

路線の平面線形へのエラスチカ曲線の適用

APPLICATION OF ELASTICA FORMES TO ROUTE ALIGNMENT

木村 喜代治*

By Kiyoji KIMURA

1. ま え が き

路線の平面線形要素として、直線と円のほかに緩和曲線として三次放物線、レムニスケート曲線、マッコネル曲線、クロノイド曲線などがある。自動車が等速走行をしているとき、そのハンドルの回転角速度を一定にした走行軌跡がクロノイド曲線であり、平面線形的设计要素として広く用いられている。クロノイド曲線は Euler のら線あるいは Fresnel のら線とよばれるら線の一種である。一般に 2 地点を結ぶ路線は左右に交互に屈曲しながら一地点ともう一方の地点とを結んでいることが多い。このとき同種の曲線により 2 地点を結ぶとすると、基本的に周期関数で表わされるような平面線形が合理的であるように思われる。

von Schelling¹⁾ は平板上で一定速度で動く 1 個の動点を考え、起点、終点の位置とそこに至る径路の長さを一定としたとき、確率統計論的に最高頻度径路となる動点の軌跡曲線を求めた。自動車などを一つの動点とみるなら、このような曲線が路線の平面線形として適当ではないかと推測される。Langbein および Leopold²⁾ はこの von Schelling の理論を河川の自由蛇行形状の問題に適用した。なお、von Schelling の曲線と水圧曲線 (Hydrostatic curve)³⁾ およびエラスチカ (Elastica) 曲線とはまったく相似である⁴⁾。

この種の曲線形は Euler⁵⁾ によりエラスチカの問題として最初に解析されたと思われるので、ここではエラスチカ曲線またはエラチスカと称することにする。

本論はエラスチカ曲線を平面線形要素として用いる場合の各種基本的関係および路線設定に関し必要とする諸計算と方法などについて述べる。

2. 基本式

平板上にある 2 地点の位置と曲線の長さが与えられた連続曲線において最高頻度となる曲線は von Schelling によると

$$(d\theta/ds)^2 = 2\sigma^2(\cos\theta + C) \dots\dots\dots(1)$$

ここで、 s : 曲線長、 θ : 曲線の接線と x 軸とのなす角 (Fig. 1 参照)、 σ : ds に対するふれ角 $d\theta$ の標準偏差、 C : 任意定数。いま式 (1) で、 $\sigma = 1/A$ とし、 s に関し微分し、 $\sin\theta = -dz/ds$ と置くと、

$$d/ds(d\theta/ds) = 1/A^2 \cdot dz/ds$$

よって項別積分すると

$$d\theta/ds = z/A^2 + \text{Const.}$$

$d\theta/ds = 1/\rho$ であり、 $z=a$ で $d\theta/ds = 1/\rho_M$ (Fig. 2 参照) とし、 $\rho_M \cdot a = A^2$ のように A を選んだとすると (この選び方は式 (2) と矛盾しない)、 $\text{Const.} = 0$ となる。よって

$$\rho z = A^2 \dots\dots\dots(2)$$

となる。 ρ : 曲率半径、 A : 長さの次元を有する定数、クロノイドにならってパラメーターとよぶことにする。式 (1), (2) が基本式である。

エラスチカは式 (3), (4) よりわかるようにだ円積分によって表わされ周期関数となるが、母数 k が 1 のとき周期性が失われる。このとき関数形は初等関数で表わされるが³⁾、ここではふれないことにする。この曲線を大別すると、変曲点のある場合 (このとき変曲点は x 軸上にある) と変曲点のない場合とがある。本論では説明の都合上、変曲点のある場合を第一種エラスチカと名付け、変曲点のない場合を第二種エラスチカと名付ける。

平面線形要素として利用する場合はほとんど第一種エラスチカと考えられる。そこで以後の説明においてはこ

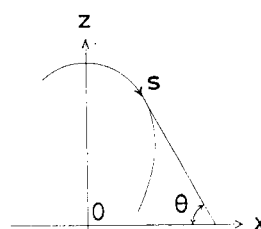


Fig. 1

の場合を中心に述べてある。曲線形は周期関数であるので、解析においてはだ円積分の偏角（または振幅） φ が $0^\circ \sim 90^\circ$ の範囲について取り扱ってある。

計算結果は下記のようになる⁶⁾。

① 第一種エラスチカ

式 (1) より

$$s = \int_0^s ds = A \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta + C)}}$$

$\theta = \theta_0$ で $d\theta/ds = 0$ とすると $C = -\cos \theta_0$ 、三角関数の倍角公式を用いて

$$s = A \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}} \\ = A \int_0^\theta \frac{d\theta}{2\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}}$$

$\sin(\theta/2) = k \sin \varphi$, $k = \sin(\theta_0/2)$ とすると

$$s = A \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = AF(k, \varphi)$$

また

$$x = \int_0^x dx = \int_0^s \cos \theta ds = A \int_0^\theta \frac{\cos \theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}} d\theta \\ = \frac{A}{2} \int_0^\theta \frac{1 - 2 \sin^2(\theta/2)}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}} d\theta$$

前出の変数変換を用いて

$$x = A \left[\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - 2 \int_0^\varphi \frac{k^2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \right] \\ = A \left[2 \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi - \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right] \\ = A [2E(k, \varphi) - F(k, \varphi)]$$

さらに

$$z = \int_0^z dz = \int_s^s (-\sin \theta) ds = \int_s^s \sin \theta ds \\ = A \int_\theta^{\theta_0} \frac{\sin \theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}} d\theta$$

倍角公式および前出の変数変換を用いると

$$z = A \int_\theta^{\theta_0} \frac{\sin(\theta/2) \cdot \sqrt{1 - \sin^2(\theta/2)}}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}} d\theta \\ = 2Ak \int_\varphi^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi = 2kA \cos \varphi$$

計算に便利なようにまとめると

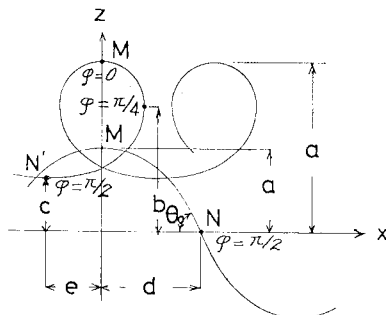


Fig. 2

$$\left. \begin{aligned} s &= AF(k, \varphi), S = AK(k) \\ x &= A [2E(k, \varphi) - F(k, \varphi)] \\ d &= A [2E(k, \pi/2) - K(k)] \\ z &= 2kA \cos \varphi, a = 2kA \\ \rho_0 &= A/(2k), k = \sin(\theta_0/2) \\ \sin(\theta/2) &= k \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

② 第二種エラスチカ

式 (1) より

$$s = A \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta + C)}}$$

$C = (2 - k^2)/k^2$ とし三角関数の倍角公式を用いて

$$s = \frac{A}{2} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1/k^2 - \sin^2(\theta/2)}}$$

$\theta/2 = \varphi$ とすると

$$s = Ak \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = AkF(k, \varphi)$$

また倍角公式と前出の変換を用いて

$$x = \int_0^x \cos \theta ds = Ak \int_0^\varphi \frac{1 - 2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \\ = Ak \left[\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - 2 \int_0^\varphi \frac{\sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \right] \\ = Ak \left[\frac{2}{k^2} E(k, \varphi) - \left(\frac{2}{k^2} - 1 \right) F(k, \varphi) \right] \\ = A/k [2E(k, \varphi) - (2 - k^2)F(k, \varphi)]$$

同じく倍角公式と前出の変換を用いて

$$z = a - \int_z^a dz = a + \int_0^s (-\sin \theta) ds \\ = a - Ak \int_0^\varphi \frac{2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \\ = a + [2A/k \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}]_0^\varphi \\ = 2A/k \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

ただし $a = 2A/k$ ($\varphi = 0$ で $z = a$ とする)。まとめて

$$\left. \begin{aligned} s &= AkF(k, \varphi), S = AkK(k), \\ x &= (A/k) [2E(k, \varphi) - (2 - k^2)F(k, \varphi)] \\ e &= (A/k) [2E(k, \pi/2) - (2 - k^2)K(k)] \\ z &= (2A/k) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \\ a &= 2A/k, c = 2Ak'/k, \\ b &= (2A/k) \sqrt{1 - k'^2/2}, \rho_0 = Ak/2, \\ \rho_1 &= Ak/(2k'), k = \sqrt{1 - c^2/a^2}, \\ c/a &= k', \theta = 2\varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 s : Fig. 2 の頂点 M より任意点までの曲線長, S : MN または MN' の曲線長, $F(k, \varphi)$, $E(k, \varphi)$: 第一種および第二種だ円積分, φ : 偏角, θ_0 : 第一種エラスチカの最大接線角, k : 母数, k' : 補母数, ρ_0 : 最小曲率半径, ρ_1 : 第二種エラスチカの最大曲率半径。

エラスチカ曲線は、それぞれにおいて k が一定であれば相似である。式 (2) で A は長さの次元を有し、一種の拡大率であると考えられる。 $A=1$ のものをクロソ

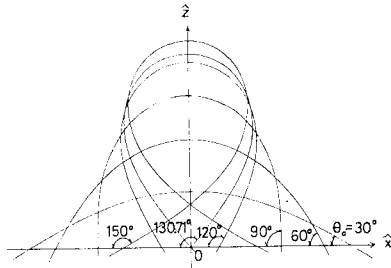


Fig. 3

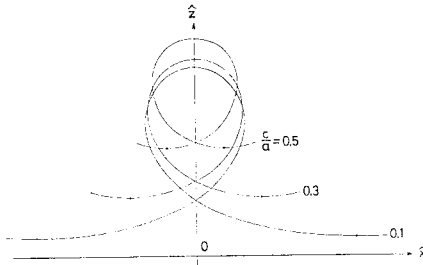


Fig. 4

イドにならって単位エラスチカと称することにする。単位エラスチカの長さの次元を有する量に記号 $\hat{}$ を付けて表わす。このときこれらの量は無次元量と考えることができる(たとえば $\hat{\rho} = \rho/A$, $\hat{s} = s/A$ など)。

Fig. 3 は第一種単位エラスチカで $\theta_0 = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 130.71^\circ, 150^\circ$ の諸曲線である。130.71° の曲線は8の字形をなす。Fig. 4 は第二種単位エラスチカで $c/a = 0.1, 0.3, 0.5$ の曲線である。これらの図のいずれの曲線も φ が $-90^\circ \sim 90^\circ$ の範囲を主に描いてある。

3. 自動車の走行との関係

第一種エラスチカ曲線に沿って自動車が一定速度で走行するものとして説明する。このとき Fig. 5 の曲線の M, P, R 等において曲率半径は最小であり、自動車前輪の轉向角は最大となる。また L, N, Q 等においては前輪の轉向角は0である。L から M に向かってハンドルを右回転していた自動車が M 点で最大轉向角となり、それよりハンドルを左回転し、N から P に至る。P よりはハンドルが右回転となる。いまハンドルの回転角速度を ω とし

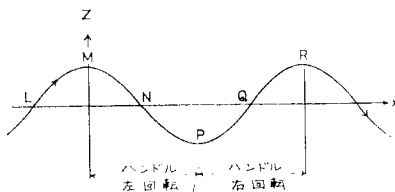


Fig. 5

$$\omega = K_1 dz/dt \dots\dots\dots (5)$$

になるような運転をしたとする。t: 時間, K_1 : 定数。このハンドル操作では M, P, R 点に近づくに従ってこの角速度は減少し、それらの点で0となり、続いて回転方向を反転する。よってこれらの点でのハンドル操作は滑らかに行われる。たとえばL点からt時間後のハンドル回転角を r とすると

$$r = \int_0^t \omega dt = K_1 \int_0^t dz/dt \cdot dt = K_1 z$$

前輪の轉向角を β とすると $\beta = K_2 r$, K_2 : 定数。自動車の前後輪車軸間隔を h とし、轉向角 β のとき自動車の回転曲率半径 ρ は

$$\begin{aligned} \rho &= h / \tan \beta = h / \beta \\ &= h / (K_1 K_2 z) \end{aligned}$$

よって

$$\rho z = h / (K_1 K_2)$$

右辺は定数であり、これを A^2 とすると上式は

$$\rho z = A^2$$

となってエラスチカの基本式(2)となる。すなわち自動車は式(5)のハンドル操作によってエラスチカ曲線に沿って走行することになる。

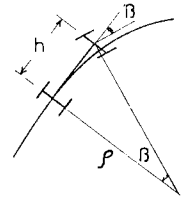


Fig. 6

4. 緩和曲線

直線と円弧とを結ぶ緩和曲線として第一種エラスチカを用いることにする。

このとき k の値により種々の曲線形があるので、常に Fig. 2 の MN の部分を緩和曲線として用いるものとする。このようにすると M 点において円弧に接続することになり、直線から緩和曲線上を走行してきた自動車はそのハンドル回転角速度がしだいに小さくなり M 点で静止し、

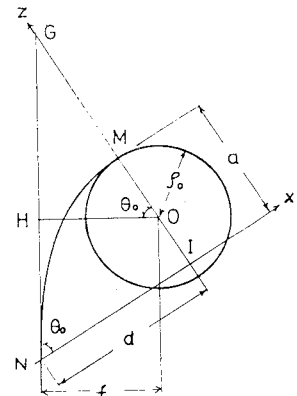


Fig. 7

円弧上では静止したままであり運転上無理がない。

直線と円弧とを結ぶ緩和曲線では一般に Fig. 7 の移程量 $(f - \rho_0)$ と円の半径 ρ_0 とが与えられる。M 点の曲率半径を円の半径に一致せしめ、N 点で直線に接続するようにする。

$\triangle GNI$ と $\triangle GHO$ とは相似であるから

$$\begin{aligned} f/\rho_0 &= 2k\{2E(k, \pi/2) - K(k)\} \sin \theta_0 \\ &\quad - (4k^2 - 1) \cos \theta_0 \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

この式より θ_0 が決まる。また式 (3) より $A=2k\rho_0$ ，
よって A が決まり、緩和曲線が確定する。また Fig. 7
の直線から曲線に入る点 N の位置は同様に

$$NH/\rho_0 = 2k\{2E(k, \pi/2) - K(k)\} \cos \theta_0 + (4k^2 - 1) \sin \theta_0 \dots\dots\dots (7)$$

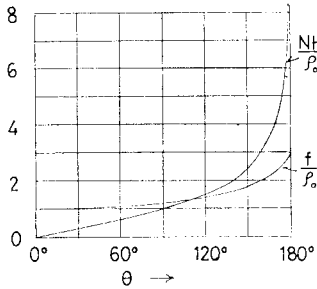


Fig. 8

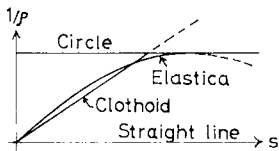


Fig. 9

0.760 のとき後者は 1.126 となる。このように緩和曲線として必要とする曲線長はエラスチカの方が少し長くなる。曲線上の各点の曲率を求めると Fig. 9 のようになる。円弧への接続においてその曲率の変化率がエラスチカは滑らかに変化している。平面線形が凸形で中間に円弧のないときクロソイドは接合点でその曲率の変化率が不連続になる。しかしながら直線と緩和曲線との接続点における曲率の変化はエラスチカの方が少し大きい。

5. 2 曲線の接続

いくつかのエラスチカを組み合わせると長い部分の平面線形を形成させることを考える。自動車の運転操作のうえで滑らかに接続する関係を求め、この関係を満足し地形などに適合するものを設定する。

(1) 凸形接続

頂点 M における接続である。 M 点ではハンドルの回転角速度が 0 になるから、2 曲線の曲率半径を同一にすることだけが条件となる。2 曲線の M を一致させ、 x 軸を平行移動する。式 (3) と倍角公式を用いて

$$2\rho_0 = a_1/(1 - \cos \theta_1) = a_2/(1 - \cos \theta_2) \dots\dots\dots (8)$$

(2) S 字形接続

2 曲線が Fig. 11 の N 点で接続するものとし、この点

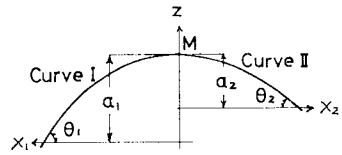


Fig. 10

で 2 曲線の接線が一致するよう x 軸を回転する。S 字あるいは逆 S 字形では、その間を走行する自動車のハンドル回転方向が一定である。したがって、 N 点で 2 曲線のハンドル回転角速度が同一であれば滑らかな接続と考えられる。

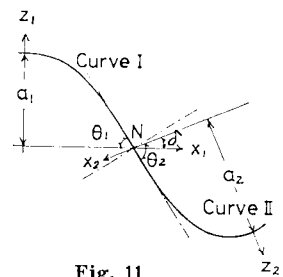


Fig. 11

ハンドルの回転角速度は式 (5) で示され、 $ds/dt=v$ であるから $\omega = K_1 v dz/ds$ となる。また遠心力の変化率は $d/ds \cdot (v^2/\rho) = v^2/A^2 \cdot dz/ds$ である。 K_1, v, A は一定であるからハンドルの回転角速度と遠心力の変化率とは比例する。すなわち 2 曲線のハンドルの回転角速度を考える代わりに遠心力の変化率を考え、これと式 (3) の関係により

$$a_2^2/a_1^2 = \sin \theta_2(1 - \cos \theta_2) / \{\sin \theta_1(1 - \cos \theta_1)\} \dots\dots\dots (9)$$

が得られる。式 (8), (9) などを満足する線形に沿って走行するとき自動車のハンドル操作に不連続はなく、また乗員の受ける遠心力の変化も滑らかとなる。

6. エラスチカの曲線設置

曲線を設置する場合に、必要とする関数の数値が所要の精度で容易に求められなければ実用的でない。エラスチカの基本関数はだ円積分、だ円関数であり、曲線設置に必要な各種関数の数値は関数表などにより求めることができる。しかし一般にそれらの表はこの目的に対し利用するに十分な範囲が含まれていない。そこでそれらの関数を実用上十分な精度で数値計算することを考える。クロソイドの場合パラメーターは 1 個 (A) であるが、エラスチカの場合 2 個 (A, k) である。そこであらかじめ必要とする範囲の関数表を作製するとかなり膨大な量となる。以下の計算により関数表を作ることできるが、その計算式よりわかるようにプログラム可能なポケット型電子式卓上計算機などによって比較的短時間で一連の計算ができる。

(1) 基本関数の数値計算

設定すべき曲線が確定すれば A, k などは既知量となる。その曲線上にある任意点を設置するとき、通常ある点 (たとえば **Fig. 2** などの M 点) からその任意点までの曲線長が指定されることが多い。よってまず必要とする計算は、このある点から指定された任意点までの曲線長より、その任意点の諸関数の数値計算である。すなわち式 (3), (4) などより $F(k, \varphi)$ を求め、 $F(k, \varphi) \equiv u$ とすると u と k とからその任意点の φ を求め、ついで k と φ とから $E(k, \varphi)$ やそのほかの量を計算することになる。

a) u, k より φ の計算

この数値計算として収束の早いものは、一般に下記式である⁷⁾。

$$\left. \begin{aligned} q &= \exp(-\pi K'/K), \quad v = u/2K \\ \vartheta_1(v) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2q^{n+1/2} \sin\{(2n+1)\pi v\} \\ \vartheta_4(v) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2q^{n+1/2} \cos(2n\pi v) - 1, \\ \operatorname{sn} u &= \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)}, \quad \varphi = \sin^{-1}(\operatorname{sn} u) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

$K(k), K'(k)$ などは K, K' で表わしてある。

b) $E(k, \varphi)$ の計算

だ円積分の数値計算は積分する関数を二項定理で級数展開し項別積分することによっても表わされるが、一般にその級数の収束性はきわめて緩やかであり実際上便利なものでない。そこで Landen の変換による方法を用いる。すなわち

$$k_1 = (1-k')/(1+k'), \quad \tan(\varphi_1 - \varphi) = k' \tan \varphi$$

とすると

$$E(k_1, \varphi_1) = 2/(1+k') \cdot [E(k, \varphi) + k'F(k, \varphi)] - k_1 \sin \varphi_1$$

となる⁸⁾。この変換を逐次繰り返して、変形整理すると

$$\begin{aligned} E(k, \varphi) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\prod_{n=1}^m (1+k_n)} E(k_m, \varphi_m) \right. \\ &\quad - \sum_{n=1}^m \frac{1-k_n}{\prod_{n=1}^n (1+k_n)} F(k_{n-1}, \varphi_{n-1}) \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^m \frac{k_n}{\prod_{n=1}^n (1+k_n)} \sin \varphi_n \right] \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

ただし $k_0 = k, \varphi_0 = \varphi$ 。ここで

$$F(k, \varphi) = (1+k_1)/2 \cdot F(k_1, \varphi_1)$$

などを用い、 m を十分大きくとると ($k_m \approx 0$ 程度まで)、近似的に

$$E(k, \varphi) \approx \left[\frac{1}{\prod_{n=1}^m (1+k_n)} \right.$$

$$\left. - \frac{m-1}{n=1} \prod_{n=1}^{m-1} \frac{(1-k_n)(1+k_n)}{2^{(m-n)} \prod_{n=1}^n (1+k_n)^2} \right] \varphi_{m-1} + \sum_{n=1}^m \frac{k_n}{\prod_{n=1}^n (1+k_n)} \sin \varphi_n \dots\dots\dots(12)$$

たとえば $m=5$ とすると

$$\begin{aligned} E(k, \varphi) \approx & \left[\frac{1}{(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)(1+k_4)} \right. \\ & - \frac{1-k_4}{2(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)} \\ & - \frac{(1-k_3)(1+k_4)}{4(1+k_1)(1+k_2)} \\ & - \frac{(1-k_2)(1+k_3)(1+k_4)}{8(1+k_1)} \\ & \left. - \frac{(1-k_1)(1+k_2)(1+k_3)(1+k_4)}{16} \right] \varphi_4 \\ & + \frac{k_4}{(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)(1+k_4)} \sin \varphi_4 \\ & + \frac{k_3}{(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)} \sin \varphi_3 \\ & + \frac{k_2}{(1+k_1)(1+k_2)} \sin \varphi_2 + \frac{k_1}{1+k_1} \sin \varphi_1 \end{aligned} \dots\dots\dots(13)$$

となる。この式による計算値はほぼ $k \leq 0.99$ で小数 7 桁まで、 $k=0.997$ で小数 6 桁まで、 $k=0.999$ で小数 5 桁まで正確である。 k が小さいほど計算値がより正確になる。

c) $F(k, \varphi)$ の計算

Landen の変換によると一般に⁷⁾

$$F(k, \varphi) = \prod_{n=1}^{\infty} (1+k_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n}{2^n} \dots\dots\dots(14)$$

m を十分大きくとり、たとえば $m=5$ とすると

$$\begin{aligned} F(k, \varphi) & \approx \prod_{n=1}^m (1+k_n) \cdot \frac{\varphi_m}{2^m} \\ & \approx (1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)(1+k_4) \frac{\varphi_4}{2^4} \dots\dots(15) \end{aligned}$$

となる。

(2) 曲線設置の実際

曲線設置は基本的に各点の x, z などが計算されれば、幾何学の問題として種々考えることができる。ここでは主として第一種エラスチカの場合について述べる (ただし下記の ①は第二種エラスチカでも同じである)。

さて、曲線の設置始点は **Fig. 12** の M 点でよいが、ここでは z 軸の平行移動によって **Fig. 12** の 0

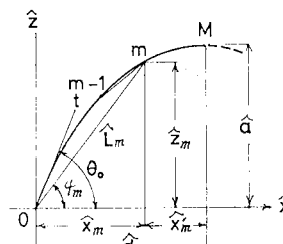


Fig. 12

点を始点としてみる．このとき式 (3) の s, x などは

$$\left. \begin{aligned} s &= s/A = K(k) - F(k, \varphi) \\ \hat{x} &= x/A = 2 E(k, \pi/2) - K(k) \\ &\quad - \{2 E(k, \varphi) - F(k, \varphi)\} = \hat{d} - \hat{x}' \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

ただし式 (3) の x を x' で表わす．

始点 0 から任意点 m までの曲線長が与えられたとき， m 点の必要な諸要素を算出する．すなわち s より $F(k, \varphi) \equiv u$ を求め，式 (10) から φ が計算される．これより $E(k, \varphi), F(k, \varphi)$ などを式 (13), (15) より計算し，式 (3), (4), (16) などより x_m, z_m (接尾字は m 点の値を示す) を求める． m 点の設置方法を列挙すると下記のようなになる．

- ① 座標による方法： x_m, z_m より m 点を設置．
- ② 極座標による方法：Fig. 12 を参照し x_m, z_m より ϕ_m, L_m を求め，これによる．なお， ϕ_m の代わりに接線 t からのふれ角 $(\theta_0 - \phi_m)$ を用いてもよい．
- ③ ϕ_m と $(m-1)$ 点からの弦長 l_m による方法 (Fig. 12 参照)．
- ④ Fig. 13 の 0 点および O' 点からのふれ角 ϕ_m, γ_m による方法．

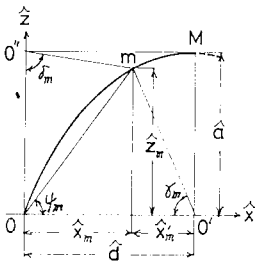


Fig. 13

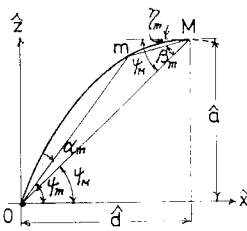


Fig. 14

- ⑤ Fig. 13 の 0 点および O'' 点からのふれ角 ϕ_m, δ_m による方法．

- ⑥ 弦 OM よりのふれ角 α_m, β_m による方法 (Fig. 14 参照)．

そのほかトラバースによる方法など種々考えることができる．

7. まとめ

エラスチカ曲線に沿って一定速度で動く自動車の走行との関係および曲線設定に必要な諸計算式をまとめた．これらの諸計算は一連の計算として，プログラム可能なポケット型電子式卓上計算などにより，実用上必要な精度まで容易に短時間で計算できる．

Fig. 3, 4 よりわかるように，第一種および第二種エラスチカでは曲率半径最小の点，また第二種の曲率半径最大の点の付近において円に近い曲線である．これがこ

れらの点ではかのエラスチカや円との接続上都合よく，平面線形に適していると思われる．

エラスチカはクロソイドと異なり無数の曲線形があるから，種々組み合わせることにより，自動車のハンドル操作および車両乗員の受ける遠心力の変化が滑らかな，かなり長い平面線形を形成することができる．

平面線形が凸形の場合の頂点および円弧との接続点においてクロソイドでは曲率の変化率が急変するのに反し，エラスチカは滑らかに変化する．

エラスチカの曲線は細い弾性棒がその両端で相対した一対の力が作用することによって形成される弾性曲線であるから，路線の選定に際し，スチールテープ片のような弾性薄板を用いて，その両端のみに力を加えて弾性曲線を形成させることにより，容易にその曲線の概形を知ることができる．

本文の内容を箇条的に挙げると下記のようなになる．

- (1) 路線の平面線形要素の一つとしてエラスチカ曲線を提案した．
- (2) エラスチカの基本的関係をまとめた．
- (3) 自動車走行のときのハンドル操作との関係を示した．
- (4) 緩和曲線として適用するときの方法および関係式を示した．
- (5) 各種エラスチカを接続するときの方法および関係式を示した．
- (6) 曲線設置に必要なとする基本関数の計算に関し関係式をまとめ，比較的収束の早い第二種円積分の計算式を求めた．
- (7) 曲線の中間点設置の各種方法を述べた．

参考文献

- 1) von Schelling, H. : Most frequent particle paths in a plane. Trans. AGU, Vol. 32, No. 2, pp. 222~226, April 1951.
- 2) Langbein, W.B. and L.B. Leopold : River meanders-theory of minimum variance, U.S. Geol. Survey Prof. Paper 442-H, pp. H1~H15, 1966.
- 3) Kimura, K. : On the hydrostatic curve, 日本大学工学研究所彙報, 第 34 号, pp. 14~17, 1967 年 9 月.
- 4) 木村喜代治 : 蛇行形状と二・三の力学問題との相似性について, 第 34 回土木学会年次学術講演会講演概要集 II-41, pp. 81~82, 1979 年 10 月.
- 5) Love, A.E.H. : A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, pp. 3, 401~404, Cambridge at the University Press, 1934.
- 6) 詳細は 1), 3), 5) などを参照.
- 7) たとえば友近 晋 : 楕円函数論, 現代工学社, 1973 年 6 月.
- 8) たとえば森口繁一ほか : 数学公式 I, 岩波書店, 1956 年 9 月.