずみ  $\epsilon_z$  の効果を考慮したことによって生じた補正項である。通常の古典平板理論、Reissner理論<sup>1)</sup>、Mindlin理論<sup>2)</sup>およびAmbartsumyan理論<sup>18)</sup>ではともにこれらが無視されたことになっている。次に(2)<sub>5,6</sub>の関係式に(1)<sub>1,2</sub>および(5)を代入し、積分を実行すると、板面内の変位  $u, v$  は次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 - z w_{0,x} + \frac{z}{2Gh} \left\{ 3 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right\} Q_x \\ &\quad + \frac{\nu z^2}{2Eh} N_{,x} + \frac{2\nu z^3}{Eh^3} M_{,x} \\ &\quad + \frac{1}{4E} \left\{ z^2 - \left( \frac{z^3}{h} \right) + \left( \frac{2z^5}{5h^3} \right) \right\} p_{,x} \\ v &= v_0 - z w_{0,y} + \frac{z}{2Gh} \left\{ 3 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right\} Q_y \\ &\quad + \frac{\nu z^2}{2Eh} N_{,y} + \frac{2\nu z^3}{Eh^3} M_{,y} \\ &\quad + \frac{1}{4E} \left\{ z^2 - \left( \frac{z^3}{h} \right) + \left( \frac{2z^5}{5h^3} \right) \right\} p_{,y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

ここに、 $u_0 = u_0(x, y), v_0 = v_0(x, y)$  は板中央面の  $x, y$  方向の変位量である。以上によって求められた平板としての3次元的な変位  $u, v, w$  を用いて幾何学関係式より面内ひずみ  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$  を求め、次に(2)<sub>1,2,4</sub>および(1)<sub>3</sub>の関係を使って板面内の応力  $\sigma_x, \sigma_y$  および  $\tau_{xy}$  が最終的に次式のように求められる。

さて、以上によって6個の応力成分が仮定ないし決定されたことになり、これらの成分から断面力としての軸力、面内せん断力および曲げ、ねじりのモーメントが次のように決定される。

$$\left. \begin{aligned}
 N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = \frac{Eh}{1-\nu^2} (u_{0,x} + \nu v_{0,y}) + \frac{h^3}{48(1-\nu^2)} (p_{,xx} + \nu p_{,yy}) - \frac{\nu h}{2(1-\nu)} p \\
 &\quad + \frac{\nu h^2}{24(1-\nu^2)} (N_{,xx} + \nu N_{,yy}), \\
 N_y &= \int \sigma_y dz = \frac{Eh}{1-\nu^2} (v_{0,y} + \nu u_{0,x}) + \frac{h^3}{48(1-\nu^2)} (p_{,yy} + \nu p_{,xx}) - \frac{\nu h}{2(1-\nu)} p \\
 &\quad + \frac{\nu h^2}{24(1-\nu^2)} (N_{,yy} + \nu N_{,xx}), \\
 N_{xy} &= \int \tau_{xy} dz = \frac{Eh}{2(1+\nu)} (u_{0,y} + v_{0,x}) + \frac{h^3}{48(1+\nu)} p_{,xy} + \frac{\nu h^2}{24(1+\nu)} N_{,xy}, \\
 M_x &= \int \sigma_x \cdot z dz = D \left\{ -(\omega_{0,xx} + \nu \omega_{0,yy}) + \frac{1}{S} (Q_{x,x} + \nu Q_{y,y}) + \frac{1}{R} (M_{,xx} + \nu M_{,yy}) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{T} (p_{,xx} + \nu p_{,yy}) + \frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} p \right\}, \\
 M_y &= \int \sigma_y \cdot z dz = D \left\{ -(\omega_{0,yy} + \nu \omega_{0,xx}) + \frac{1}{S} (Q_{y,y} + \nu Q_{x,x}) + \frac{1}{R} (M_{,yy} + \nu M_{,xx}) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{T} (p_{,yy} + \nu p_{,xx}) + \frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} p \right\}, \\
 M_{xy} &= \int \tau_{xy} \cdot z dz = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left\{ -\omega_{0,xy} + \frac{1}{2S} (Q_{x,y} + Q_{y,x}) + \frac{1}{R} M_{,xy} - \frac{1}{T} p_{,xy} \right\}.
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned}
 D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \frac{1}{R} = \frac{3\nu}{10Eh}, \quad \frac{1}{S} = \frac{12(1+\nu)}{5Eh}, \quad \frac{1}{T} = \frac{39h}{1120E} \\
 G &= \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \frac{D}{R} = \frac{\nu h^2}{40(1-\nu^2)}, \quad \frac{D}{S} = \frac{h^2}{5(1-\nu)}, \quad \frac{D}{T} = \frac{13h^4}{4480(1-\nu^2)}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

これより、軸力と  $N$ 、曲げモーメントと  $M$  はそれぞれ次式を満たさなければならない。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{1}{1+\nu} N - \frac{\nu h^2}{24(1-\nu^2)} \nabla^2 N &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (u_{0,x} + v_{0,y}) + \left\{ -\frac{\nu h}{1-\nu^2} + \frac{h^3}{48(1-\nu^2)} \nabla^2 \right\} p \\
 \frac{1}{1+\nu} M - \frac{D}{R} \nabla^2 M &= -D \left( \nabla^2 \omega_0 + \frac{12}{5Eh} p + \frac{1}{T} \nabla^2 p \right)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ここに  $\nabla^2$  は2次元の Laplace 演算子で次式で与えられる。

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \dots\dots\dots (11)$$

物体力を無視した静的なつり合い方程式：

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} = 0, \quad \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} = 0, \quad \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} = 0 \dots\dots\dots (12)$$

の第1, 2式を板厚方向に積分し、上下表面での境界(荷重)条件を考慮すれば、面内挙動を支配する基礎微分方程式として次式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( u_{0,xx} + \frac{1-\nu}{2} u_{0,yy} + \frac{1+\nu}{2} v_{0,xy} \right) + \frac{\nu h^2}{24(1-\nu^2)} \nabla^2 N_{,x} &= \left\{ \frac{\nu h}{2(1-\nu)} - \frac{h^3}{48(1-\nu^2)} \nabla^2 \right\} p_{,x} \\
 \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( v_{0,yy} + \frac{1-\nu}{2} v_{0,xx} + \frac{1+\nu}{2} u_{0,xy} \right) + \frac{\nu h^2}{24(1-\nu^2)} \nabla^2 N_{,y} &= \left\{ \frac{\nu h}{2(1-\nu)} - \frac{h^3}{48(1-\nu^2)} \nabla^2 \right\} p_{,y}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

同様にして(12)<sub>3</sub>を板厚にわたって積分および(12)<sub>1,2</sub>に  $z$  を掛け板厚にわたって積分し上下表面条件を考慮すれば、面外方向の挙動に関連する支配式が次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned}
 Q_{x,x} + Q_{y,y} &= -p \\
 Q_x - \frac{D}{S} \left( Q_{x,xx} + \frac{1-\nu}{2} Q_{x,yy} + \frac{1+\nu}{2} Q_{y,xy} \right) + D \nabla^2 \omega_{0,x} - \frac{D}{R} \nabla^2 M_{,x} &= \left\{ \frac{\nu h^2}{10(1-\nu)} - \frac{D}{T} \nabla^2 \right\} p_{,x} \\
 Q_y - \frac{D}{S} \left( Q_{y,yy} + \frac{1-\nu}{2} Q_{y,xx} + \frac{1+\nu}{2} Q_{x,xy} \right) + D \nabla^2 \omega_{0,y} - \frac{D}{R} \nabla^2 M_{,y} &= \left\{ \frac{\nu h^2}{10(1-\nu)} - \frac{D}{T} \nabla^2 \right\} p_{,y}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

面内挙動に関する(13)と(10)<sub>1</sub>を組み合わせて整理すると次のようになる。

(面内挙動の支配方程式)：

$$\left. \begin{aligned} \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( u_{0,xx} + \frac{1-\nu}{2} u_{0,yy} + \frac{1+\nu}{2} v_{0,xy} \right) &= \left\{ \frac{\nu h}{2(1-\nu)} - \frac{h^3}{48} \nu^2 \right\} p_{,x} \\ \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( v_{0,xy} + \frac{1-\nu}{2} v_{0,xx} + \frac{1+\nu}{2} u_{0,xy} \right) &= \left\{ \frac{\nu h}{2(1-\nu)} - \frac{h^3}{48} \nu^2 \right\} p_{,y} \\ N &= \frac{Eh}{1-\nu} (u_{0,x} + v_{0,y}) - \left\{ \frac{\nu h}{1-\nu} - \frac{(1+\nu)h^3}{48} \nu^2 \right\} p \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

同様に、(14) と (10)<sub>2</sub> を組み合わせて整理すると次のようになる。

(面外挙動の支配式) :

$$\left. \begin{aligned} D\nabla^4 w_0 &= \left\{ 1 - \frac{8-3\nu}{40(1-\nu)} h^2 \nu^2 - \frac{65-56\nu^2}{22400(1-\nu^2)} h^4 \nu^4 \right\} p \\ Q_x - \frac{h^2}{10} \nabla^2 Q_x &= -D\nabla^2 w_{0,x} - \left\{ \frac{4+\nu}{40(1-\nu)} h^2 + \frac{65-56\nu^2}{22400(1-\nu^2)} h^4 \nu^2 \right\} p_{,x} \\ Q_y - \frac{h^2}{10} \nabla^2 Q_y &= -D\nabla^2 w_{0,y} - \left\{ \frac{4+\nu}{40(1-\nu)} h^2 + \frac{65-56\nu^2}{22400(1-\nu^2)} h^4 \nu^2 \right\} p_{,y} \\ M &= -(1+\nu) D\nabla^2 w_0 - \left\{ \frac{8+\nu+\nu^2}{40(1-\nu)} h^2 + \frac{65-56\nu^2}{22400(1-\nu^2)} h^4 \nu^2 \right\} p \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

上記にみるように等質の弾性体で微小変形を仮定する場合、面内、面外それぞれの支配式は連成せず分離した独立な基礎式を形成することになる。

Reissner<sup>1)</sup>, Ambartsumyan 理論<sup>18)</sup> では (16) の上の3つの式の荷重項に差異が認められるとともに曲げモーメントと  $M$  の項がないものに相当する。すなわち、面外挙動に関する断面力  $Q_x, Q_y$  および変位  $w_0$  で表示した支配方程式はこれらの両理論とも次のようになる。

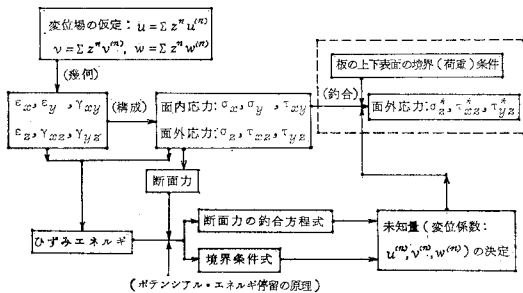
(Reissner 理論, Ambartsumyan 理論) :

$$\left. \begin{aligned} D\nabla^4 w_0 &= \left\{ 1 - \frac{2-\nu}{10(1-\nu)} h^2 \nu^2 \right\} p \\ Q_x - \frac{h^2}{10} \nabla^2 Q_x &= -D\nabla^2 w_{0,x} - \frac{h^2}{10(1-\nu)} p_{,x} \\ Q_y - \frac{h^2}{10} \nabla^2 Q_y &= -D\nabla^2 w_{0,y} - \frac{h^2}{10(1-\nu)} p_{,y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

(2) 一般化高次理論 (著者らの理論<sup>21)</sup>)

変位仮定を最初に設定して支配式を誘導、定式化する理論として Hencky<sup>22)</sup>, Mindlin<sup>2)</sup>, Naghdi<sup>23)</sup>, Essnburg<sup>24)</sup>, Nelson & Lorch<sup>25)</sup>, Lo, et al.<sup>26)</sup> らが列挙できるが、著者らは変位場の仮定を板厚方向座標  $z$  の無限項

**Table 3** Flow chart of deduction of governing equations due to General Higher-Order theory by authors.



級数とし、異方性、層状性をも含めた一般的な静的・動的平板理論を定式化した<sup>21)</sup>。これは上述の研究者らの理論式をその特殊な場合として包含したものとなっており、その定式化過程の flow chart を **Table 3** に、また理論式の概要を以下に示す (ここでは等質・等方で静的な場合に限定し、さらに  $z$  に関するべき級数展開を行ったもののみについて触れることにする)。いま、3次元変位  $u, v, w$  を次式で表示できるものと仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot u^{(n)}(x, y) \\ v &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot v^{(n)}(x, y) \\ w &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot w^{(n)}(x, y) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

上式の変位係数  $u^{(n)}, v^{(n)}, w^{(n)}$  は面内座標  $x$  および  $y$  のみの関数であって、その幾何学的内容の具体例を  $n=3$  までの範囲のものについて **Fig. 2** に示した。これより幾何学関係式および構成方程式 (2) から応力の各成分は  $u^{(n)}, v^{(n)}, w^{(n)}$  を用いて次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \{ (\lambda + 2G) u_{,x}^{(n)} + \lambda v_{,y}^{(n)} + (n+1) \lambda w^{(n+1)} \}, \\ \sigma_y &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \{ (\lambda + 2G) v_{,y}^{(n)} + \lambda u_{,x}^{(n)} + (n+1) \lambda w^{(n+1)} \}, \\ \sigma_z &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \{ (n+1) (\lambda + 2G) w^{(n+1)} + \lambda (u_{,x}^{(n)} + v_{,y}^{(n)}) \}, \\ \tau_{xy} &= G \sum_{n=0}^{\infty} z^n \{ u_{,y}^{(n)} + v_{,x}^{(n)} \}, \\ \tau_{xz} &= G \sum_{n=0}^{\infty} z^n \{ w_{,x}^{(n)} + (n+1) u^{(n+1)} \}, \\ \tau_{yz} &= G \sum_{n=0}^{\infty} z^n \{ w_{,y}^{(n)} + (n+1) v^{(n+1)} \}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

ここに  $\lambda, G$  は Lamé 定数で次式で与えられる。

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここで、後で必要になる断面にわたる  $z$  に関する  $n$  次モーメントをとった力学量を求めておく。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(n)} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot z^n dz = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{\delta}_{m+n} B_{mn} \{(\lambda+2G)u_{,x}^{(m)} + \lambda v_{,y}^{(m)} + (m+1)\lambda w^{(m+1)}\} \\ \sigma_y^{(n)} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot z^n dz = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{\delta}_{m+n} B_{mn} \{(\lambda+2G)v_{,y}^{(m)} + \lambda u_{,x}^{(m)} + (m+1)\lambda w^{(m+1)}\} \\ \sigma_z^{(n)} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z \cdot z^n dz = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{\delta}_{m+n} B_{mn} \{(m+1)(\lambda+2G)w^{(m+1)} + \lambda(u_{,x}^{(m)} + v_{,y}^{(m)})\} \\ \tau_{xy}^{(n)} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot z^n dz = G \sum_{m=0}^{\infty} \hat{\delta}_{m+n} B_{mn} (u_{,y}^{(m)} + v_{,x}^{(m)}) \\ \tau_{xz}^{(n)} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \cdot z^n dz = G \sum_{m=0}^{\infty} \hat{\delta}_{m+n} B_{mn} \{w_{,x}^{(m)} + (m+1)u^{(m+1)}\} \\ \tau_{yz}^{(n)} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \cdot z^n dz = G \sum_{m=0}^{\infty} \hat{\delta}_{m+n} B_{mn} \{w_{,y}^{(m)} + (m+1)v^{(m+1)}\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに, } \hat{\delta}_{m+n} &= \frac{1}{2} \{1 + (-1)^{m+n}\} \\ B_{mn} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{m+n} \cdot \frac{h^{m+n+1}}{m+n+1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

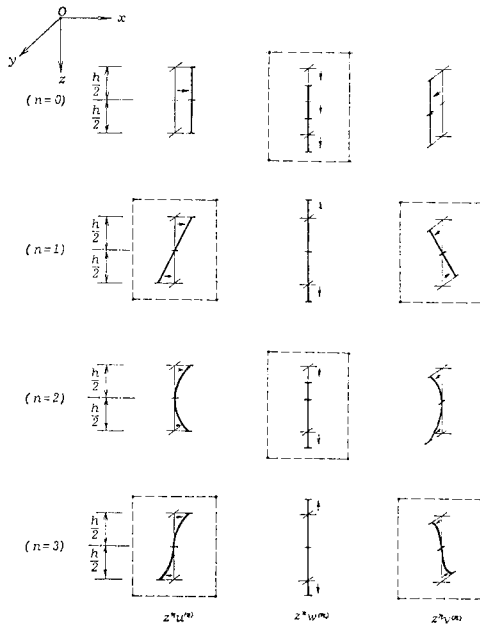


Fig. 2 Schematic diagram of components of displacement coefficients  $u^{(n)}$ ,  $v^{(n)}$  and  $w^{(n)}$ .

たとえば、上式中の量は先に定義した軸力、せん断力、曲げモーメント等との関係として次のような対応がある。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(0)} &= N_x, \quad \sigma_y^{(0)} = N_y, \quad \tau_{xy}^{(0)} = N_{xy}, \\ \tau_{xz}^{(0)} &= Q_x, \quad \tau_{yz}^{(0)} = Q_y, \quad \sigma_x^{(1)} = M_x, \\ \sigma_y^{(1)} &= M_y, \quad \tau_{xy}^{(1)} = M_{xy} \end{aligned} \right\} \dots (23)$$

このほかの上指標  $n$  を有する (21) の項は、古典平板理論<sup>20)</sup>、Reissner 理論等では生じない。

さて、つり合い方程式 (12) に  $z^n$  を掛け積分を実行し、境界条件を考慮、ないしは変分学的手法によって、ここで考えている平板問題に対する基礎方程式として次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x,x}^{(n)} + \tau_{xy,y}^{(n)} - n\tau_{xz}^{(n-1)} + [\tau_{xz} \cdot z^n]_{z=-h/2}^{z=h/2} &= 0 \\ \tau_{xy,x}^{(n)} + \sigma_{y,y}^{(n)} - n\tau_{yz}^{(n-1)} + [\tau_{yz} \cdot z^n]_{z=-h/2}^{z=h/2} &= 0 \\ \tau_{xz,x}^{(n)} + \tau_{yz,y}^{(n)} - n\sigma_z^{(n-1)} + [\sigma_z \cdot z^n]_{z=-h/2}^{z=h/2} &= 0 \end{aligned} \right\} (n=0, 1, 2, \dots) \quad \dots\dots\dots (24)$$

上に (21) の演算を実行して得られる関係式を代入し整理すれば、変位係数  $u^{(n)}$ ,  $v^{(n)}$ ,  $w^{(n)}$  で表示された平板の基礎方程式が次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{\delta}_{m+n} B_{mn} [GF^2 u^{(m)} + (\lambda+G)e_{,x}^{(m)} + \{(m+1)\lambda-nG\}w_{,x}^{(m+1)}] \\ - 2G \cdot \hat{\delta}_n \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^n w_{,x}^{(0)} - nG \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \hat{\delta}_{m+n} B_{m,n-1} (m+1)u^{(m+1)} + [\tau_{xz} z^n]_{z=-h/2}^{z=h/2} &= 0, \\ \sum_{m=0}^{\infty} \hat{\delta}_{m+n} B_{mn} [GF^2 v^{(m)} + (\lambda+G)e_{,y}^{(m)} + \{(m+1)\lambda-nG\}w_{,y}^{(m+1)}] \\ - 2G \cdot \hat{\delta}_n \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^n w_{,y}^{(0)} - nG \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \hat{\delta}_{m+n} B_{m,n+1} (m+1)v^{(m+1)} + [\tau_{yz} z^n]_{z=-h/2}^{z=h/2} &= 0, \\ \sum_{m=0}^{\infty} \hat{\delta}_{m+n} B_{mn} [GF^2 w^{(m)} + \{(m+1)G-n\lambda\}e^{(m+1)}] \\ - 2\lambda \cdot \hat{\delta}_n \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^n e^{(0)} - n(\lambda+2G) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \hat{\delta}_{m+n} B_{m,n-1} (m+1)w^{(m+1)} + [\sigma_z z^n]_{z=-h/2}^{z=h/2} &= 0. \end{aligned} \right\} (n=0, 1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots\dots (25)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \delta_{m+n} &= \frac{1}{2} \{1 - (-1)^{m+n}\} \\ e^{(m)} &= u_{,x}^{(m)} + v_{,y}^{(m)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

上式を具体的に展開してみればわかるように面内挙動に関する  $u^{(2k)}, v^{(2k)}, w^{(2k+1)}$ , ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) と面外挙動に関する  $u^{(2k+1)}, v^{(2k+1)}, w^{(2k)}$ , ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) は連成せず互いに独立な方程式系を構成することが証明できる。これは Fig. 2 の図でいえば [ ] の項は面外挙動に、それ以外のは面内挙動に関与するもので、お互いに独立なモードを形成することを意味する。このことは等質の平板における著しい特色であって、一般的な層状性ないし非均質性の場合には、両者が連成し合って方程式系の分離が不可能になり、複雑な変形モードが発生することになる。もちろん前項で略述した B-V 理論も面内・面外挙動は連成せず、それぞれ独立な理論式に支配されているのは当然である。これらの式において  $u^{(1)}, v^{(1)}, w^{(0)}$  を採用し、平面応力状態の構成式から得られる弾性定数へ置換すれば Hencky 理論<sup>22)</sup>に、またその場合でせん断補正係数  $\kappa^2 = \pi^2/12$  を導入すれば Mindlin 理論<sup>2)</sup> (の静的な場合) に一致する。 $w^{(0)}, u^{(1)} = -zw_{,x}^{(0)}, v^{(1)} = -zw_{,y}^{(0)}$  を採用すれば古典理論<sup>20)</sup>に帰着するのはいうまでもない。 $u^{(3)}, v^{(3)}, w^{(2)}$  までの計 11 個の変位係数を導入してやればもちろん、Lo らの理論式<sup>26)</sup>に完全に一致する。その他の理論式も、より少ない数の変位係数を採用したものとして位置づけできるがそれについては参考文献<sup>15)</sup>に譲る。なお上記の理論における境界条件は境界の端面、たとえば  $x$  軸に直な境界面において

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz}^{(n)}, \sigma_x^{(n)}, \tau_{xy}^{(n)}; w^{(n)}, u^{(n)}, v^{(n)}, \\ (n=0, 1, 2, \dots) \dots (27) \end{aligned} \right\}$$

のいずれかが規定されなければならない。

なお Whitney<sup>28)</sup>, あるいは Lo らの論文<sup>27)</sup>, さらにまた古典理論に関する標準的な教科書<sup>20)</sup>においても指摘されているように変位場のみの仮定から出発する理論は変位係数の項数の増大とともに変位、応力成分の精度は全体的には飛躍的によくなるが、他方では面内応力  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  に比較して面外応力の成分  $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z$  の精度はそれほど芳しくはないという欠陥が生じる。そこで、ここでは求められた面内応力  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  とつり合い方程式 (12) ならびに上下表面の境界条件を用いて面外応力を求める手法を採用し、この欠陥を回避する。そのことを実行した結果は、最終的に次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz}^* &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left\{ z^{n+1} - \delta_n \left( \frac{h}{2} \right)^{n+1} \right\} \cdot \Gamma_x^{(n)} \\ \tau_{yz}^* &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left\{ z^{n+1} - \delta_n \left( \frac{h}{2} \right)^{n+1} \right\} \cdot \Gamma_y^{(n)} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z^* &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left\{ z^{n+2} - \delta_n \left( \frac{h}{2} \right)^{n+2} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\delta_n}{n+1} z \left( \frac{h}{2} \right)^{n+1} \right] \cdot \Gamma_z^{(n)} - \frac{p}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_x^{(n)} &= (\lambda + G) e_{,x}^{(n)} + G \mathcal{F}^2 u^{(n)} + (n+1) \lambda w_{,x}^{(n+1)} \\ \Gamma_y^{(n)} &= (\lambda + G) e_{,y}^{(n)} + G \mathcal{F}^2 v^{(n)} + (n+1) \lambda w_{,y}^{(n+1)} \\ \Gamma_z^{(n)} &= (\lambda + 2G) \mathcal{F}^2 e^{(n)} + (n+1) \lambda \mathcal{F}^2 w^{(n+1)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

上述の代表的な2つの理論において本節の  $u^{(0)}, v^{(0)}, w^{(0)}$  が (1) の  $u_0, v_0, w_0$  に、また本節のそれ以上の次数の変位係数の項が (1) においては  $w_0$  と断面力としての  $Q_x, Q_y, M, N$  および外荷重  $p$  の組み合わせられた (面内座標での偏微分を含む) 形のものにそれぞれ対応することになる。

なお、以上のほかにもいくつかの代表的な2次元化理論式が散見されるが、それらについての詳細な比較検討は著者らの別の文献<sup>15)</sup>に譲りここでは省略する。

### 3. 数値計算例

#### (1) 正弦分布荷重を受ける単純支持矩形板<sup>15)</sup>

まずいくつかの代表的な2次元化平板理論を取り上げ、Fig. 3 に示すような板上表面 ( $z = -h/2$ ) に正弦分布の鉛直荷重:

$$p = p_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \dots\dots\dots (30)$$

が作用する全周辺単純支持の矩形板の解析を行い、各理論による応力、変位、断面力に対する計算結果を比較することによってそれぞれの理論の精度を明らかにする (主として各理論間の精度比較を目的とすることから計算例の提示は正方形 ( $a=b$ ) でポアソン比  $\nu=0.25$  の場合に限定している)。

なおここでは、板厚と辺長の比がかなり大きな値の範囲についても検討を行うが、その理由は次のようである。すなわち後述する等分布荷重あるいは、本論文では割愛したが、部分分布ないし集中荷重状態に対して、これらを Fourier 級数で展開した形で計算を実行する際には、数

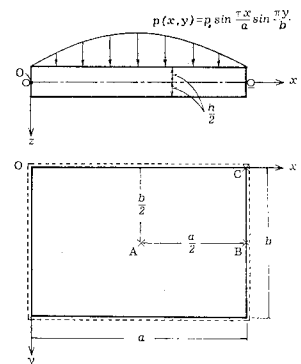


Fig. 3 Simply-supported rectangular plate under sinusoidal normal loading.

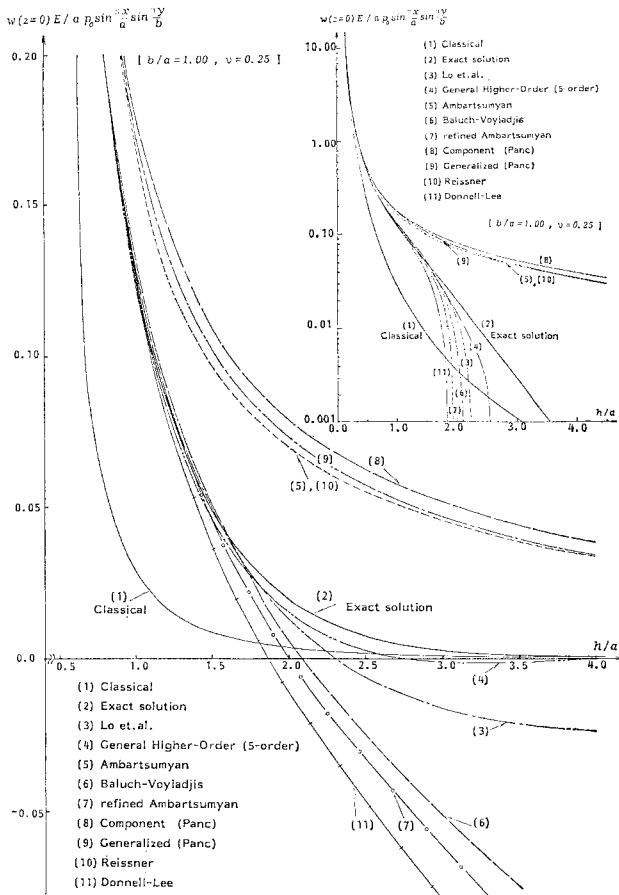


Fig. 4 Midplane displacement  $w$  of square plate ( $\nu=0.25$ ) by various theories.

値計算誤差の累積とは別の問題として、級数の高次項の荷重成分に対する解析精度が、解の収束性および精度に影響を及ぼすことになる。したがって、そのときの板厚と荷重の周期幅との関係が、ここでの板厚と辺長との関係と同等であるという性質を利用して、たとえば、次の3.(2)の計算例で示されるようなFourier級数型の解における各理論の精度を、その解の構成要素である各次数の項の荷重に対する解析精度を通して、検討しようと考えたことによる。

まず、板中央面 ( $z=0$ ) の  $z$  方向変位 (たわみ)  $w$  を板厚  $h$  と辺長  $a$  との比  $h/a$  を横軸にとり古典理論から厳密解まで含めて合計 11 種の理論による計算結果を示したものが Fig. 4 である。これによれば、古典理論を含むすべての理論値は  $h/a$  が零付近すなわち十分に板厚が薄い場合には当然のことながら一致し、 $h/a$  が大きくなるに従って右下がりの曲線となるが、厳密解<sup>9)</sup> および古典解<sup>20)</sup> は正の有限値から零へ向かって単調減少を示す。これに対し General Higher-Order 理論<sup>21)</sup> (G.

H. 理論) のうち  $u^{(5)}$ ,  $v^{(5)}$ ,  $w^{(4)}$  までの項を採用した場合 (これを 5-order と名付ける。したがって Lo らの理論<sup>26)</sup> は 3-order の支配式が示されていることに相当する。以下 G.H. 理論としては 5-order の場合に限定して数値計算結果を示す) は  $h/a \approx 2.5$  でいったん、負の値となり  $h/a \approx 4.0$  程度で再び零の値へ近づくとさらに  $h/a$  が大きくなると正側の値となって漸増する。

修正 Ambartsumyan 理論<sup>14)</sup> (修正 A-理論)、B-V 理論<sup>16)</sup>、Donnell-Lee 理論<sup>29)~32)</sup> (D-L 理論) の各理論では  $h/a \approx 1.5$  までは厳密解とほぼ同一の値をとるが、それを越えるとともに過小の値を示し、2.0 前後で負の値をとるようになって差異が大きく生じる。他方 Reissner 理論<sup>1)</sup>、Ambartsumyan 理論<sup>18)</sup> (A-理論) および Panc の Component 理論<sup>33)</sup> (C-理論)、一般化理論<sup>33)</sup> (G-理論) は  $h/a=0.4$  付近まで厳密解と同じ値を示すが、それを越えるときかなりの差異を伴ったまま、零の値へと漸近してゆくことを示している。この図では  $h/a$  が十分大きくなると厳密解と古典解が一致するという一見奇妙な傾向を示しているが、これは板中央面のたわみについてのみの比較であることにもその原因があると考えられる。

面内の直応力 (曲げ応力) の最大値  $\sigma_x \max$  (板上表面  $z=-h/2$  における  $\sigma_x$  の値で、中央点 A ( $x=y=a/2$ ) に生じる) の板厚比  $h/a$  の変化に対する計算結果を Fig. 5 に示すが、これによると古典理論、厳密解を含む各理論に対する値

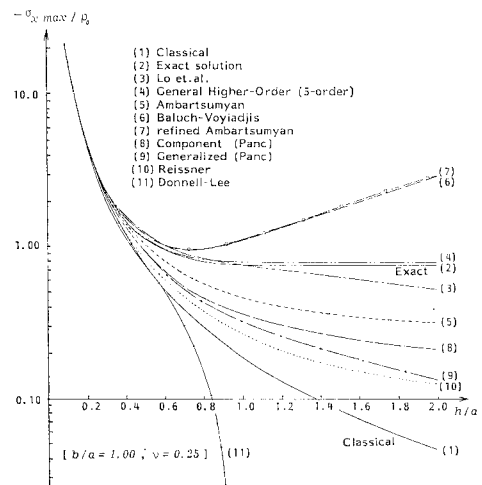


Fig. 5 Maximum bending stress  $\sigma_x$  of square plate ( $\nu=0.25$ ) by various theories.



は  $h/a \approx 0.1$  までは同一線上にあり、これより大きな  $h/a$  の値になると差異が生じ始める。すなわち厳密解では  $h/a \approx 1.0$  で一定値に収束し、これより大きな  $h/a$  に対してもほとんど変化しない。これとほぼ同様の傾向を示すのが G.H. 理論で、やはり  $h/a \approx 1.0$  付近で厳密解より少し大きな値に落ち着く。一方これら以外の各理論では修正 A-理論、B-V 理論、D-L 理論を除き  $h/a$  の増大とともに減少してゆき、その減少率は漸次小さくなってはいるもののまだ一定値にはならず  $h/a \approx 2.0$  で古典論を最低値として各理論は厳密解との中間の値をとる。他方、修正 A-理論および B-V 理論はともに  $h/a \approx 0.7$  で最小値をとり、以後増大の傾向を示す。D-L 理論での値は古典理論の値と交差する  $h/a \approx 0.55$  で変曲点をもち、その後  $h/a$  の増加とともに急激に減少する。

板の隅角部の位置 C での面内せん断力  $N_{xy}$  の値を板厚比  $h/a$  の変化に対して示したものが Fig. 6 である。これによると  $N_{xy}$  の厳密解は  $h/a \approx 2.0$  で一定値に収束し、その後の変化はないが、各近似理論の中では G.H. 理論が最もよい精度を与え  $h/a \approx 1.0$  まではほぼ厳密解に一致し、その後  $h/a$  の増加とともに厳密解から徐々に離れ、小さめの値となる。Loらの理論も G.H. 理論とほぼ傾向的には同様であるが、精度はかなり落ち  $h/a \approx 0.8$  で厳密解から離れていっている。A-理論、修正 A-理論、B-V 理論はまったく同一の値を示し直線変化で増大するため  $h/a \approx 0.5$  までは、上述の各理論と一致するが、その後急激に差が増大し大きな値を示す。これらに対し古典論を含めた他の理論は面内せん断応力  $\tau_{xy}$  が中央面に対し逆対称となるため、その合力である面内せん断力  $N_{xy}$  は零すなわち生じないことになる。

(2) 等分布荷重  $p_0$  を受ける単純支持矩形板

前節と同じ平板の上表面 ( $z = -h/2$ ) に鉛直下向きの等分布荷重  $p_0$  が板全面に作用する最も基本的な問題を取り扱うことにする。この問題の解析手法としては、一

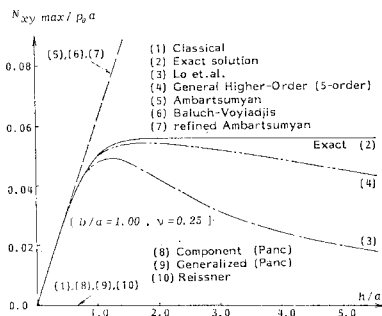


Fig. 6 Solutions of in-plane shear force  $N_{xy}$  at the corner C of square plate ( $\nu=0.25$ ).

般的に非同次型の偏微分方程式で与えられる支配式を直接に同次解と特解の重ね合わせとして一般解を構成させて解くものと、いま一つは前節に示した (30) の荷重系と類似な荷重の重ね合わせ、すなわち

$$p = \sum_m \sum_n a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$a_{mn} = \frac{16 p_0}{\pi^2} \cdot \frac{1}{mn}, \quad (m, n=1, 3, 5, \dots)$$

..... (31)

として荷重を構成し、各項が特解であるとともに必要な境界条件をすべて満足する一般解でもあるような前節で求めた型の解の重ね合わせにより、いわゆる Fourier 級数型の解を得るものがある。前者の手法は一般に解を得ることが容易でないため実用上、後者の手法によって計算を実施するのが通例となっている（なお、古典平板理論における Levy 型の解法<sup>20)</sup>も片側 Fourier 展開を実施する点で、これも上述の議論の範ちゅうに含まれると考えてよい）。

したがって、後者の手法による際には必然的に各項を形成する荷重の周期幅と板厚  $h$  の比  $m\pi h/a$  および  $n\pi h/a$  は次数  $m, n$  の増大とともにきわめて大きな値となり、求めようとする力学量の収束性と精度が問題となる。このことを各理論式に対して具体的な数値例によって検討しようとするものが本節での主眼である。

まず、作用荷重分布と (31) の Fourier 級数の  $m, n$  次の項  $\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$  に対し計算上用いる  $m, n$  の最高次の採用数（それぞれ  $m_0, n_0$  とする）との関係を示したものが Fig. 7 である。ここでは次数  $m_0 (= n_0)$  として最高 101 次までとったが、それらのうち代表的ないくつかの次数に対する結果が示されている。図にみるように、採用次数が隣り合うもの（たとえば 9 次と 11 次）では、分布形の形が厳密解 ( $p = \text{一定の線}$ ) を中心にしてそれぞれほぼ上下方向に変動することに注目する必要がある。

Fig. 8 は  $a/b=1.0, \nu=0.25$  で  $h/a$  が 3 種類に変化

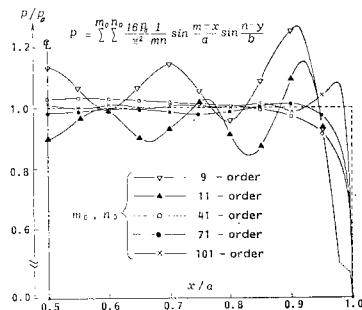


Fig. 7 Variation of loading distribution with change of adopted order  $m_0=n_0$  for Fourier series (31).

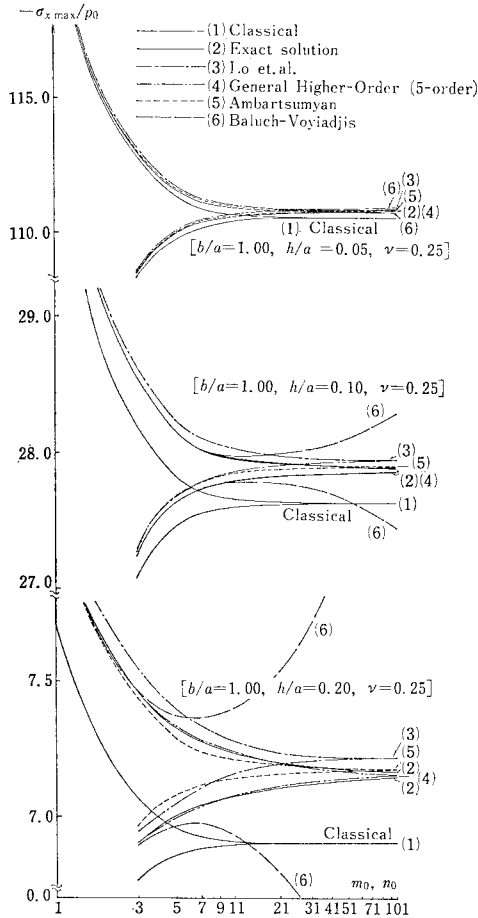


Fig. 8 Convergence of bending stress  $\sigma_x$  at upper surface of the center A of square plate ( $\nu = 0.25$ ) with varying parameter  $h/a = 0.05, 0.10$  and  $0.20$ .

した場合の曲げ応力  $\sigma_x$  の中央点 A ( $x=y=a/2$ ) の板上表面 ( $z=-h/2$ ) での値に対する、項数の増大による収束状況を示したものである。この図では厳密解から古典解までの 6 種類についての類似結果が示されているが、周知のように採用次数の増大につれて上下から交互に正解へと収束していつている（なお注意すべきことは採用次数  $m_0$  は正整数であって一般的な実数ではないのであるから、本来図中では  $m_0$  の整数の軸上に値をもつものであって、その間には実際には値があるわけではない。したがって厳密には整数  $m_0$  の軸上に離散的な値のみがプロットされているのが正しいが、ここでは多数の理論値の結果が錯綜して判別しにくいことを避けるために便宜的に一つの曲線でそれらの理論値の収束状況を表現することとした。以下同じ）。図にみるように板厚が薄い場合には次数を 20 次（したがって項数としては 10 項）程度までとれば古典解を下限値としてどの理論もほぼ一定値に収束しているが、板厚比  $h/a$  が 0.20 の場合、

B-V 理論<sup>19)</sup>を除き厳密解<sup>9)</sup>のまわりに G.H. 理論<sup>21)</sup>, A-理論<sup>18)</sup>, Lo らの理論<sup>20)</sup>の順序で収束することが認められる。一方 B-V 理論は次数が 9 以上になると採用次数の増大につれて解が発散現象を呈するという挙動が観察されるのは注意すべきである。これは先の Fig. 5 にみたように単項正弦分布荷重に対して  $h/a$  が大きくなると曲げ応力が厳密解に比し大きい方向へ急激に発散することに起因している（したがってここには示されていないが、修正 A-理論<sup>14)</sup>に対する結果も同様の挙動を示すものと予想される）。この原因を式の上でみてみると、B-V 理論における  $u$  および  $\sigma_x$  では、 $\epsilon_z$  の影響が考慮された形となっているが、これは具体的には  $\sigma_z$  と  $M, N$  とで構成されており、 $\sigma_z$  は (1) でみたように Reissner タイプの 3 次関数分布となっているために、 $u, \sigma_x$  の式中には  $z^2 p, xx$  などの項が現われる ((6) および (7) 参照)。しかるに、これらの項は板厚  $h$  の増加とともに他の項に比して急激に増加する傾向を示し、 $u, \sigma_x$  の発散の原因となるのである。なぜなら厳密な  $\sigma_z$  の分布形は板厚の増加に伴い板厚方向の 3 次関数分布から離れ荷重載荷表面で荷重とつり合い、内部へ向かうと急激に零に近づくような分布であって、 $\epsilon_z$  に対する  $\sigma_z$  の寄与は板厚の増加とともに減少していくのが普通だからである。このため Reissner タイプの  $\sigma_z$  の仮定（したがって面外せん断応力  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  の仮定）をそのまま用いて求めた  $\epsilon_z$  はある程度以上の板厚では誤差を含むことになり、その影響が  $z^2 p, xx$  等の形で  $u, \sigma_x$  に現われ、これらの精度を低下させる原因となっているのである。したがって、せん断変形とともに板厚方向の直応力  $\sigma_z$ , 直ひずみ  $\epsilon_z$  を考慮する B-V 理論および修正 A-理論は板厚が厚くなった場合の取扱いに十分注意しなければならない。なお、この図からもわかるように、またその他のいくつかの力学量の場合もそうであるが、このように級数展開した結果が交互に変動しつつ収束する傾向を示すものについて、目的とする分布荷重に対する、よりよい結果を効率的に推定するにはその計算値の差があまり小さくなる程度までの項数を採用し、採用項数が隣り合うものについて計算した結果を平均化してやるのがきわめて有効である。

Fig. 9 は  $h/a = 0.20$  のものに対する中央点 A ( $x=y=a/2$ ) の中央面 ( $z=0$ ) でのたわみ  $w$  および端点 C での  $u_{max}$  の収束状況を図示したものである。 $w$  に対しては B-V 理論も一樣に収束していくが、 $u_{max}$  の方はきわめて少ない項数付近ですでに発散することを示している。

(3) 円孔を有する無限板の曲げ

ここでの例は Reissner がせん断変形理論<sup>1)</sup>を提案し

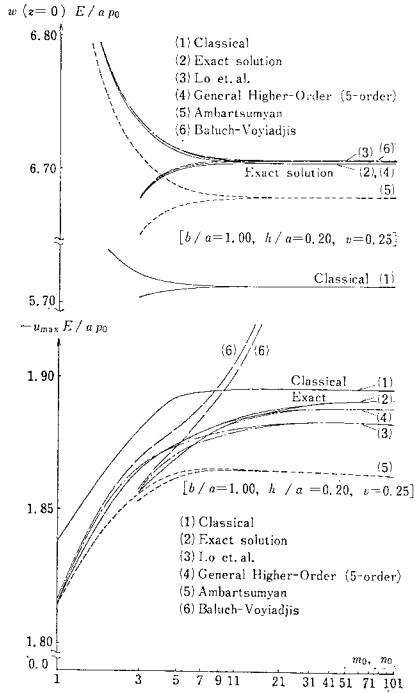


Fig. 9 Convergence of displacement  $w$  at midplane of the center A and in-plane displacement  $(u)_{max}$  at the corner C of square plate ( $\nu=0.25$ ) with  $h/a=0.20$ .

実際に、その例証の一つとして採用したもので従来の古典理論<sup>35)</sup>では集中度が孔径  $2a$  と板厚  $h$  の比  $2a/h$  に無関係な値となっていたものに対し、 $2a/h$  の減少とともに応力・断面力集中度とも増大することを示したが、その結果は光弾性実験による Drucker の結果<sup>36)</sup> と定性的に一致するものであった。その後さらに、この問題に対する 3 次元弾性論による厳密解<sup>37)</sup>が求められ、その解析結果の妥当性、有効性が証明された。しかしながら、それによれば断面力としての曲げモーメント集中度の精度ほどには曲げ応力  $\sigma_\theta$  の最大値(集中度)の精度はよくならず厳密解に比して Reissner 理論は約 10% 程度の差異が生じることが指摘されていた。Reissner は 1975 年の論文<sup>19)</sup>においてこのことを再び取り上げ、理論の改良をはかり曲げ応力  $\sigma_\theta$  の最大値においても弾性厳密解にきわめて近い結果が得られる修正理論を提案した。なおこの種の問題に関連した文献としては Lee-Conlee<sup>38)</sup>, Van Der Heyden<sup>39)</sup>, Cheng<sup>40)</sup> および Donnell<sup>13)</sup> のものが列記できる。ここでは 2. (1) で示した B-V 理論<sup>16)</sup>による結果と上述の文献に示された結果のうち数値の示されているものとを比較し、その精度検討の一資料にしたい。この理論を取り上げる理由は  $M, N$  の項を無視すれば形式的に Reissner の提案した改良理論<sup>19)</sup>に一致することのためでもある。まず B-V 理論を円柱座標系へ変換する必要があるが、その詳細は紙面の都合上割愛

し、それらの式においていくつかの係数の消えないし置き換えをしてやれば Reissner 理論, Ambartsumyan 理論の円柱座標系での式に一致することを指摘しておくにとどめる。いまの問題では板上下表面には荷重が作用せず一軸曲げの状態であるので場を支配する方程式は次式のようなになる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 w_0 &= 0 \\ Q_r - \frac{h^2}{10} \left\{ \nabla^2 Q_r - \frac{1}{r^2} (Q_r + 2Q_{\theta,\theta}) \right\} &= -D(\nabla^2 w_0)_{,r} \\ Q_\theta - \frac{h^2}{10} \left\{ \nabla^2 Q_\theta - \frac{1}{r^2} (Q_\theta - 2Q_{r,\theta}) \right\} &= -D/r(\nabla^2 w_0)_{,\theta} \\ M &= -(1+\nu)D\nabla^2 w_0 \end{aligned} \right\} \dots (32)$$

なおこの場合、面内挙動に関する支配式は後出の境界条件式 (35) を設定するために、すべて消失されて現れない。Reissner<sup>1)</sup> に従って円柱座標系のせん断力  $Q_r, Q_\theta$  に対する応力関数：

$$Q_r = \frac{1}{r} \chi_{,r}, \quad Q_\theta = -\chi_{,r} \dots (33)$$

を導入すると、この問題に対する  $w_0$  および  $\chi$  は次のように設定することができる。

$$\left. \begin{aligned} Dw_0 &= E_0 + F_0 \ln r + A_0 * r^2 \\ &+ \cos 2\theta \left( E_2 r^2 + F_2 r^{-2} - \frac{1}{4} B_2 \right) \\ \chi &= \sin 2\theta \{ B_2 r^{-2} + D_2 K_2(\xi) \}, \quad \xi = \frac{\sqrt{10}}{h} r \end{aligned} \right\} \dots (34)$$

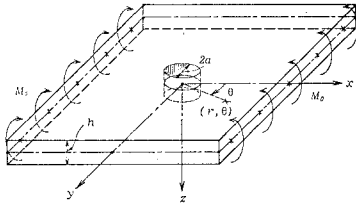
ここに、 $K_n(\xi)$  は第 2 種の変形ベッセル関数である。

これから (33) および円柱座標系に変換した B-V 理論の断面力および応力の一般式を用いて、それらのおおの値を求めることができる。

さて、Fig. 10 に示すように孔径に比し十分遠方の  $x$  軸に直な断面に一軸曲げモーメント  $M_0$  のみが作用し、孔縁においては半径  $r$  に関与する断面力の作用がないという条件を設定すると、次のような境界条件式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \frac{1}{2} M_0 (1 + \cos 2\theta) \\ M_{r\theta} &= \frac{1}{2} M_0 \sin 2\theta \\ Q_r &= N_r = N_{r\theta} = 0, \\ M_r = M_{r\theta} = Q_r = N_r = N_{r\theta} &= 0, \text{ at } r = a \end{aligned} \right\} \text{ at } r = \infty \dots (35)$$

なお、Reissner 理論<sup>1)</sup>, Reissner の改良理論<sup>19)</sup>にあっては面内の断面力の項  $N_r, N_{r\theta}$  は存在しないから上式のそれぞれ最初の 3 つが境界条件として用いられ、古典理論<sup>35)</sup>では  $M_r$  および  $M_{r\theta}$  と  $Q_r$  とを組み合わせた 2 つが境界条件式となる。この条件から係数を定めると



**Fig. 10** Uniformly distributed bending moment  $M_x=M_0$  parallel to the  $y$ -axis and far from the circular hole.

**Table 4** Numerical values of concentration factors of bending moment and stress at location  $r=a$  and  $\theta=90^\circ$  with  $\nu=0.25$ . ( $\nu=0.25$ )

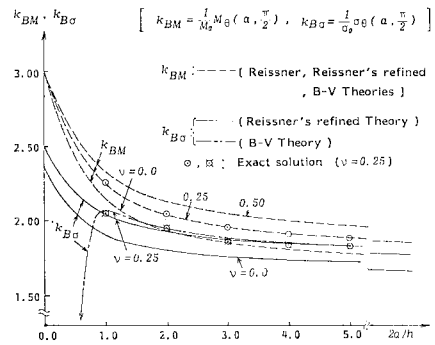
$2a/h$	$k_{BM}=(M_\theta)_{\max}/M_0$			$k_{B\sigma}=(\sigma_\theta)_{\max}/\sigma_0$				
	Exact	Reissner-Reissner's refined, B-V.	Cheng	Exact	Reissner	Reissner's refined.	B-V	Cheng
0.0	—	3.000	3.000	—	3.000	2.493	—	—
0.5	—	2.505	—	—	2.505	2.186	(1.884)	—
1.0	2.268	2.243	2.245	2.052	2.243	2.038	2.060	1.863
2.0	2.045	2.038	2.040	1.938	2.038	1.922	1.950	1.881
3.0	1.960	1.956	1.957	1.865	1.956	1.875	1.877	1.856
4.0	1.914	1.912	1.913	1.841	1.912	1.850	1.857	1.839
5.0	1.896	1.885	1.885	1.830	1.885	1.835	1.839	1.827
$\infty$	1.769	1.769	1.769	1.769	1.769	1.769	1.769	1.769

最終的に次式の結果が得られる。

$$\left. \begin{aligned}
 A_0^* &= -\frac{M_0}{4(1+\nu)}, \quad F_0 = -\frac{a^2}{2(1-\nu)} M_0, \\
 B_2 &= \frac{a^2}{\Gamma} M_0 \cdot K_2 \left( \frac{\sqrt{10}}{h} a \right), \quad D_2 = -\frac{M_0}{\Gamma}, \\
 E_2 &= -\frac{M_0}{4(1-\nu)}, \\
 F_2 &= \frac{a^2}{12(1-\nu)} \cdot \frac{M_0}{\Gamma} \left\{ \left( \frac{9-3\nu}{2} - \frac{3\nu}{10} \cdot \frac{h^2}{a^2} \right) \cdot K_2 \left( \frac{\sqrt{10}}{h} a \right) - 3 K_0 \left( \frac{\sqrt{10}}{h} a \right) \right\}, \\
 \Gamma &= \frac{1+\nu}{2} K_2 \left( \frac{\sqrt{10}}{h} a \right) + K_0 \left( \frac{\sqrt{10}}{h} a \right).
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

したがってこれらの値を断面力および応力的一般式に代入すればそれらのすべてが求められることになる。

以上に求められた結果に対して、孔径と板厚の比  $2a/h$  を横軸にとりポアソン比  $\nu$  をパラメーターとして孔縁上の  $\theta=90^\circ$  の位置で生じる  $M_\theta, \sigma_\theta$  の最大値の、作用荷重との比  $k_{BM}=M_\theta/M_0, k_{B\sigma}=\sigma_\theta/\sigma_0, (\sigma_0=6M_0/h^2)$  の値を図示すると **Fig. 11** のようになる。まず実線で示した断面力量としての  $k_{BM}$  は Reissner 理論<sup>1)</sup>、Reissner 改良理論<sup>19)</sup> および B-V 理論<sup>16)</sup> においてまったく同一の結果を与える。3次元弾性厳密解<sup>27)</sup> および Cheng の結果<sup>49)</sup> (ともに  $\nu=0.25$  の場合) もほぼ等しい結果を与えているが、図中には厳密解による結果を◎印で示した。Reissner 理論、Reissner 改良理論、B-V 理論、Cheng 理論はともに  $2a/h$  が零すなわち孔径がきわめて小さくなるとポアソン比  $\nu$  に依存せず 3.0 の値へ収束することを示している。逆に  $2a/h \gg 1$  すなわち孔径が十分大きくなると  $k_{BM}=k_{B\sigma}=(5+3\nu)/(3+\nu)$  となり  $\nu$  に依存するが、この結果はもちろん古典理論による結果<sup>35)</sup> と一致するものである (**Table 4** には  $\nu=0.25$  に対してその具体的な数値結果が示されている)。また図中の実線および点線は  $k_{B\sigma}$  の値を  $\nu$  をパラメーターとして示したものであるが  $\nu=0$  の場合 Reissner 改良理論と B-V 理論の結果は完全に一致する。ポアソン比  $\nu$  が変化するとそれらの間に差異が生じ、



**Fig. 11** Concentration factor of bending moment  $M_\theta$  and stress  $\sigma_\theta$  at location  $r=a$  and  $\theta=90^\circ$  with parameter  $\nu$  along the thickness-diameter ratio  $h/2a$ .

特に  $2a/h$  が 0.75 より小さくなると B-V 理論の結果は急激に変化することを示している。 $\nu$  がこれ以外の有限値の場合もほぼ同様の傾向が指摘できる。 $\nu=0.25$  の場合には厳密解による計算結果 (◎印) もプロットされている。なお、**Table 4** にもその具体的な数値結果が示されているが、これらの結果をみると Reissner 改良理論が最も信頼できる精度を保有していることが推察される。

**Fig. 12** は同様の荷重状態で  $\nu=0.25, 2a/h=1.0$  の孔径比の場合の孔周辺部の応力、断面力の変化について Reissner 改良理論および B-V 理論について示したものであるが、**Fig. 12** は  $2a/h=1.0$  の結果からもわかるとおりこの程度の孔径比  $2a/h$  では両理論の間にはほとんど差異がなく、孔縁より内部に入った位置 ( $r > a$ ) においてもそのことが指摘できる。この結果は円孔を有する無限板 (Sheibe) に一軸引張荷重が作用するいわゆる Kirsh 問題における分布形状<sup>41)</sup> とほぼ対応するものとなっているが、応力集中度はやや小さめの値として算出されることを示している注3)。

なお図中の  $y$  軸上の応力  $\sigma_r, \sigma_\theta$  の分布のうち  $\sigma_r$  は  $r=a$  の境界で零とはならず、有限値となっているが、

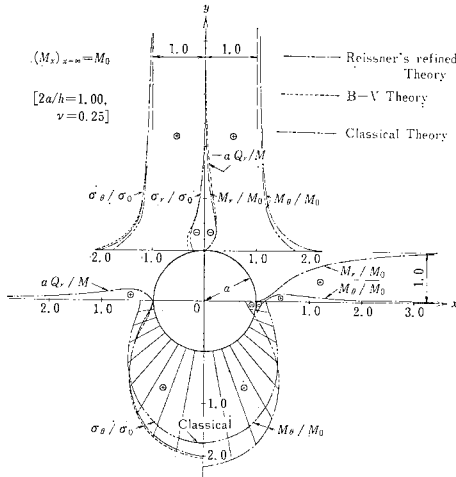


Fig. 12 Distribution of stresses, shear forces and moments along the  $x$ -,  $y$ -axis and the circumference of circular hole with  $\nu=0.25$  and  $h/2a=1.0$ .

これは円孔境界での境界条件として (35) を採用したことによるものである (もし、孔縁の  $|z| \leq h/2$  全範囲で完全に応力自由の状態 ( $r=a$  で  $\sigma_r = \tau_{r\theta} = \tau_{rz} = 0$ ) の境界条件はここで対象としているような 2 次元化した平板理論では厳密に満足させられない)。また、無限遠で純ねじり  $M_{xy} = M_0$  が作用する場合には  $M_x = M_0$ ,  $M_y = -M_0$  として上述の結果の適当な重ね合わせによって所要の結果を求めることができるが、ここでは省略する。

#### 4. 結 言

板厚方向の応力、ひずみの成分を含む 2 次元化平板理論のうち代表的な Baluch および Voyiadjis の理論 (B-V 理論) と著者らによる変位仮定に基づく General Higher-Order 理論 (G.H. 理論) の概要を述べ、それらの理論を特殊化したものが、従来までのいわゆる“せん断変形を考慮した平板理論”となることを示すと同時にいくつかの形状の平板問題に古典論から厳密解までを含めて 10 種以上の理論について数値計算を実行し、それらの精度特性について検討し次のような結果を得た。

(1) B-V 理論は面外直ひずみ  $\varepsilon_z$  の項をも考慮した理論式であって Reissner 理論、Reissner 改良理論、Ambartsumyan 理論の一種の拡張となっているが、板厚がある程度厚くなったり、Fourier 級数型で解を求め

注 3) 円孔を有する Sheibe 問題で板厚の影響を考慮した 3 次元解には、たとえば Green<sup>42)</sup>, Sternburg & Sadowsky<sup>43)</sup>, 中原・小泉<sup>44)</sup> の文献が列挙できるが、その結果によれば板上下表面上 ( $x = \pm h/2$ ) での  $\sigma_\theta$  はここでの傾向と同じように  $2a/h$  の減少とともに 3.0 より小さく ( $2a/h=2.0$  で 2.65,  $2a/h=1.0$  で 2.50 程度に) なることが示されている。

際にはその精度は必ずしも従前のせん断変形理論のそれよりもよいとはいえない。これと同様のことが著者の一人による逐次近似型の修正 Ambartsumyan 理論に対しても指摘できる。

(2) ここで取り上げた 2 次元化平板理論に対して著者らの提案になる General Higher-Order 理論 (G.H. 理論) はその特殊な場合として従来までの変位仮定型理論をすべて包含するものであり、この理論で面内の変位係数  $u^{(n)}$ ,  $v^{(n)}$  として  $z$  に関し 5 次、面外の変位係数  $w^{(n)}$  に対し 4 次まで採用したもの (5-order) はここで対象とした他の平板理論に比較して、考えられる平板の力学量すべてに対し最もよい精度結果を与える。なお変位仮定型理論の中で一つの欠陥であった面外応力成分の精度低下を回避するためにつり合い方程式を通じて求めた補正式の一般式についても提示した。

(3) 無限遠において曲げないしねじり荷重が作用する板内の円孔周縁部の曲げモーメント集中率は Reissner 理論、Reissner の改良理論、Ambartsumyan 理論および B-V 理論は  $2a/h$  の全範囲にわたってまったく同一の結果を与るとともに孔径・板厚比  $2a/h$  の十分小さい範囲においてもきわめて良好な結果を与える。曲げ応力集中率については  $2a/h$  の全範囲にわたって Reissner の改良理論は非常に精度のよい結果を与える。B-V 理論は  $2a/h=1.0$  程度まではほぼ Reissner の改良理論の結果とほとんど同じであるが、 $2a/h$  が 1.0 よりさらに小さくなった場合には精度の低下が著しい結果となると推察される。

なお、今後 G.H. 理論の実用的な適用性を検証する意味で、さらに数多くの荷重、境界条件における各種平板理論との比較検討が必要である。

#### 参 考 文 献

- 1) Reissner, E. : The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, Jour. Appl. Mech., pp. A 69~A 77, 1945; On the theory of bending of elastic plates, Jour. Math. Phys., Vol. 23, pp. 184~191, 1944; On the bending of elastic plates, Quart. Appl. Math., Vol. 5, pp. 55~68, 1947; On a variational theorem in elasticity, Jour. Math. Phys., Vol. 29, pp. 90~95, 1950; Green, A.E. : On Reissner's theory of bending of elastic plates, Quart. Appl. Math. Vol. 7, pp. 223~228, 1949.
- 2) Mindlin, R.D. : Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, Jour. Appl. Mech., pp. 31~38, 1951.
- 3) Woinowsky-Krieger, S. : Der Spannungszustand in dicken elastischen Platten, Ing. Arch., Vol. 4, pp. 203~226, 1933.
- 4) Green, A.E. : The elastic equilibrium of isotropic plates and cylinders, Proc. Roy. Soc., Vol. A 195, pp. 533~552, 1949.
- 5) Koiter, W.T. and J.B. Alblas : On the bending of cantilever, rectangular plates I~IV, Proc. Koninkl.

- Ned. Akad. Wetenschap, Ser. B, Vol. 57, pp. 250~258, pp. 259~269, pp. 549~557, 1954, Vol. 60, pp. 173~181, 1957.
- 6) Nomachi, S. : On elastic behavior along simply supported edges of rectangular plates, Mem. Muroran Inst. Tech., Vol. 3, pp. 349~371, 1959.
  - 7) Lee, Y.C. and H. Reissmann : Dynamics of rectangular plates, Int. J. Eng. Sci., Vol. 7, pp. 93~113, 1969.
  - 8) Srinivas, S., A.K. Rao and C.V.J. Rao : Flexure of simply supported thick homogeneous and laminated rectangular plates, ZAMM, Vol. 49, pp. 449~458, 1969.
  - 9) Pagano, N.J. : Exact solution for rectangular bidirectional composites and sandwich plates, Jour. Comp. Mat., Vol. 4, pp. 20~34, 1970.
  - 10) Srinivas, S., C.V.J. Rao and A.K. Rao : An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates, Jour. Sound Vib., Vol. 12, pp. 187~199, 1970.
  - 11) Srinivas, S. and A.K. Rao : Bending vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates, Int. J. Solids Struct., Vol. 6, pp. 1463~1481, 1970.
  - 12) Srinivas, S. and A.K. Rao : Flexure of thick rectangular plates, Jour. Appl. Mech. pp. 298~299, 1973.
  - 13) Donnell, L.H. : Beams, plates and shells, McGraw-Hill, pp. 258~283, 1976.
  - 14) 平島健一・村松正重 : 板厚方向の成分を考慮した平板曲げの理論, 土木学会論文報告集, No. 304, pp. 33~46, 1980.
  - 15) 根岸嘉和・平島健一 : せん断変形を考慮した一連の平板曲げの理論について, 山梨大学工学部研究報告, No. 32, pp. 28~42, 1981.
  - 16) Baluch, M.H. and G.Z. Voyiadjis : Refined theory for the bending of plates, XVth Int. Congr. Theoretical Appl. Mech., Toronto, 1980.
  - 17) Voyiadjis, G.Z. and M.H. Baluch : Refined theory for flexural motions of isotropic elastic plates, Jour. Sound Vib., Vol. 76, pp. 57~64, 1981.
  - 18) Ambartsumyan, S.A. (神谷紀生訳) : 異方弾性板の理論, 森北出版 pp. 19~109, 1975.
  - 19) Reissner, E. : On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation, Int. J. Solids Struct., Vol. 11, pp. 569~573, 1975.
  - 20) Timoshenko, S.P. and S. Woinowsky-Krieger : Theory of plates and shells, McGraw-Hill, pp. 105~179, 1959.
  - 21) Hirashima, K., P.C.Y. Lee and Y. Negishi : General higher-order equations of two-dimensional static and dynamic theories for homogeneous and laminated elastic plates, Proc. 9th U.S. Nat. Cong. Appl. Mech., p. 476, 1982. ; 平島健一・根岸嘉和 : 異方性・層状性を考慮した平板の高次近似理論, 土木学会年次学術講演会概要集, 第1部, pp. 29~30, 1981.
  - 22) Hencky, H. : Über die Berücksichtigung der Schubverformung in ebenen platten, Ing. Arch., Vol. 16, pp. 72~76, 1947.
  - 23) Naghdi, P.M. : On the theory of thin elastic shells, Quart. Appl. Math., Vol. 14, pp. 369~380, 1957.
  - 24) Essenburg, F. : On the significance of the inclusion of the effect of transverse normal strain in problems involving beam with surface constraints, Jour. Appl. Mech., pp. 471~476, 1975.
  - 25) Nelson, R.B. and D.R. Lorch : A refined theory of laminated orthotropic plates, Jour. Appl. Mech., pp. 177~183, 1974.
  - 26) Lo, K.H., R.M. Christensen and E.M. Wu : A high order theory of plate deformation, Jour. Appl. Mech., pp. 663~676, 1977.
  - 27) Lo, K.H., R.M. Christensen and E.M. Wu : Stress solution determination for high order plate theory, Int. J. Solids Struct., Vol. 14, pp. 655~662, 1978.
  - 28) Whitney, J.M. : The effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates, Jour. Comp. Mat., Vol. 3, pp. 534~547, 1969.
  - 29) Donnell, L.H. : A theory for thick plates, Proc. 2nd U.S. Nat. Cong. Appl. Mech., pp. 369~373, 1954.
  - 30) Lee, C.W. and L.H. Donnell : A study of thick plates under tangential loads applied on the faces, Proc. 3rd U.S. Nat. Cong. Appl. Mech., pp. 401~409, 1958.
  - 31) Lee, C.W. : A three-dimensional solution for simply supported thick rectangular plates, Nuclear Eng. Design, Vol. 6, pp. 155~162, 1967.
  - 32) 前出 13) pp. 258~304.
  - 33) Panc, V. : Theories of elastic plates, Noordhoff Int. Pub., pp. 13~356, 1974.
  - 34) 平島健一・根岸嘉和 : 弾性平板の静的・動的解析理論に関する二, 三の考察——Reissner 理論および Mindlin 理論の修正——, 山梨大学工学部研究報告, No. 32, pp. 18~27, 1981.
  - 35) Goodier, J.N. : The influence of circular and elliptical holes on the transverse flexure of elastic plates, Phil. Mag., Ser. 7, Vol. 22, pp. 69~80, 1936.
  - 36) Drucker, D.C. : Discussion of Reissner's paper [1], Jour. Appl. Mech., pp. A 249~A 252, 1946.
  - 37) Alblas, J.B. : Theorie van de drie-dimensionale spanningstoestand in een doorboorde plaat, Dissertation, Amsterdam, 1957.
  - 38) Lee, C.W. and G.D. Conlee : Bending and twisting of thick plates with a circular hole, Jour. Franklin Inst., Vol. 285, pp. 377~385, 1968.
  - 39) Van Der Heyden, A.M.A. : An asymptotic analysis of a plate with a circular hole, N 77-20483, Technische Hogeschool Derft, Derft Univ. Tech., 1976.
  - 40) Cheng, S. : Elasticity theory of plates and a refined theory, Jour. Appl. Mech. pp. 644~650, 1979.
  - 41) Timoshenko, S.P. and J.N. Goodier : Theory of elasticity, McGraw-Hill, pp. 90~97, 1970.
  - 42) Green, A.E. : Three-dimensional stress system in isotropic plate, 1, Phil. Trans. Roy. Soc., Vol. A 240, pp. 561~597, 1948.
  - 43) Sternberg, E. and M.A. Sadowsky : Three-dimensional solution for the stress concentration around a circular hole in a plate of arbitrary thickness, Jour. Appl. Mech., pp. 27~38, 1949.
  - 44) 中原一郎・小泉 堯 : 一軸引張を受ける無限板の円孔周辺応力に及ぼす板厚の影響, 日本機械学会論文集, 第25巻, No. 151, pp. 181~189, 1959.
  - 45) Reissner, E. : A note on bending of plates including the effects of transverse shearing and normal strains, ZAMP, Vol. 32, pp. 764~767, 1981.