

フラットスラブ柱頭部の応力解析

STRESS ANALYSIS OF FLAT SLAB IN RESPECT TO SLAB COLUMN CONNECTION

小 野 一 良*

By Kazuyoshi ONO

1. 緒 言

フラットスラブの応力解析についてはこれまでに多数の論文が発表され、そのいずれも平板の理論を適用してスラブに生ずる曲げモーメントその他を解いている。フラットスラブが一樣な分布荷重を受けるときにはスラブは柱より垂直反力を受け、またスラブの面に水平力が作用する場合には柱からスラブにモーメントが伝達される。これらの反力またはモーメントがスラブと柱との接続部においてどのような形状の分布荷重として伝達されるかは柱の近傍におけるスラブの応力分布を知るうえで重要である。これまでに発表された論文の多くはスラブが一樣な分布荷重を受けたときスラブが柱から受ける反力をこれらの接続部において一樣に分布した荷重とみなしている。

一般にフラットスラブの柱の上部は円錐または角錐面をもつハンチにより拡大されてスラブに接続されており、この部分を柱頭とよんでいる。さらに柱頭とスラブとの接続部ではスラブの厚さを増す場合があり、これを支板と称している。日本建築学会で発行した鉄筋コンクリート構造計算基準¹⁾によれば支板をつけないとき柱頭とスラブとの接続部の半径（または幅の 1/2）は支間の 1/9 以上と規定してそのうえでスラブに生ずる曲げモーメントの計算式を示している。これはスラブが柱より受ける反力の分布に関しては柱の断面積よりむしろ柱頭とスラブとの接触面を重視したとみてよい。

また以上の計算方針とは全然異なり、柱の直上においてスラブには全然変形を生じないとする計算方法もいくつか発表されている^{2)~4)}。この根拠としては実際の構造物について柱の上部におけるスラブの変形を観察した結果によれば変形が認められなかったとされている。しかし、この場合にも柱の上部とは柱の断面積だけを指すの

か、または柱頭を指すのか明示されていない。

Marcus は彼の著書⁵⁾においてフラットスラブが柱頭より受ける反力を柱頭内に一樣に分布した荷重と仮定している。しかしその後の論文⁶⁾においてはフラットスラブを柱頭で支えられた連続ばりともみなして柱頭より受ける反力の分布形状を弾性床上のはりと同様な方法で導き、その結果この反力の荷重強度が柱頭上で中心からの距離にほぼ比例して増加することを示している。これに続いてスラブを両端埋込みばりともみなし、埋込部の近くでははりの断面 2 次モーメントを中間部の 3 倍とすることを提案している。

著者がかつて発表した論文^{7)~10)}においては柱頭における反力の分布形状を柱と共通の中心軸をもつ任意の回転面と仮定し、この回転面の形状については何が適当であるか触れることを避けた。

このほかに柱からスラブに垂直反力と同時にモーメントが作用する場合について柱頭付近の応力分布を実験および有限要素法による応力解析を用いて研究した論文が発表されている¹¹⁾。ただしこの場合にはハンチによる影響は考慮されていない。

以上に述べたごとくこれまでの応力解析においては柱頭上における反力の分布特にハンチをつけた効果に関しては実験的にも理論的にも十分に解析がなされていなかった。よってこの問題についていくらかの実験および計算を行ったのでここにその経過および結果を報告する。

2. 試験片の形状および載荷方法に関する考察

フラットスラブが一樣な分布荷重を受けた場合には柱の周辺では負の曲げモーメントを生じ、スラブの上面には張力を生ずる。柱の列の中心を通る線上に x および y 軸をとり、 x または y 軸に直交してスラブを切断するときこの切断面の単位幅に作用する曲げモーメントをそれぞれ M_x , M_y とし、ねじりモーメントを M_{xy} とする。

* 正会員 工博 金沢工業大学教授

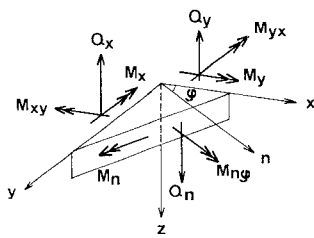


図-1 平板に生ずる曲げモーメント、ねじりモーメントおよびせん断力

x 軸より y 軸に向かって φ なる角度をなす方向を n 軸とすれば n 軸に直交する切断面の単位幅に作用する曲げモーメント M_n およびねじりモーメント $M_{n,\varphi}$ は次式によって計算される。

$$M_n = M_x \cos^2 \varphi - 2 M_{xy} \sin \varphi \cos \varphi + M_y \sin^2 \varphi \dots\dots\dots (1)$$

$$M_{n,\varphi} = (M_x - M_y) \sin \varphi \cos \varphi + M_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \dots\dots\dots (2)$$

一般に M_x, M_y および M_n は柱の近くで負の最大となり、柱から遠ざかるに従って負から正となり、支間の中央で正の最大となる。また同一の支間および荷重でも柱近傍の M_x および M_y の値は柱頭の半径と支間との比および柱頭の形状によって異なるが、柱より離れるに従ってこの影響は急速に減少する。ここでは柱頭の半径と支間との比を0.138とし、スラブが柱頭より受ける反力は柱頭内に一様に分布されると仮定して計算を進めた。 x および y 軸方向の柱の間隔が等しい場合に M_n が同一の値をとる点を結んだ軌跡を図-2の実線で示した。ここに P は1支間上の分布荷重の合計であり、同時に1本の柱が受ける荷重となる。この図に示すごとく柱の中心より $M_n=0$ となる点までの距離は柱の中心を結ぶ線上で支間の0.232倍となり、対角線上で支間の0.250倍となっている。 $M_{n,\varphi}$ の値は図に示していないが、 $\varphi=0, \pi/4, \pi/2$ において0となり、また $M_n=0$ となる線上で $|M_{n,\varphi}|$ の最大値は0.004 P となる。

x 軸および y 軸に直交する断面に作用するせん断力をそれぞれ Q_x および Q_y とし、これらに換算せん断力を加えた値を反力とよび、 \bar{Q}_x, \bar{Q}_y で表わせば

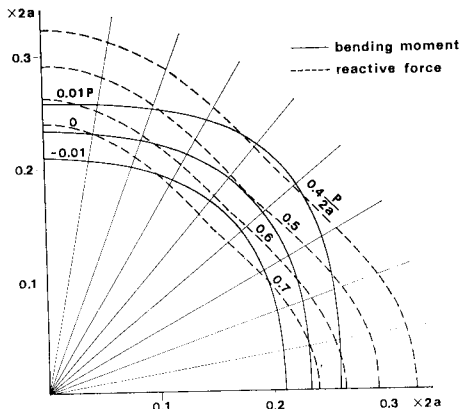


図-2 M_n および \bar{Q}_n の分布

$$\bar{Q}_x = Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \bar{Q}_y = Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \dots\dots\dots (3)$$

となる。 x 軸から y 軸に向かい φ なる角をなす方向に直交する切断面の単位幅に作用する反力 \bar{Q}_n は次式によって計算される。

$$\bar{Q}_n = \bar{Q}_x \cos \varphi + \bar{Q}_y \sin \varphi \dots\dots\dots (4)$$

\bar{Q}_n の同一となる点を結べば図-2の破線のごとくなり、柱中心からの距離は対角線上で最も短い。ただし柱の間隔を $2a$ とする。

以上の考察により曲げモーメントのほぼ0となる線に沿ってフラットスラブより柱を中心にもつ円板を切り取り、この周辺に図-2に示された反力を作用させれば一様な分布荷重を受けたフラットスラブの応力状態に近似させることができると考えられる。図-2によれば曲げモーメント0を表わす曲線上において \bar{Q}_n は0.7 $P/(2a)$ より0.5 $P/(2a)$ に変化しているのでスラブの周辺に加える線荷重の大きさをこのように変化させることが要求される。しかし一般にフラットスラブにおいて鉄筋の配置からみても方向によって剛度の差があり、すべての方向について完全な等方性を期待することができない。また各種の測定の精度および試験方法を考慮するときは円形スラブの周辺に作用する反力の大きさを一定とする方が有利と考えられる。

次に問題になるのは試験片に荷重をかける方法である。円板の上面に一様な分布荷重を加え、同時に円板の周囲から一様な線荷重を加えることは試験機械の構造上困難がある。後の計算例で示すように円板の面に加える分布荷重を省略して試験片の周囲から線荷重を加えるだけでもスラブに生ずる曲げ応力の分布には大きな差を生じない。よって実際の構造物とは上下を逆にして円板の周辺を支持台で受け、柱より垂直荷重を加える方法を採用した。

円板の周辺を環状の支持台で支え、その反力の大きさを一様に分布させるには円板の平面と支持台の面とを完全に適合させることを要し、実際問題としては困難である。よって図-3に示すごとく円板と支持台との接点を12点とし、これを4点ずつ3群に分けた。この各群を図-3の下に示す方法で1支点にまとめ、全体を3点支持とした。この図において△印は支点を表わし、実際上はIビームを用いた。Iビームの腹部の厚さは5mmとしたので上からかかる荷重に不均衡があれば腹部は容易に曲がって荷重をほぼ等しくすることになる。

3. 試験片の製作

柱の直径およびハンチの大きさを変えて数個の試験片を製作したが、その構造を図-4~6に示した。柱のな

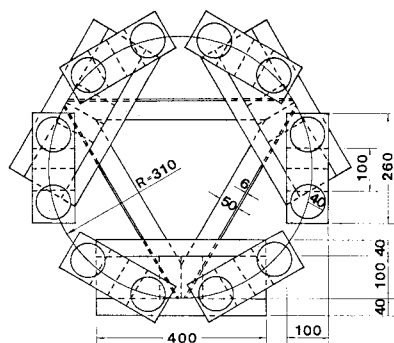


図-3 試験片支持装置

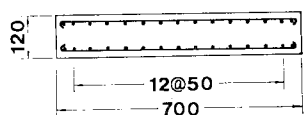


図-4 F型試験片

い平板をF型とよび、ハンチのないフラットスラブをN型とよび、ハンチのある場合をH型とよぶこととする。いずれもスラブの厚さを12cmとし、半径を35cmとし、半径31cmの環状支点で支えることにした。N型およびH型は縦横ともに中心間隔134cmの柱列で支えられたフラットスラブの柱頭付近の荷重状態に相当する。

設計にあたってはF型スラブ中心の半径9cmの円内に合計10tf(98kN)となる等分布荷重を加えた場合に張力側の鉄筋および圧力側のコンクリートがともに許容応力内に入ることを予定して複鉄筋としてD10mmを4または5cm間隔に配置し、かぶりを2cmとした。柱にはD10mmを6または8本配置し、螺旋鉄筋として6mmを使用した。1m³当たりの材料としてセメント330kg、砂964kg、粒径5~10mmの砂利412kg、

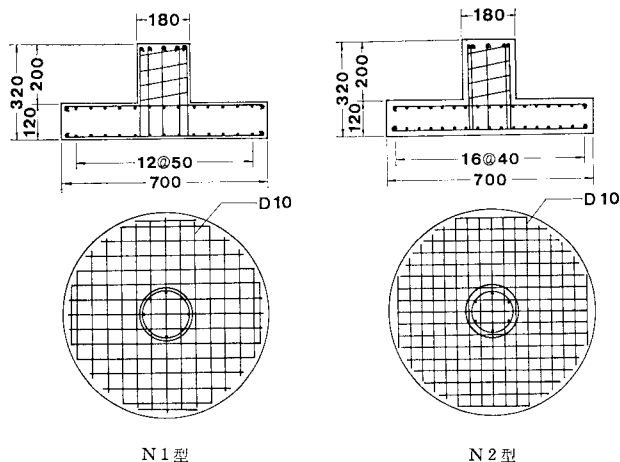


図-5 N型試験片

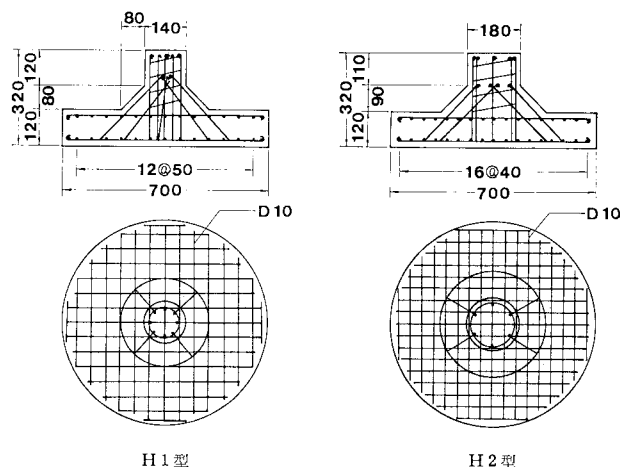


図-6 H型試験片

10~15mmの砂利618kg、水165kgを使用した。

スラブのコンクリート打設と同時に直径15cm、高さ30cmのコンクリート試験片を7個作り、約3か月経過後に圧縮試験および圧裂試験を行った。その結果圧縮強度平均326kgf/cm²(31.95MPa)、引張強度平均28.3kgf/cm²(2.77MPa)を得た。

4. 載荷試験

試験片の張力側に図-7に示すごとくゲージ長さ60mm、ゲージ係数2.13、抵抗120Ωのひずみゲージを貼り付けた。中心部においては3枚のゲージが交差して貼り付けられており、Xと名付けた。また中心から50、100、150mmの位置に6枚ずつのゲージを放射状に貼り付け、A、B、Cと名付けた。さらに中心から100、150mmの位置に6枚ずつのゲージを円周方向に貼り付け、D、Eと名付けた。

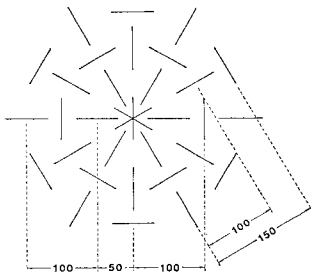


図-7 ストレインゲージ配置図

このようにゲージを貼り付けた面を下にして支持台に載せ、柱の中心部に半径 50 mm の円板を置いて荷重を加えた。荷重を 1 tf (9.8 kN) ずつ増加してその都度ストレインゲージによってスラブに生じたひずみを読み、8 tf (78.4 kN) に達した後荷重を 0 に戻した。このような方法で測定を 3 回繰り返した。これに続いて最高荷重を 10, 12, 15, 18 tf (98.0, 117.6, 147.0, 176.4 kN) とし、同様な方法で測定を繰り返した。いずれもひずみの大きさは荷重にほぼ比例することが認められた。しかしながら中心から等距離にあるゲージで測定したひずみの値は必ずしも一致せず、この間に大きな差を生ずる場合も認められる。この理由としては荷重の増加によってスラブの張力側に亀裂を生じ、この亀裂を横断してゲージが貼り付けられていた場合も考えられる。

一般に実験を繰り返すごとに前回の測定値に比べて同一の荷重に対するひずみが増加した。一例として H2 型試験片に最初に 8 tf (78.4 kN) の荷重を加えたときには測点 A のひずみの平均は 70×10^{-6} となり、その後回も試験を繰り返して、最高 18 tf (176 kN) の荷重に達したときには測点 A のひずみの平均は 275×10^{-6} に達した。コンクリートの弾性係数を $3 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ (29.4 GPa) とすればこのひずみは 82 kgf/cm^2 (8.04 MPa) の張力に相当し、当然コンクリートには亀裂が生じていたとみなければならぬ。これに続いて 8 tf (78.4 kN) の荷重を加えたときには測点 A のひずみは $150 \times$

10^{-6} となり、当初の 2 倍を越えている。実験を繰り返すごとに亀裂が増加したためと考えられる。しかしこのように亀裂を生じた場合でも荷重が 15 tf (147 kN) を越えない限り荷重とひずみとはほぼ比例することが認められた。測定結果によればハンチのある試験片では荷重 8 tf (78.4 kN) 以内の実験を繰り返している限りスラブには亀裂を生じないが、ハンチのない場合には 5 tf (49 kN) を越えれば亀裂の発生が始まるものようである。

次に各荷重段階についてスラブの中心からの距離とスラブに生ずるひずみの平均値との関係を図-8~13 に示した。図-8, 9 は N1, N2 型試験片であるが、測点 X すなわち中心におけるひずみが非常に小さく、測点 A のひずみが急に大きくなることが認められる。図-10 は H2 型試験片であり、中心におけるひずみが小さいこと

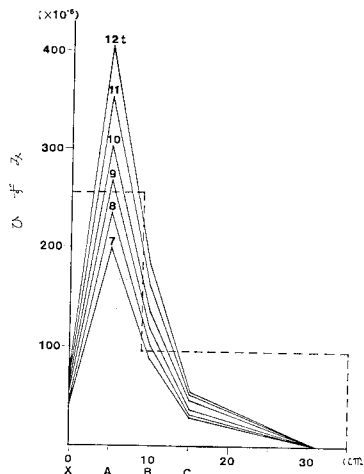


図-8 N1 型試験片におけるひずみの分布

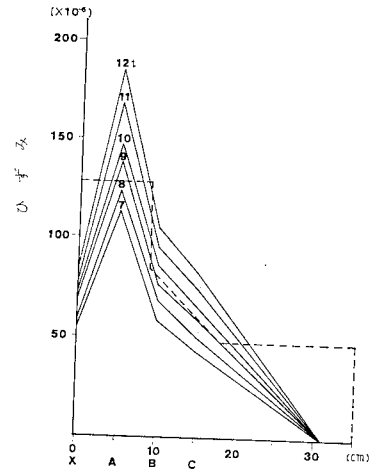


図-10 H2 型試験片におけるひずみの分布

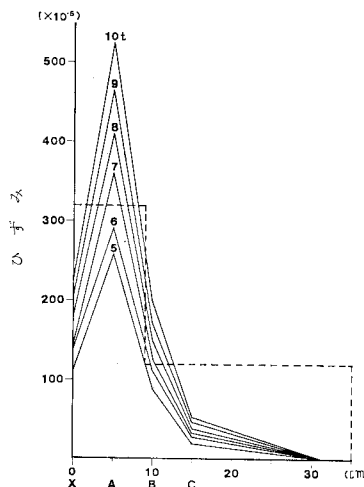


図-9 N2 型試験片におけるひずみの分布

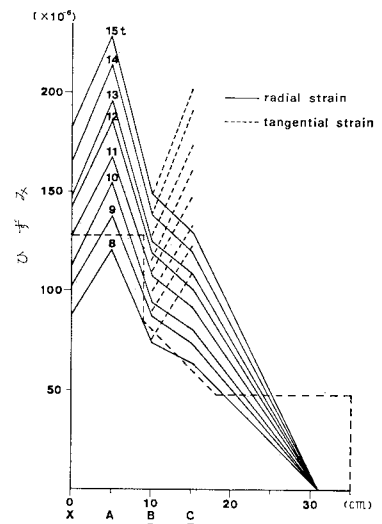


図-11 H2 型試験片におけるひずみの分布

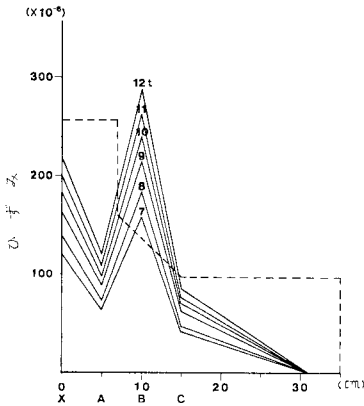


図-12 H1 型試験片におけるひずみの分布

はN型と同様であるが、測点AのひずみがN型の半分以下である。図-11はH2型試験片について半径方向のひずみと円周方向のひずみとの比較を示した図であるが、スラブの中心より150mmの距離における円周方向のひずみが100mmの距離における円周方向のひずみより大きくなっている。図-12はH1型試験片に対する測定結果であるが、これまでの測定結果と異なり、測点X、Bにおけるひずみが大きく、測点Aにおけるひずみが小さい。H1型試験片はH2型およびN型に比べて柱が細く、この影響が現われたと考えられる。図-13はF型試験片であるが、測点Xのひずみが最大を示している。このように試験片の違いによってひずみの分布に大きな差を生ずる理由はスラブに生ずる曲げモーメントの分布およびこの曲げモーメントによって生ずる亀裂の位置と方向によると推定され、後の有限要素法による計算結果と併せて考察を進めることとする。

試験を終わった後にスラブの張力側に生じた亀裂を調べたが、その一例を図-14に示した。亀裂の方向としては放射線または円周方向と認められるものもあるが、方向が定まらないものも多数ある。この図に示した亀裂はスラブ面に明らかに痕跡を残したものであるが、ひずみ測定の結果より推定すればこのほかにも多数の亀裂が発生しているとみななければならない。

5. 有限要素法による応力解析

鉄筋コンクリート構造物に関して有限要素法による応力解析を行うには鉄筋の扱い方とコンクリートに生ずる亀裂が問題になる。その処理方法としては従来次の2方法が採用された。その1つは鉄筋コンクリートはりに適用され、はりの側面を多数の要素に分割して平面応力の

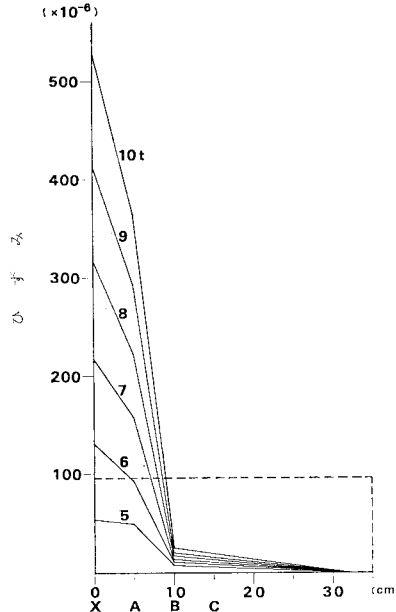


図-13 F型試験片におけるひずみの分布

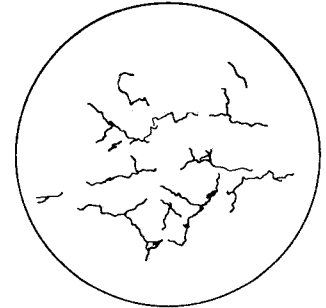


図-14 スラブの張力側に生じた亀裂

問題として取り扱う。鉄筋に関してはコンクリートとは別個の要素とし、鉄筋の要素の節点とコンクリート要素の節点との間にはその間の相対的移動量に比例する力が作用するとみなす¹²⁾。あるいはその力の大きさを相対的移動量の3次式で表わす¹³⁾。はりが曲げを受けるとき

には当初から数か所の亀裂の発生位置を予定してこの亀裂を挟む両隣の要素の節点についてはその変位を別個の値として計算を進める¹²⁾。

第2の方法は平板に適用され、平板上に3角形または4辺形の要素を描く。しかし厚さの方向には分割しない^{11), 14), 15)}。変形に関してはKirchhoffの仮説すなわち変形前に中立面に垂直であった平面は変形後も中立面に垂直な平面を保つと仮定する。したがって板に作用するせん断力によって生ずる変形が考慮されていない。しかし板の張力側に亀裂を生じたときにはその亀裂が進行するに従って順次板の曲げ剛性の値を低下させている。

以上に述べた2方法はいずれも2次元の構造物に対する解法であり、ハンチの作用を考慮に入れてフラットスラブの柱頭付近の応力を解析するには適当ではない。この問題を厳密に解析するためには3次元の構造物として有限要素法を適用しなくてはならない。しかしながらさきに図-2に示したごとく等分布荷重を受けるフラットスラブの柱頭付近における曲げモーメント M_n および反力 \bar{Q}_n の大きさを表わす等高線は柱と共通の中心をもつ同心円に近い。よって等分布荷重を受けるフラットスラブの柱頭付近の応力分布を理論的に解析するにはこれを軸対称構造物として取り扱っても差し支えないと考えられる。次に実験に使用した試験片を対象として有限要素法によって解析を試みることとする。

軸対称構造物に軸対称の荷重が作用した場合の応力解析を有限要素法で行うには軸を含む平面においてこの構造物を多数の3角形または長方形に分割し、このような

断面をもつ環状の要素について節点に作用する力の平衡を論ずるのが通例である。この解析法については多数の教科書に説明されているのでここではこの研究において採用した特殊な方法についてのみ述べることにする。

対称軸を z 軸とし、これと直角に r 軸をとり、これらの方向の変位をそれぞれ u, v とする。3 角形要素とするときには u, v を r, z の 1 次式で表わすのが通例であるが、長方形要素のときにはこれに rz の項が加わる。 z 方向、 r 方向および円周方向のひずみをそれぞれ ϵ_z, ϵ_r および ϵ_θ とし、 rz 平面におけるせん断ひずみを τ_{rz} とすればこれらのひずみは次式によって表わされる。 ϵ_θ の計算式には分母に r が含まれるが、中心軸上においては u が 0 となるので ϵ_θ が無限大になることはない。

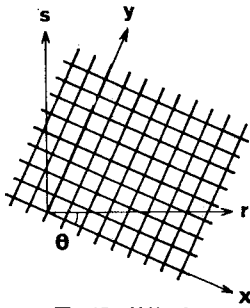
$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_z \\ \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial v / \partial z \\ \partial u / \partial r \\ u / r \\ \partial u / \partial z + \partial v / \partial r \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (5)$$

z 方向、 r 方向および円周方向の応力をそれぞれ σ_z, σ_r および σ_θ とし、せん断力を τ_{rz} とすればこれらの応力は次式により表わされる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \begin{Bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5-2\nu \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_z \\ \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (6)$$

上式はコンクリート中に亀裂を生じない場合に適用されるが、円形スラブの張力側には半径方向に多数の亀裂を発生する場合があります、このときには平面応力の状態になると考えられる。したがって次式が適用される。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_z \\ \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (7)$$



図—15 鉄筋の配置

次にコンクリート要素の間に鉄筋を組み込む方法について考察する。図—4~6 に示すごとく鉄筋はスラブの上下両面に近く、互いに直角をなす 2 方向に配置されていると仮定する。鉄筋の伸びている方向に x 軸および

y 軸をとり、それら 2 方向における鉄筋量を単位幅当たりそれぞれ t_x, t_y とする。 x 軸と r 方向とのなす角を θ とし、 r と直角をなす方向すなわち円周方向を s とする。鉄筋とそのまわりのコンクリートとの間には相対的なずれはないとして x および y 軸方向のひずみをそれぞれ ϵ_x, ϵ_y とし、 xy 平面におけるせん断ひずみを τ_{xy} とするとき、これらは r 方向のひずみ ϵ_r, s 方向のひずみ ϵ_s およびせん断ひずみ τ_{rs} と次の関係にある。

$$\{\epsilon'\} = [S]\{\epsilon\} \dots\dots\dots (8)$$

ただしここに

$$\{\epsilon'\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_s \\ \tau_{rs} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (9)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & -2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \dots\dots\dots (10)$$

鉄筋を代表する要素は厚さをもたない環状の板とし、その節点を 1, 2 とするときこの要素はこれらの節点で隣接する要素に r 方向の力を伝達するだけの作用をもつ。鉄筋を含む平面は鉄筋の方向に関係なく軸対称の変形をすると仮定すれば式 (9) の $\{\epsilon\}$ は節点 1, 2 の r 座標 r_1, r_2 および r 方向の変位 u_1, u_2 を用いて次式により表わされる。

$$\{\epsilon\} = [B]\{\delta\} \dots\dots\dots (11)$$

ただしここに

$$[B] = \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{r_2}{r} - 1 & 1 - \frac{r_1}{r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (12)$$

x および y 方向の鉄筋に作用する引張応力をそれぞれ σ_x, σ_y とすればスラブの単位幅当たりの x および y 方向の鉄筋に作用する引張力は次式で表わされる。

$$\{f'\} = \begin{Bmatrix} t_x \sigma_x \\ t_y \sigma_y \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (13)$$

上式の第 3 行は鉄筋の網によって抵抗できるせん断力が 0 であることを表わしている。鉄筋の弾性係数を E_s とすれば $\{f'\}$ は $\{\epsilon'\}$ または $\{\epsilon\}$ を用いて次式のごとく表わされる。

$$\{f'\} = [D_s]\{\epsilon'\} = [D_s][S]\{\epsilon\} \dots\dots\dots (14)$$

ただしここに

$$[D_s] = E_s \begin{bmatrix} t_x & 0 & 0 \\ 0 & t_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (15)$$

$\{\epsilon\}$ の値は θ に関係なく一定であると仮定しても、 $[S]$ の中には θ が含まれているので $\{f'\}$ の値は θ に

よっていくらかの変動を生ずる。しかし仮想仕事の原理を用いて鉄筋を代表する要素の節点力 U_1, U_2 を計算する過程においては次式に示すごとく θ に関する積分が含まれているのでこの影響は平均化されると考えられる。

$$\{F\} = \int [B]^T [S]^T [D] [S] [B] dA \{\delta\} \dots\dots (16)$$

ただしここに

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (17)$$

式 (16) における積分は鉄筋を代表する要素の全面積について行うことを要し、 dA の代わりに $rdrd\theta$ と置き、 r については r_1 より r_2 までの積分をなし、 θ については 0 から 2π までの積分とする。 $t_x=t_y=t$ と置いて計算した結果次式が得られた。

$$\{F\} = 2\pi t E_s \begin{bmatrix} -1 + \lambda \frac{r_2}{r_1} & -\lambda \\ -\lambda & 1 + \lambda \frac{r_1}{r_2} \end{bmatrix} \{\delta\} \dots\dots (18)$$

ただしここに

$$\lambda = \frac{3 r_1 r_2}{4(r_2 - r_1)^2} \log \frac{r_2}{r_1} \dots\dots\dots (19)$$

要素の 1 端が中心軸上にある場合には $r_1=0, u_1=0$ となるので

$$U_2 = 2\pi t E_s u_2 \dots\dots\dots (20)$$

が得られる。

以上に導いた諸式を用いればコンクリートおよび鉄筋を代表する要素の各節点に作用する力が節点の変位によって表わされるので外力も含めて各節点における力の平衡を表わす連立方程式を作ればこれを解いて各節点の変位を求めることができる。ただし中心軸上の節点の r 方向の変位を 0 と仮定し、また中心軸上の節点においては r 方向の力の平衡を論じないこととする。各コンクリート要素に生ずる応力は各節点の変位より各要素のひずみを求め、式 (6) または (7) によって計算される。

鉄筋を代表する要素について r 方向および s 方向の単位幅当たりに作用する力 f_r, f_s およびせん断力 q_{rs} は次式によって計算される。

$$\{f'\} = [S]^T \{f\} \dots\dots\dots (21)$$

ただしここに

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_r \\ f_s \\ q_{rs} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (22)$$

式 (21) の $\{f'\}$ に式 (14) を代入すれば $\{f\}$ を $\{\epsilon\}$ によって表現できる。また式 (11) によれば $\{\epsilon\}$ は u_1, u_2 によって表わすことができる。しかし $[S]$ は θ の関数であるから $\{f\}$ は θ の関数となる。 θ が 0 から 2π まで変化したときの平均値をとれば $\{f\}$ は次式により表わされる。

$$\{f\} = \frac{E_s t}{4} \begin{Bmatrix} 3 \epsilon_r + \epsilon_s \\ 3 \epsilon_s + \epsilon_r \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (23)$$

特に r 方向および s 方向に一致した鉄筋に生ずる応力 σ_r および σ_s は次式のごとくなる。

$$\sigma_r = E_s \frac{u_2 - u_1}{r_2 - r_1}, \quad \sigma_s = E_s \frac{u}{r} \dots\dots\dots (24)$$

鉄筋と周囲のコンクリートとの間に作用する付着応力 c は r 方向に一致した鉄筋について中心軸より r_1, r_2 および r_3 の距離にある節点の r 方向の変位をそれぞれ u_1, u_2 および u_3 とすれば次式により計算される。

$$c = \frac{E_s d}{2} \begin{vmatrix} 1 & r_1 & u_1 \\ 1 & r_2 & u_2 \\ 1 & r_3 & u_3 \end{vmatrix} \bigg/ \begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_1^2 \\ 1 & r_2 & r_2^2 \\ 1 & r_3 & r_3^2 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (25)$$

上式における d は鉄筋の直径とする。

これまでではコンクリートに半径方向の亀裂が発生する場合についてのみ考慮した。しかし一般にスラブの中心部では半径方向の引張応力が大きいのでこれがある限界を越えれば当然円周方向の亀裂を生ずることも考慮しなくてはならない。亀裂を生じた面をコンクリート要素の境界とするとときコンクリート要素は亀裂を生じた面を通して隣の要素に節点力を伝達することができず、また亀裂を挟んだ両隣の節点変位は異なるとみななければならない。したがって当初はこれらの節点は同一の座標であっても別個の節点として取り扱うこととする。

図-16 に示すごとく最初に中央部に円周方向の亀裂が発生すればこの亀裂を横切る鉄筋は亀裂の近くでコンクリートとの間の付着が切断される。したがってこの亀裂の内側ではコンクリートは収縮し、円周方向の亀裂も半径方向の亀裂も発生しないと考えられる。

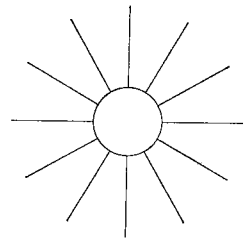


図-16 円周状および放射状亀裂

円周方向の亀裂の外側でもある長さにわたって鉄筋とコンクリートとの付着が切断されるとみななければならない。亀裂を表わす円の外で鉄筋とコンクリートの付着が保たれている最初の節点における移動量を u_2 とすれば鉄筋よりこの節点に式 (20) で示される節点力が作用することになる。したがってこれより中心に近い節点には鉄筋による節点力は全然作用しないことになる。

6. 計算結果と考察

有限要素法による計算に入る前に実験に使用した試験片と同様な寸法の円板について平板理論を適用して応力計算を行った。すなわち円板の厚さを 12 cm, 半径を 35

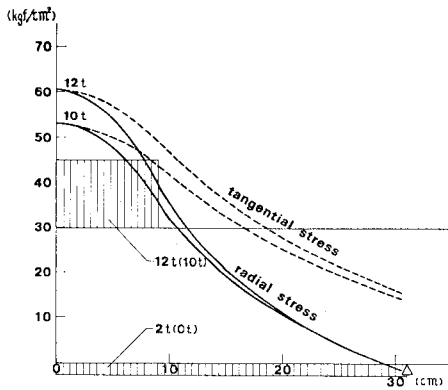


図-17 平板理論によって計算した曲げ応力

cm とし、上下両面より 2 cm の距離に直径 10 mm の鉄筋が 4 cm 間隔に格子状に配置されたとした。荷重としては円板中心の半径 9 cm の円内に 10 tf (98 kN) の荷重が等分布し、これを半径 31 cm の環状支点で支えた場合および 図-17 に示すごとく中央の荷重を 12 tf (117.6 kN) とし、環状支点の内側に 2 tf (19.6 kN) の分布荷重が上向きに作用した場合とを取り扱った。ここに分布荷重の合計を 2 tf とした理由は 図-2 において $M_n=0$ を示す円内の面積はフラットスラブ 1 支間の面積のほぼ 1/6 に相当することに由来する。

コンクリートには亀裂を生じないとしてスラブの下面より 1 cm の深さで円周方向および半径方向に生ずる曲げ応力を計算した結果を 図-17 に示した。図に示すごとくこれらの曲げ応力は円板の中心で一致し、周辺に向かって従って半径方向の曲げ応力は急速に減少して支点付近で 0 になるが、円周方向の曲げ応力はゆっくりと減少して周辺でも 0 にならない。また 2 tf の分布荷重を追加したことにより中央部の曲げ応力は 14% 増加するが、曲げ応力の分布形状はよく似ている。

このような寸法および荷重状態にある円板についてまずスラブには全然鉄筋を含まないとして有限要素法により応力計算を行い、次にさきに述べたと同様な鉄筋を挿入した場合について計算を行った。要素の形状としては 図-18 に示すごとく厚さ 2 cm の長方形要素を用いた場合とこの長方形要素を対角線によって 4 分割した 3 角形要素を使用した場合とがある。スラブ下面中心の要素に

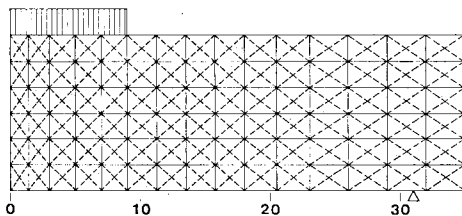


図-18 有限要素法計算に使用した要素の形状

表-1 円板下面中央の要素に生ずる曲げ応力

		鉄筋なし		鉄筋あり	
		kgf/cm ²	MPa	kgf/cm ²	MPa
分布荷重なし	平板理論	67.8	6.64	53.8	5.27
	3角形要素	68.7	6.73	58.3	5.71
	長方形要素	68.2	6.68	57.8	5.66
分布荷重あり	平板理論	77.1	7.55	61.2	5.99
	3角形要素	78.0	7.64	66.2	6.48
	長方形要素	77.4	7.58	65.6	6.43

生ずる曲げ応力とスラブの中立面のたわみとを計算した結果を平板理論による計算結果と比較して 表-1, 2

表-2 円板中心のたわみ

		鉄筋なし		鉄筋あり	
		mm	mm	mm	mm
分布荷重なし	平板理論	0.107 8	0.085 5		
	3角形要素	0.126 4	0.109 7		
	長方形要素	0.126 3	0.109 6		
分布荷重あり	平板理論	0.119 6	0.094 9		
	3角形要素	0.140 9	0.122 4		
	長方形要素	0.140 8	0.122 3		

に示した。ただしコンクリートの弾性係数を 300 000 kgf/cm² (29.4 GPa) とし、ポアソン比を 0.25 と仮定した。

表-1 によれば鉄筋を含まない場合に有限要素法を用いた計算結果は平板理論による結果に比べてわずかに大きい。しかし鉄筋を含む場合には有限要素法によって求めた曲げ応力が平板理論より求めた曲げ応力に比べて約 10% 大きくなっている。表-1 には分布荷重が作用した場合について計算した結果も併せて示されているが、同様な傾向が認められる。このように鉄筋を挿入した場合に曲げ応力の計算値に差の出る原因としては平板理論においては Kirchhoff の仮説を用いるためと推定される。図-19 に変形前と後における長方形要素の比較を示した。この図においては節点移動量の縮尺が要素の縮尺に対して 3 000 倍に拡大されている。鉄筋の外側の要素の変形が急に大きくなっており、鉄筋の外側にある要素に生ずる応力が大きくなったことが了解される。

表-2 によれば有限要素法によって求めたたわみは平板理論によるたわみに対して 30% 近くも大きい場合がある。この原因としては平板理論においてはせん断によるたわみが無視されているためと考えられる。

円板を支持する環状支点の半径を a とし、円板の中心部における分布荷重の作用面の半径を b とし、荷重の合計を P とするとき円板の中心を通る切断面に作用する曲げモーメントの合計 M は次式によって与えられる。

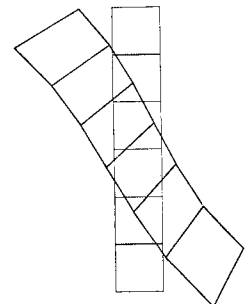


図-19 変形前後における長方形要素の形状

表-3 円板の中心軸を含む断面に作用する曲げモーメント

		鉄筋なし		鉄筋あり	
		kgf·cm	N·m	kgf·cm	N·m
分布荷重なし	理論値	79 580	7 799	79 580	7 799
	3角形要素	76 660	7 513	77 210	7 567
	長方形要素	76 420	7 490	77 000	7 546
分布荷重あり	理論値	88 910	8 714	88 910	8 714
	3角形要素	85 660	8 394	86 270	8 454
	長方形要素	85 400	8 369	86 030	8 431

$$M = \frac{P}{\pi} \left(a - \frac{2}{3}b \right) \dots\dots\dots (26)$$

a=31 cm, b=9 cm, P=10 000 kgf (98 kN) として計算した結果が表-3 に示されている。この表には有限要素法を用いて切断面の各要素に生ずる円周方向の応力を求め、これより切断面に作用する曲げモーメントの合計を求めた結果も併せて示した。有限要素法による計算結果は理論値に比べていくらか小さいが、図-18 に示す程度の分割数で十分の精度をもつことが確かめられた。

これより後は3角形要素のみを用い、円板に柱およびハンチが結合された場合について柱の端部の半径5 cmの円内に10 tf (98 kN) の荷重が作用し、これを周辺の支点で受けるとして計算を進めた。円板の全面に作用する分布荷重の影響については後から追加して考えることができるのでここでは省略した。柱の半径を9 cmとし、ハンチを0, 4.5 または9 cmとした場合にスラブの下面の要素に生ずる曲げ応力の分布を図-20 に示した。柱のない平板に比べて中心付近の曲げ応力の分布が平坦化され、その大きさが非常に軽減されることに注目される。半径9 cmの柱に9 cmのハンチがつけられた場合には柱のないスラブに比べて中心部の曲げ応力が半分以下に軽減されている。柱およびハンチの存在によって中心部の曲げ剛性の増加したことおよび荷重が広く分

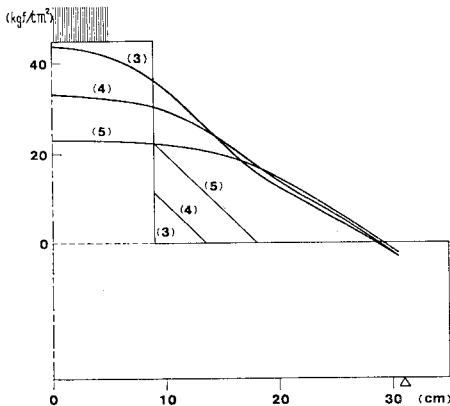


図-20 フラットスラブ柱頭の張力側に生ずる曲げ応力

表-4 フラットスラブの柱頭に等しい曲げ応力を円板に生ぜしめる分布荷重

円板の半径と厚さ	鉄筋	柱の半径 (cm)	ハンチ (cm)	r ₁ (cm)	r ₂ (cm)	λ
R=35 cm R'=31 d=12	D10 mm 4 cm 間隔	9	0	8	12.5	0.3
		9	4.5	10	17	0.25
		9	9	12	23	0.2
R=50 cm R'=46 d=12	D10 mm 4 cm 間隔	9	0	8	12.5	0.1
		9	4.5	10.5	17.5	-0.05
		9	9	13.5	23	-0.25
R=50 cm R'=46 d=18	D10 mm 4 cm 間隔	9	0	8	12.5	0.5
		9	4.5	10	17	0.5
		9	9	12.5	24	0.5
R=50 cm R'=46 d=18	D13 mm 5 cm 間隔	9	0	7.5	12.5	0.55
		9	4.5	9.5	17	0.55
		9	9	12	24	0.55
R=50 cm R'=46 d=12	D10 mm 4 cm 間隔	18	0	13.5	23	-0.65
		13.5	4.5	13.5	22	-0.4
		9	9	13.5	23	-0.25

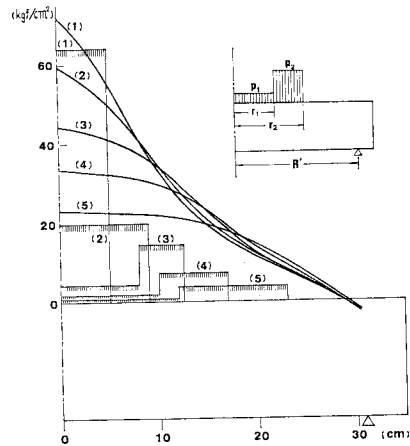


図-21 平板に白形の分布荷重が作用した場合に平板の張力側に生ずる曲げ応力

散されたことが現われている。

平板理論によれば周辺が単純支持された円板に環状荷重が作用した場合に環状荷重の内部では平板に生ずる曲げモーメントが一定値となることが示されている。また Marcus はスラブが柱から受ける反力を柱中心からの距離に比例した強度をもつ分布荷重とみなすことを提案した⁹⁾。これらを参考として図-20 に示すような曲げ応力の分布とするためには平板にどのような分布形状の荷重を作用させればよいかについて有限要素法により繰り返し計算を行った結果表-4 の上3段または図-21 に示すとき白形の分布形状が得られた。表-4 に示した数値は半径 r₁ の円内に作用する分布荷重強度 p₁ を半径 r₁ より r₂ に至る環状部分に作用する荷重強度 p₂ の λ 倍とすべきことを表わしている。このような分布荷重の合計が柱の反力 P と一致するためには p₁, p₂ は次式の値をとる必要がある。

$$\left. \begin{aligned} p_2 &= \frac{P}{\pi r_2^2 - (1-\lambda)\pi r_1^2} \\ p_1 &= \lambda p_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

このような円形の分布荷重によって平板に生ずる曲げ応力を 図-21 に示すが、その形状は 図-20 によく一致し、ほとんど区別がつかない。なお 図-21 には半径 5 cm または 9 cm の円内に 10 tf (98 kN) の荷重が作用した場合も併せて記入したが、柱およびハンチの存在によって円板に生ずる曲げ応力が著しく減少したことが現われている。

図-20 および 21 によれば中心部のコンクリートに生ずる曲げ引張応力は (5) の場合を除き、すべてコンクリートの引張強度を越えており、この応力に到達する前に亀裂を生ずることになる。したがって実際にはこのような曲げ応力の大きさになることはないが、この図は柱およびハンチの存在によって荷重が分散される効果を示すものであり、(1) の場合は (5) の場合の 1/3 の荷重で中心部に亀裂が発生することが判明する。または荷重の大きさを 10 tf とせず 3 tf (29.4 kN) とすれば曲げ応力は図の 0.3 倍となり、すべての場合がコンクリートの引張強度内に入り、この図は曲げ応力の分布の比較を示すことになる。

以上の計算は半径 35 cm、厚さ 12 cm の円板に半径 9 cm の柱が接続された場合であるが、これらの寸法の割合が変化した場合の影響を確かめるために柱の半径およびスラブの厚さはそのままスラブの半径を 50 cm とし、環状支点の半径を 46 cm とした。これは支間 198 cm のフラットスラブに相当する。このときには柱およびハンチによる荷重分散の効果はさらに大きくなり、特に 9 cm のハンチをつけた場合には柱中心よりいっくらか外れたところでスラブの張力側に生ずる曲げ応力の最大が認められた。このような曲げ応力の分布とするために円板に加えるべき荷重の形状を 表-4 に示したが、中心部の分布荷重の大きさを負とする必要がある。

次に円板の半径を 50 cm としたうえでさらにスラブの厚さを 18 cm とした場合についても柱およびハンチによる荷重分散の効果を調べた。鉄筋としては厚さ 12 cm のスラブと同様に直径 10 mm のものが 4 cm 間隔に配置されるとしたが、これに続いて直径 13 mm の鉄筋を 5 cm 間隔に配置した場合についても計算を行った。これらの計算結果を 表-4 に追加して記入したが、鉄筋の数量による影響は少ない。

最近の傾向として柱頭におけるハンチを省略してそれだけ太い柱を使用する場合がある。スラブの厚さを 12 cm または 18 cm とし、柱頭の半径を 18 cm とし、ハンチのある場合とない場合についてスラブに生ずる曲げ応力の分布を比較して 図-22 に示した。柱の長さは十

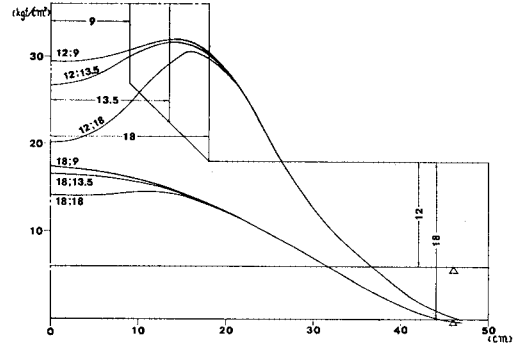


図-22 柱頭の半径を一定としたときスラブに生ずる曲げ応力の比較

分に長いと仮定した。柱の半径がスラブの厚さに等しいかあるいはこれより小さい場合には柱頭上における曲げ応力の分布は平坦であるが、柱の半径がスラブの厚さよりも大きくなると柱頭の周辺の対面で曲げ応力が最大となり、中心でこれより小さくなる。このように変動の激しい曲げ応力の分布を円板で再現するには 表-4 の最下段 3 行に示したように中心において反対方向の分布荷重を加える必要がある。

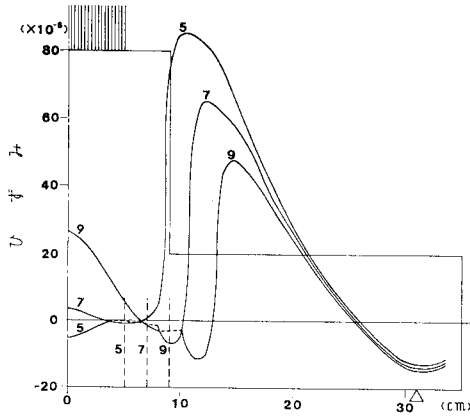
表-4 に示した r_1 、 r_2 および λ の値は環状支点の半径 R' 、円板の厚さ T 、柱の半径 r およびハンチの寸法 h によって変動するが、表-4 の値より最小自乗法を用いて r_1 、 r_2 および λT を R' 、 T 、 r および h の 1 次式で表現すれば次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= 0.0755 R' - 0.093 T + 0.645 r + 0.551 h \\ r_2 &= 0.0098 R' + 0.067 T + 1.193 r + 1.220 h \\ \lambda &= 1.680 - (0.2802 R' + 0.840 r + 0.183 h) / T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

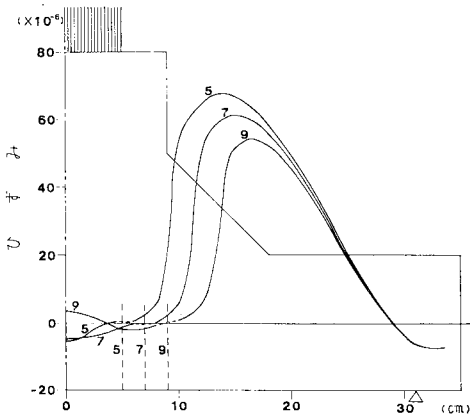
上式には鉄筋の数量を表わす項が欠けているが、当然適当な量の鉄筋が配置されているとの前提とする。

以上に述べた計算は実験結果に比較するためにスラブの半径、厚さ、柱およびハンチの寸法、鉄筋の直径および配置を試験片に一致させるかまたはこれを出発点として各部の寸法をいっくらか変化した。しかしこれらの寸法をすべて k 倍し、柱からスラブに加える荷重を k^2 倍すればコンクリートおよび鉄筋に生ずる応力に変化を生じない。したがって柱およびハンチによる荷重分散の効果は以上の計算結果をそのまま実際の構造物にも適用することができる。

これまでの計算においてはすべてコンクリートには亀裂を生じないと仮定した。図-20 に示すごとく 9 cm のハンチがつけられている場合には 10 tf (98 kN) の荷重に対する最大の引張応力が 23.2 kgf/cm² (2.27 MPa) となり、引張強度の限界内にある。しかしこれより荷重が増したときまたはハンチの小さい場合には当然中心部



図—23 スラブ中心に円筒状の亀裂を発生した場合のひずみ分布



図—24 スラブ中心に円筒状の亀裂を発生した場合のひずみ分布

に亀裂を生ずることを考えなくてはならない。柱頭の対面において半径 5, 7 または 9 cm, 深さ 8 cm の円筒状の亀裂を発生し、これより外方に多数の放射状の亀裂を生じた場合について半径方向のひずみを計算した結果を図—23, 24 に示した。ただしコンクリートの弾性係数を $3 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ (29.4 GPa) とし、ポアソン比を 0.25 と仮定した。なお円筒状の亀裂の内方全部とその外方 4 cm の間では鉄筋とコンクリートとの付着は完全に切断されると仮定した。柱のない平板についても同様な亀裂の発生を仮定し、表—4 に示した白形の荷重が作用した場合についてコンクリートの張力面に生ずるひずみを計算した結果は図—23, 24 にほぼ一致した。したがって表—4 に示した数値あるいはこれより導いた式 (28) はスラブに亀裂を発生した場合にも適用できることが確かめられた。これらの図によれば中央部におけるコンクリートのひずみは 0 に近く、円筒状の亀裂の外方でひずみが急に大きくなる。これは実験結果に近似し、また実験においてはひずみ測定用のゲージを横断して亀裂の発生

した場合も考えられる。これらの図によればひずみの最大は 85×10^{-6} であり、コンクリートに亀裂を生ずる手前にある。しかしこの数値は鉄筋とコンクリートとの付着の切断が亀裂からいくらの深さまで達するかによって大きく変わり、場合によっては円周状の亀裂の数を増して計算し直す必要がある。以上は中心からいくらか離れたところに亀裂を生じた場合を論じたものであるが、柱のない場合または柱の細い場合には計算上円板の中心に最大の曲げモーメントを生ずる。したがって最初の亀裂が円板中心に発生し、図—12, 13 はこの状態を示していると考えられる。

7. 結 論

フラットスラブが一般的な分布荷重を受けたときにスラブが柱頭より受ける反力の分布を一樣とみなすのが一般の計算方法であるが、スラブは柱頭との結合部において曲げを生ぜず平面を保つとする説もある。この問題について模型実験および有限要素法によって検討を加えた。

計算結果によれば一般に柱頭の対面においてスラブに生ずる曲げ応力の分布は平坦となり、特に柱の半径がスラブの厚さより大きいときには柱頭の周辺対面において曲げ応力が最大となり、中心における曲げ応力はこれより小さくなる。このような曲げ応力の分布を得るためには周辺を単純支持された円板に式 (27), (28) で示された白形の分布荷重を加えればよい。したがってフラットスラブの柱頭部の設計にあたっては柱を中心として支間の 1/4 の半径をもつ円形部分を切り取り、これを上記の分布荷重を受ける円板として強度計算を行えばよい。

柱より垂直反力を受けたフラットスラブの柱頭付近に生ずるひずみを測定した結果によれば柱頭中心の対面におけるひずみが 0 に近く、柱頭周辺の対面におけるひずみが急に大きくなる場合が多く観察された。これは柱頭を中心として円周状の亀裂が発生し、この亀裂の内方では鉄筋とコンクリートとの間の付着が切断されたものと認められる。その結果中心部ではコンクリートのひずみが小さくなることが了解される。

終わりに本研究の中の有限要素法による解析に関しては法政大学教授 大地羊三氏、大阪大学 横山 隆氏のご指導を受け、また模型実験に関しては当時の金沢工業大学土木工学科の多数の学生のご協力を受けたことを述べ、ここに厚く感謝の意を表す。

参 考 文 献

- 1) 日本建築学会：鉄筋コンクリート構造計算規準・同解説、pp. 111~118, 昭和 46 年。
- 2) Woinowsky-Krieger, S. : On Bending of a Flat Slab

- Supported by Square-Shaped Columns and Clamped, *Journal of Applied Mechanics* 21, pp. 263~270, 1954.
- 3) 堯天義久：無梁版構造に関する研究，建築学会研究報告，No. 14, 昭和26年11月；No. 16, 昭和26年12月；No. 18, 昭和27年5月；No. 20, 昭和27年10月。
 - 4) 片岡靖夫：Point Matching 法による無梁板の解法，中部工大紀要第7巻，pp. 85~88, 1971年12月。
 - 5) Marcus, H. : Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten, S. 247, Julius Springer, Berlin, 1924.
 - 6) Marcus, H. : Die wirksame Stützfläche der trägerlosen Pflzdecken, Beton und Eisen, Heft 19, S. 352~358; Heft 20, S. 370~377, 1926.
 - 7) Ono, K. : The Exact Theory of Flat Slabs, *ZAMM* 41, S. 285~312, 1961.
 - 8) Ono, K. : The Advanced Theory of Flat Slabs, *ZAMM* 46, S. 485~500, 1966.
 - 9) Ono, K. : Theory of Flat Slabs with Edges Free or Supported by Walls, *ZAMM* 56, S. 349~359, 1976.
 - 10) 小野一良：周辺の支承条件を考慮に入れたフラットスラブの解法，金沢工業大学創立20年記念論文集，pp. 119~138, 1977.
 - 11) Yamazaki, J. and Hawkins, N.M. : Behavior of Concrete Plates Joined to Columns, 土木学会論文集, No. 292, pp. 117~130, 1979年12月。
 - 12) Ngo, D. and Scordelis, A.C. : Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams, *ACI Journal*, Vol. 64, No. 3, pp. 152~163, 1967.
 - 13) Nilson, A.H. : Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete by [the Finite Element Method, *ACI Journal*, Vol. 65, No. 9, pp. 757~766, 1968.
 - 14) Jofriet, C. and McNeice, G.M. : Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Slabs, *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 97, ST 3, pp. 785~806, 1971.
 - 15) Bell, J.C. and Elms, D. : Partially Cracked Finite Elements, *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 97, No. ST 7, pp. 2041~2045, 1971.

(1982.3.8・受付)