

有限要素法による斜面の信頼性解析

RELIABILITY ANALYSIS OF SLOPE BY FINITE ELEMENT METHOD

桜井 春 輔*・土 居 康 成**

By Shunsuke SAKURAI and Yasunari DOI

1. ま え が き

有限要素法は航空工学の分野において開発された解析手法であるが、材料の非均質性および力学特性の非線形性、さらには不連続性および複雑な境界条件などを容易に解析に取り入れることができるため、地盤工学の分野においても活発に利用されるようになった^{1)~3)}。そして、地盤構成材料の複雑な力学的特性を、より忠実に解析に考慮するために、材料の力学モデルはますます複雑なもの提案されてきている。力学モデルが複雑になれば、それだけ材料定数の数も増加するのは当然である。有限要素法は基本的には決定論的解析手法であり、各材料定数に対するインプットデータは確定値として与えられねばならない。このことは、地盤工学の諸問題を有限要素法によって解析する場合には、地盤材料の力学モデルの定数を原位置での状態において正しく評価し、唯一的に決定することが要求される。しかし、地盤材料の力学定数は、たとえ弾性係数にしても、原位置での定量的な評価は容易でなく、さらに数多くの材料定数を正しく評価することは非常に困難である。このような状況を考えて、地盤の力学的挙動をより忠実に表現し得る力学モデルを設定し、それをもとに、精度よく解析可能なアルゴリズムを開発することは、理論的には解析精度の向上につながるはずであるが、実際には、そこに用いるインプットデータとしての各種材料定数の精度が低いため、得られる解析結果の精度はインプットデータの精度に左右されてしまう。地盤工学における有限要素解析において、必要以上に複雑な力学モデルを用いることは、現時点では必ずしも適切なアプローチであるとはいえない。

地盤材料の力学定数は本質的には空間的にばらつくものであり、これを確定量として、唯一的に定めることに

は無理がある。すなわち、これらは確定量ではなく、確率量として考えなければならないものである。このことは、決定論的アプローチである有限要素法を、地盤工学の分野に適用する場合には、材料の力学的特性の明確な鋼構造物を対象とする決定論的解析法とはおのずから異なった方法論によらなければならないことを意味しているといえよう。特に、斜面安定問題のように、材料の力学的特性のばらつきが解析結果に大きな影響を及ぼすような場合には、確率論に基づく信頼性解析によって、その安定性を評価しなければならない。このような状況のもとで、材料特性の不確定性を考慮した有限要素法による新しい解析方法も種々提案されている。

Su⁴⁾らは材料定数の空間的なばらつきを考慮するために、乱数を用いて各要素の材料定数をばらつかせて解析を行うモンテカルロ法を提案した。なお、彼らは要素の大きさの影響を無視しているが、要素の大きさを考慮して弾性係数を決定する方法も示されている。一方、Kovari⁵⁾は材料定数としてのインプットデータを種々変化させ、それらの多数の組合せに対して解析を行うパラメトリック・スタディ (Parametric study) によって、得られる結果を上限值および下限値で評価する方法を提案している。また、Chugh⁶⁾は強度特性のわずかな変化が、結果に大きな影響を与えることを示し、弾塑性解析においては特に Parametric study が重要であると述べている。しかし、いずれにしても、これらの方法は数多くのケースを解析しなければならず、計算コストが問題となる。したがって、数少ない計算量によって、確率論的な情報を得る適当な方法があれば都合がよい。Cambou⁷⁾はこのような観点から、有限要素解析において、材料定数および荷重を確率変数とみなし、線形一次近似法を適用して、変位および応力の期待値と分散を求めている。この方法は、決定論的アプローチである有限要素法を、確率論的アプローチとして用いるための一つの方法であり、インプットデータに不確定要因の多い地

* 正会員 Ph. D., 工博 神戸大学教授 工学部土木工学科
** 正会員 工修 兵庫県土木部豊岡土木事務所

盤工学の問題に有限要素法を適用する場合のアプローチとして、一つの方向を示すものと考えられる。なお、線形一次近似理論による信頼性解析は Cornell⁹⁾ や Ang⁹⁾ らによって提案されたものであり、定式化が比較的簡単であるため、多くの分野において利用されている^{10)~14)}。しかし、これを有限要素解析に適用したのは、著者らの知るところでは、Cambou が最初であろう。

本論文においては、まず斜面安定問題を対象に Cambou の提案する線形一次近似法に基づく有限要素法を説明し、次にこれをさらに発展させ、材料の破壊規準を与えることによって、材料内部の局所的な破壊確率を求める方法、および与えられた単一すべり面の破壊確率を求める方法を提案する。そして、具体的な適用例として、斜面内部の局所的な破壊確率および単一すべり面の破壊確率を求め、通常の極限平衡法による解析結果と比較検討を行う。

なお、ここでは簡単のために不確定要因は空間的にばらつかず（完全相関）、互いに独立であると仮定する。また、解析は二次元平面ひずみ状態とし、有限要素法においては一定ひずみ三角形要素を用いる。

2. 線形一次近似理論の有限要素法への適用

有限要素法において、変位と荷重の関係は次の剛性方程式によって与えられる。

$$[K]\{u\} = \{P\} \dots\dots\dots(1)$$

ここで、 $[K]$ は剛性マトリックス、 $\{u\}$ は変位ベクトル、 $\{P\}$ は荷重ベクトルである。いま、 $[K]$ および $\{P\}$ が m 個の不確定要因 $\{r\} = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ の関数であるとすれば、 $\{u\}$ も $\{r\}$ の関数となる。すなわち、

$$u_i = u_i(r_1, r_2, \dots, r_m) \dots\dots\dots(2)$$

ここで、 u_i は節点 i の変位を表わす。ここでいう不確定要因 $\{r\}$ は、ヤング係数、ポアソン比、単位体積重量、荷重などである。

いま、 u_i を不確定要因 $\{r\}$ の平均値 $\{\mu\}$ の近傍でテーラー展開し、二次以上の高次の項を無視すれば、次式を得る。

$$u_i = u_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) + \sum_{k=1}^m (r_k - \mu_k) \frac{\partial u_i}{\partial r_k} \Big|_E \dots\dots\dots(3)$$

ここで、 $\frac{\partial u_i}{\partial r_k} \Big|_E$ は偏導関数 $\frac{\partial u_i}{\partial r_k}$ の $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ における値である。また、 $\mu_k = E[r_k]$ 、 $k=1, 2, \dots, m$ である。

したがって、 u_i の期待値および分散は次式によって求められる。

$$E[u_i] = E \left[u_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \right]$$

$$+ \sum_{k=1}^m (r_k - \mu_k) \frac{\partial u_i}{\partial r_k} \Big|_E] = u_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \dots\dots\dots(4)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[u_i] &= E \{ [E[u_i] - u_i]^2 \} \\ &= E \left[\left\{ \sum_{k=1}^m (r_k - \mu_k) \frac{\partial u_i}{\partial r_k} \Big|_E \right\}^2 \right] \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_k} \Big|_E \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_l} \Big|_E \right) E[(r_k - \mu_k)(r_l - \mu_l)] \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_k} \Big|_E \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_l} \Big|_E \right) \text{Cov}[r_k, r_l] \dots\dots(5) \end{aligned}$$

ここで、 $\text{Cov}[r_k, r_l]$ は不確定要因 r_k, r_l の共分散を表わす。

次に、節点 i と節点 j の変位の共分散は、式 (3) を考慮して次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \text{Cov}[u_i, u_j] &= E \{ [E[u_i] - u_i] [E[u_j] - u_j] \} \\ &= E \left[\left\{ \sum_{k=1}^m (r_k - \mu_k) \frac{\partial u_i}{\partial r_k} \Big|_E \right\} \left\{ \sum_{l=1}^m (r_l - \mu_l) \frac{\partial u_j}{\partial r_l} \Big|_E \right\} \right] \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_k} \Big|_E \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial r_l} \Big|_E \right) E[(r_k - \mu_k)(r_l - \mu_l)] \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_k} \Big|_E \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial r_l} \Big|_E \right) \text{Cov}[r_k, r_l] \dots\dots(6) \end{aligned}$$

一方、応力も変位と同様に、 $\{r\}$ の関数であるから、その期待値、分散および共分散は次式で求められる。

$$E[\sigma_i] = \sigma_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \dots\dots\dots(7)$$

$$\text{Var}[\sigma_i] = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial r_k} \Big|_E \right) \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial r_l} \Big|_E \right) \text{Cov}[r_k, r_l] \dots\dots\dots(8)$$

$$\text{Cov}[\sigma_i, \sigma_j] = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial r_k} \Big|_E \right) \left(\frac{\partial \sigma_j}{\partial r_l} \Big|_E \right) \text{Cov}[r_k, r_l] \dots\dots\dots(9)$$

ここで、 σ_i は要素 i の応力を表わす。

次に、具体的な計算手法について述べよう。まず、変位の期待値は式 (4) から明らかなように、不確定要因が平均値 $\{\mu\}$ をとったときの値である。すなわち、不確定要因に平均値を用い、与えられた境界条件のもとで、式 (1) によって通常の有限要素解析を行ったときの解として求められる。なお、ここで、境界条件は不確定要因に左右されず、唯一的に与えられるものとする。

応力は節点変位と次の関係にある。

$$\{\sigma\} = [D][B]\{u\} \dots\dots\dots(10)$$

ここで、 $[D]$ および $[B]$ はそれぞれ、応力とひずみ、およびひずみと節点変位を結びつけるマトリックスである。したがって、応力の期待値は式 (10) に $E[u_i]$ および不確定要因の平均値 $\{\mu\}$ を代入することによって求められる。

さて、変位の分散および共分散を求めるために必要な $\frac{\partial u_i}{\partial r_k} \Big|_E$ は次のようにして計算できる。まず、式 (1) を不確定要因 r_k で微分する。

$$\frac{\partial [K]}{\partial r_k} \{u\} + [K] \frac{\partial \{u\}}{\partial r_k} = \frac{\partial \{P\}}{\partial r_k}$$

あるいは、

$$\frac{\partial [K]}{\partial r_k} \{u\} + [K] \left\{ \frac{\partial u}{\partial r_k} \right\} = \left\{ \frac{\partial P}{\partial r_k} \right\}$$

したがって、

$$[K] \left\{ \frac{\partial u}{\partial r_k} \right\} = \{P_f\} \dots\dots\dots (11)$$

ここで、

$$\{P_f\} = \left\{ \frac{\partial P}{\partial r_k} \right\} - \frac{\partial [K]}{\partial r_k} \{u\} \dots\dots\dots (12)$$

境界条件が変位によって与えられる場合は、これを不確定要因としないため、境界上で次式が成立する。

$$\frac{\partial u_n}{\partial r_k} = 0 \dots\dots\dots (13)$$

ここで、 u_n は境界上の節点 n の変位である。いま、不確定要因の平均値における $\partial u_i / \partial r_k$ の値を求めるのであるから、式 (12) に $E[u_i]$ および $\{\mu\}$ を代入して $\{P_f\}$ を求め、式 (13) の境界条件のもとで、式 (11) を解くことによって、 $\partial u_i / \partial r_k|_E$ を求めることができる。そして、式 (5) および (6) から、変位の分散および共分散が求められる。

次に、応力の分散および共分散は次のようにして求められる。まず、式 (10) の両辺を r_k で微分する。ここで、マトリックス $[B]$ は確定量とする。

$$\left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial r_k} \right\} = \frac{\partial [D]}{\partial r_k} [B] \{u\} + [D] [B] \left\{ \frac{\partial u}{\partial r_k} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

式 (14) に $E[u_i]$ 、 $\partial u_i / \partial r_k|_E$ 、 $\{\mu\}$ を代入することにより $\partial \sigma / \partial r_k|_E$ を求めることができる。したがって、式 (8) および (9) から分散および共分散が求まる。

いま、平面問題を考えると、主応力および最大せん断応力は次式によって求められる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \dots (15)$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \dots\dots\dots (16)$$

これらの式の両辺を r_k で微分すると次の関係を得る。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial r_k} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial r_k} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_x}{\partial r_k} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial r_k} \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial r_k} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial r_k} \end{pmatrix} \pm \frac{\frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_x}{\partial r_k} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial r_k} \end{pmatrix} + 2 \tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial r_k}}{2 \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}} \dots\dots\dots (17)$$

$$\frac{\partial \tau_{\max}}{\partial r_k} = \frac{\frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_x}{\partial r_k} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial r_k} \end{pmatrix} + 2 \tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial r_k}}{2 \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}} \dots\dots\dots (18)$$

したがって、式 (17) および式 (18) から、 $\partial \sigma_1 / \partial r_k|_E$ 、 $\partial \sigma_2 / \partial r_k|_E$ 、 $\partial \tau_{\max} / \partial r_k|_E$ が求まると、主応力および最大せん断応力の分散および共分散も式 (8) と (9) から求められる。

なお、ここで示した方法による解析の精度については、モンテカルロ法との比較を行った結果、非常によく一致することが確かめられている¹⁹⁾。また、弾性係数、ポアソン比などについて、空間的な完全相関を仮定するとき、弾性応力場の解析解が存在するような問題では、線形一次近似法を用いることによって、より正確な解を簡単に得ることができるのは当然である。

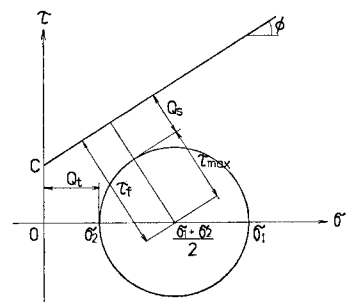
3. 局部破壊確率

斜面安定の検討において、最も危険な箇所を明らかにするためには、局部破壊に対する破壊確率を求めなければならない。これは斜面安定に対する抑止工の設計の資料としても重要である。ここでは局部破壊に対する破壊確率を求めることにする。

さて、前節において、変位および応力の不確定性を表わすパラメーターである期待値、分散および共分散が求められたわけであるが、破壊確率を得るためには、さらに、材料の強度特性を考慮しなければならない。ここでは、材料はクーロンの破壊規準に従うものとする。ただし、計算を簡単にするために、せん断破壊および引張破壊の個々の事象に対してのみ破壊確率を求め、両者が同時に起こる混合破壊については触れないことにする。せん断破壊に対し材料の強度特性は粘着力 c および内部摩擦角 ϕ を考える。これらの定数もまた不確定要因と考えられる。一方引張に対しては、材料はまったく抵抗しないものとする。いま、材料の局所的な破壊確率を求める場合、破壊確率に関して2つの定義が考えられる。一つは、材料を等方性とした場合、破壊面の方向は考慮せず、ある点の応力状態を示すモールの応力円の破壊規準への接近度によって定義するものであり、他の一つは、層状をなす材料などにおいては、破壊面は層理面に沿って生ずるため、層理面上の応力と破壊規準との関係で定義するものである。

(1) 層理面が存在しない場合の破壊確率

材料内部のある点の応力状態とク



図一 層理面が存在しない場合の安全性の余裕

一ロンの破壊規準の関係は 図-1 のように表わされる。なお、ここでは圧縮応力を正とする。いま、モールの応力円の中心から破壊規準までの距離を τ_f 、応力円の半径を τ_{\max} とすれば、安全性の余裕として、次式が定義できる。

$$Q_s = \tau_f - \tau_{\max} \dots\dots\dots (19)$$

これは、モールの応力円が破壊規準にどれだけ近づいたかを示すパラメーターである。なお、これはせん断破壊に対する安全性の余裕である。式 (19) は主応力および強度特性によって次のように表わされる。

$$Q_s = c \cos \phi + \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \phi - \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \dots\dots\dots (20)$$

一方、引張に対しては、抵抗しないものと仮定する。したがって、 σ_2 がこの場合の安全性の余裕を表わすことになる。すなわち、引張に対する安全性の余裕 Q_t は、次のように表わされる。

$$Q_t = \sigma_2 \dots\dots\dots (21)$$

式 (20) および式 (21) から明らかなように、 $Q_s \leq 0$ あるいは $Q_t \leq 0$ になれば、応力状態が破壊規準を超えるため、材料は破壊する。

安全性の余裕 Q_s および Q_t はいずれも確率変数であり、線形一次近似理論を用いれば、これらの期待値、および分散は次のように求められる。

$$E[Q_s] = E[c] \cos(E[\phi]) + \frac{1}{2} (E[\sigma_1] + E[\sigma_2]) \sin(E[\phi]) - \frac{1}{2} (E[\sigma_1] - E[\sigma_2]) \dots\dots\dots (22)$$

$$E[Q_t] = E[\sigma_2] \dots\dots\dots (23)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[Q_s] = & \left(\frac{\partial Q_s}{\partial c} \Big|_E \right)^2 \text{Var}[c] + \left(\frac{\partial Q_s}{\partial \phi} \Big|_E \right)^2 \text{Var}[\phi] \\ & + \left(\frac{\partial Q_s}{\partial c} \Big|_E \right) \left(\frac{\partial Q_s}{\partial \phi} \Big|_E \right) \text{Cov}[c, \phi] \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial Q_s}{\partial r_k} \Big|_E \right) \left(\frac{\partial Q_s}{\partial c} \Big|_E \right) \text{Cov}[r_k, c] \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial Q_s}{\partial r_k} \Big|_E \right) \left(\frac{\partial Q_s}{\partial \phi} \Big|_E \right) \text{Cov}[r_k, \phi] \\ & + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial Q_s}{\partial r_k} \Big|_E \right) \left(\frac{\partial Q_s}{\partial r_l} \Big|_E \right) \text{Cov}[r_k, r_l] \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

$$\text{Var}[Q_t] = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial r_k} \Big|_E \right) \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial r_l} \Big|_E \right) \text{Cov}[r_k, r_l] \dots\dots\dots (25)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q_s}{\partial c} &= \cos \phi, \\ \frac{\partial Q_s}{\partial \phi} &= -c \sin \phi + \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \cos \phi \\ \frac{\partial Q_s}{\partial r_k} &= \frac{1}{2} (\sin \phi - 1) \frac{\partial \sigma_1}{\partial r_k} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

$$\left. \begin{aligned} & + \frac{1}{2} (\sin \phi + 1) \frac{\partial \sigma_2}{\partial r_k} \end{aligned} \right\}$$

いま、要素内において、応力が一定であると仮定すれば、これらの期待値および分散は各要素に対して求まる。また、その場合、要素 i と要素 j の Q_s および Q_t の共分散は次の式によって求められる。

$$\begin{aligned} \text{Cov}[Q_{si}, Q_{sj}] = & \left(\frac{\partial Q_{si}}{\partial c} \Big|_E \right) \left(\frac{\partial Q_{sj}}{\partial c} \Big|_E \right) \text{Var}[c] \\ & + \left(\frac{\partial Q_{si}}{\partial \phi} \Big|_E \right) \left(\frac{\partial Q_{sj}}{\partial \phi} \Big|_E \right) \text{Var}[\phi] \\ & + \left(\frac{\partial Q_{si}}{\partial c} \Big|_E \right) \left(\frac{\partial Q_{sj}}{\partial \phi} \Big|_E \right) \text{Cov}[c, \phi] \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial Q_{si}}{\partial r_k} \Big|_E \right) \left(\frac{\partial Q_{sj}}{\partial c} \Big|_E \right) \text{Cov}[r_k, c] \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial Q_{si}}{\partial c} \Big|_E \right) \left(\frac{\partial Q_{sj}}{\partial r_k} \Big|_E \right) \text{Cov}[c, r_k] \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial Q_{si}}{\partial r_k} \Big|_E \right) \left(\frac{\partial Q_{sj}}{\partial \phi} \Big|_E \right) \text{Cov}[r_k, \phi] \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial Q_{si}}{\partial \phi} \Big|_E \right) \left(\frac{\partial Q_{sj}}{\partial r_k} \Big|_E \right) \text{Cov}[\phi, r_k] \\ & + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial Q_{si}}{\partial r_k} \Big|_E \right) \left(\frac{\partial Q_{sj}}{\partial r_l} \Big|_E \right) \text{Cov}[r_k, r_l] \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}[Q_{ti}, Q_{tj}] & = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial Q_{ti}}{\partial r_k} \Big|_E \right) \left(\frac{\partial Q_{tj}}{\partial r_l} \Big|_E \right) \text{Cov}[r_k, r_l] \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

ここで、添字 i および j は、要素 i, j に対する値を意味する。

安全性の余裕 Q_s および Q_t の確率モデルを正規分布と仮定すれば、せん断および引張りに対する破壊確率を求めることができる。せん断破壊に対しては、

$$\begin{aligned} P_r\{Q_s \leq 0\} & = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s - \mu_s}{\sigma_s}\right)^2\right] ds \\ & = \int_{-\infty}^{-\mu_s/\sigma_s} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

ここで、

$$\sigma_s^2 = \text{Var}[Q_s], \mu_s = E[Q_s] \dots\dots\dots (30)$$

引張破壊に対しても、同様にして、破壊確率を求めることができる。

(2) 層理面が存在する場合の破壊確率

層理面が、水平面より反時計方向に β の角度に位置するとき、層理面上の応力 (σ, τ) は、モールの応力円によって、図-2 のように表わされる。いま、この面におけるせん断強度を次のように定義する。

$$\tau_{\beta f} = c_{\beta} + \sigma \tan \phi_{\beta} \dots\dots\dots (31)$$

ここで、 c_{β} および ϕ_{β} は、それぞれ、層理面の粘着力および摩擦角を表わす。

層理面に沿うせん断破壊に対する安全性の余裕は次の

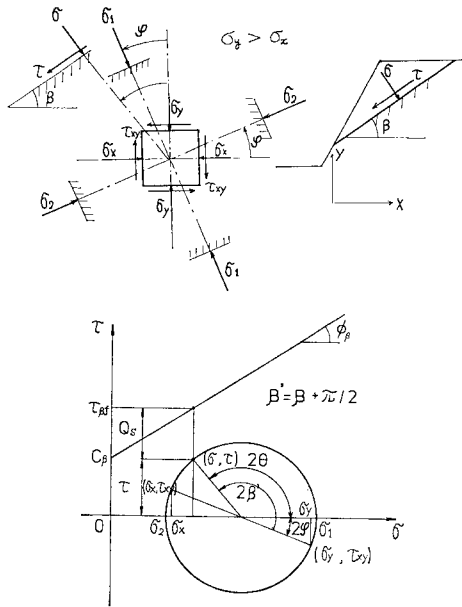


図-2 層理面が存在する場合の安全性の余裕

式によって与えられる。

$$Q_s = \tau_{\beta f} - \tau \quad \dots\dots\dots(32)$$

層理面上の垂直応力およびせん断応力は、主応力によって、次のように表わされる。

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\theta \quad \dots\dots\dots(33)$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\sin 2\theta \quad \dots\dots\dots(34)$$

ここで、 $\theta = \beta - \varphi + \pi/2$ $\dots\dots\dots(35)$

さらに、 φ は水平面からの最大主応力の方向（反時計方向を正とする）を表わし、次の式によって与えられる。

$$\varphi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \quad \dots\dots\dots(36)$$

式 (31), (33) および (34) を、式 (32) に代入すると、安全性の余裕は次のように表わされる。

$$Q_s = c_\beta + \left\{ \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\theta \right\} \tan \phi_\beta - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\sin 2\theta \quad \dots\dots\dots(37)$$

ここで、 c_β , ϕ_β は不確定要因である。したがって、 Q_s は確率変数であり、その期待値、分散および共分散を求めることができる。いま、線形一次近似理論を用いれば、期待値および分散は次のように与えられる。

$$E[Q_s] = E[c_\beta] + \left\{ \frac{1}{2}(E[\sigma_1] + E[\sigma_2]) + \frac{1}{2}(E[\sigma_1] - E[\sigma_2])\cos(2E[\theta]) \right\} \times \tan(E[\phi_\beta]) - \frac{1}{2}(E[\sigma_1] - E[\sigma_2])\sin(2E[\theta]) \quad \dots\dots\dots(38)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[Q_s] &= \left(\frac{\partial Q_s}{\partial c_\beta} \Big|_E \right)^2 \text{Var}[c_\beta] + \left(\frac{\partial Q_s}{\partial \phi_\beta} \Big|_E \right)^2 \text{Var}[\phi_\beta] \\ &+ \left(\frac{\partial Q_s}{\partial c_\beta} \Big|_E \right) \left(\frac{\partial Q_s}{\partial \phi_\beta} \Big|_E \right) \text{Cov}[c_\beta, \phi_\beta] \\ &+ \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial Q_s}{\partial r_k} \Big|_E \right) \left(\frac{\partial Q_s}{\partial r_l} \Big|_E \right) \text{Cov}[r_k, r_l] \\ &\dots\dots\dots(39) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_s}{\partial c_\beta} &= 1 \\ \frac{\partial Q_s}{\partial \phi_\beta} &= \frac{1}{\cos^2 \phi_\beta} \left\{ \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\theta \right\} \\ \frac{\partial Q_s}{\partial r_k} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial r_k} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial r_k} \right) \tan \phi_\beta \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial r_k} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial r_k} \right) (\cos 2\theta \cdot \tan \phi_\beta - \sin 2\theta) \\ &- (\sigma_1 - \sigma_2) (\tan \phi_\beta \cdot \sin 2\theta + \cos 2\theta) \\ &\cdot \frac{(\sigma_x - \sigma_y) \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial r_k} - \tau_{xy} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial r_k} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial r_k} \right)}{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \\ &\dots\dots\dots(40) \end{aligned}$$

いま、要素内において、応力が一定であると仮定し、さらに、水平面から β の方向に無数の層理面が存在すると仮定すれば、 Q_s の期待値および分散は、各要素に対して求められる。また、その場合、要素 i と要素 j の Q_s の共分散は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \text{Cov}[Q_{si}, Q_{sj}] &= \left(\frac{\partial Q_{si}}{\partial c_\beta} \Big|_E \right) \left(\frac{\partial Q_{sj}}{\partial c_\beta} \Big|_E \right) \text{Var}[c_\beta] \\ &+ \left(\frac{\partial Q_{si}}{\partial \phi_\beta} \Big|_E \right) \left(\frac{\partial Q_{sj}}{\partial \phi_\beta} \Big|_E \right) \text{Var}[\phi_\beta] \\ &+ \left(\frac{\partial Q_{si}}{\partial c_\beta} \Big|_E \right) \left(\frac{\partial Q_{sj}}{\partial \phi_\beta} \Big|_E \right) \text{Cov}[c_\beta, \phi_\beta] \\ &+ \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial Q_{si}}{\partial r_k} \Big|_E \right) \left(\frac{\partial Q_{sj}}{\partial r_l} \Big|_E \right) \text{Cov}[r_k, r_l] \\ &\dots\dots\dots(41) \end{aligned}$$

ここで、添字 i および j は、要素 i, j に対する値を意味する。なお、式 (39) および式 (41) において、 c_β と ϕ_β は、その他の不確定要因 r_k とは独立であると仮定している。

いま、 Q_s の確率モデルを正規分布と仮定すれば、層理面に沿うせん断破壊に対する破壊確率は式 (29) によって求めることができる。

4. 単一すべり面の破壊確率

前節においては、局所的な破壊確率を考えたが、斜面の信頼性解析においては、単一すべり面の破壊確率を求めることが重要である。いま、図-3 のように、単一すべり面が与えられたとすると（ここでは円弧すべり面を考える）、この面上に作用するせん断応力による滑動モ

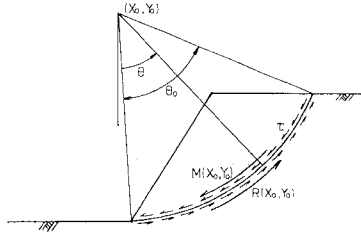


図-3 仮想すべり面上の滑动モーメントと抵抗モーメント

ーメントは次のように表わされる。

$$M(x_0, y_0) = r^2 \int_0^{\theta_0} \tau d\theta \dots\dots\dots (42)$$

ここで、rは円弧すべり面の半径を表わす。一方、この面のせん断強度による抵抗モーメントは、

$$R(x_0, y_0) = r^2 \int_0^{\theta_0} \tau_{\beta f} d\theta \dots\dots\dots (43)$$

となる。したがって、この面におけるすべりに対する安全性の余裕は次のように定義できる。

$$\begin{aligned} \bar{Q}_s(x_0, y_0) &= R(x_0, y_0) - M(x_0, y_0) \\ &= r^2 \int_0^{\theta_0} (\tau_{\beta f} - \tau) d\theta \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

式 (32) を考慮すれば、上式は次のように書ける。

$$\bar{Q}_s(x_0, y_0) = r^2 \int_0^{\theta_0} Q_s d\theta \dots\dots\dots (45)$$

いま、このすべり面が、図-4 のように、有限要素解析における要素を N 個切っているとすれば、式 (45) は近似的に次のように離散化できる。

$$\bar{Q}_s(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^N Q_{si} r \Delta l_i \dots\dots\dots (46)$$

ここで、 Q_{si} は要素 i の安全性の余裕、 Δl_i は要素 i をすべり面が切る長さである。なお、すべり面は要素内では直線とする。 $\bar{Q}_s(x_0, y_0)$ は確率量であり、その期待値と分散はそれぞれ次のようになる。

$$E[\bar{Q}_s(x_0, y_0)] = \sum_{i=1}^N E[Q_{si}] r \Delta l_i \dots\dots\dots (47)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[\bar{Q}_s(x_0, y_0)] &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\Delta l_i) (\Delta l_j) r^2 \text{Cov}[Q_{si}, Q_{sj}] \dots\dots\dots (48) \end{aligned}$$

いま、 $\bar{Q}_s(x_0, y_0)$ が正規分布に従うと仮定すれば、このすべり面での破壊確率は次式によって求められる。

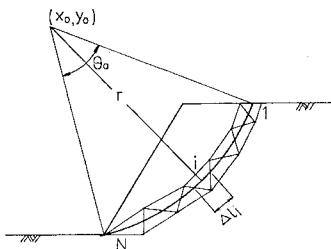


図-4 仮想すべり面が通過する要素

$$\begin{aligned} P_r\{\bar{Q}_s(x_0, y_0) \leq 0\} \\ = \int_{-\infty}^{-\bar{\mu}_s/\bar{\sigma}_s} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \dots\dots\dots (49) \end{aligned}$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mu}_s &= E[\bar{Q}_s(x_0, y_0)] \\ \bar{\sigma}_s &= \text{Var}[\bar{Q}_s(x_0, y_0)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (50)$$

なお、平面すべりに対しても、同様にして、破壊確率を求めることができる。

斜面の信頼性解析においては、全体の破壊確率（少なくとも一つのすべり面がすべる確率）を求めることが重要であるが、ここでは、単一すべり面の破壊確率のみを求めた。斜面全体の破壊確率については、今後の研究課題としたい。

5. 数値計算例および計算結果の考察

(1) 解析モデル

解析に用いる斜面の有限要素モデルは図-5に示す。材料定数としては、ヤング係数、ポアソン比、粘着力、内部摩擦角および単位体積重量の5つを考える。それぞれの平均値および変動係数は表-1に示す。なお、これらの値は数値計算例として仮定したものであり、その推定方法はこの分野の今後の研究課題であろう。

(2) 局部破壊

局部破壊に対する安全率の分布を調べるために、節点における平均応力を用いて、次式で定義される中央安全率を求めると図-6のようになる。

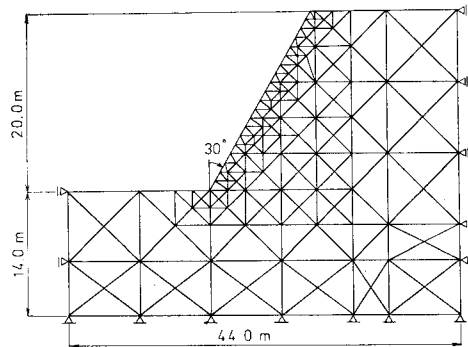


図-5 解析モデル

表-1 材料定数の平均値と変動係数

材料定数	平均値	変動係数
ヤング係数 E	10 000 kg/cm ² (980 MPa)	0.1
ポアソン比 ν	0.3	0.1
単位体積重量 r	0.002 3 kg/cm ³ (22.54 kN/m ³)	0.1
粘着力 c	0.1 kg/cm ² (9.8 kPa)	0.1
内部摩擦角 φ	35°	0.077

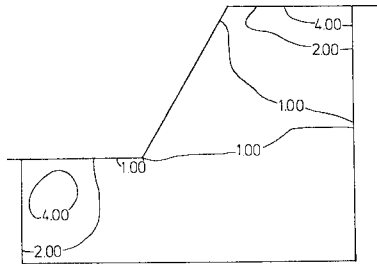


図-6 層理面の存在しない場合のせん断破壊に対する中央安全率

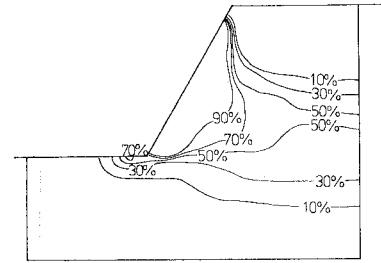


図-7 層理面の存在しない場合のせん断破壊に対する破壊確率の分布

$$F = \frac{E[\tau_f]}{E[\tau_{max}]} = \frac{E[c] \cos(E[\phi]) + \frac{1}{2}(E[\sigma_1] + E[\sigma_2]) \sin(E[\phi])}{\frac{1}{2}(E[\sigma_1] - E[\sigma_2])} \dots (51)$$

この図から、安全率が1以下の領域が、のり面から奥に広がり、また、のり先前方にもわずかに生ずることがわかる。一方、破壊面の方向を考慮しなければ、 Q_s および Q_t の期待値は、式 (22), (23) によって、それぞれ求められる。また、これらの分散は、 E, ν, r, c および ϕ が互いに独立であることから、式 (24), (25) において、

$$\begin{aligned} \text{Cov}[r_k, \phi] &= 0 \\ \text{Cov}[r_k, c] &= 0 \\ \text{Cov}[r_k, r_l] &= \text{Var}[r_k] \quad (k=l \text{ のとき}) \\ \text{Cov}[r_k, r_l] &= 0 \quad (k \neq l \text{ のとき}) \end{aligned}$$

とおけば、次式によって与えられる。

$$\begin{aligned} \text{Var}[Q_s] &= \left(\frac{\partial Q_s}{\partial c} \Big|_E \right)^2 \text{Var}[c] \\ &+ \left(\frac{\partial Q_s}{\partial \phi} \Big|_E \right)^2 \text{Var}[\phi] + \left(\frac{\partial Q_s}{\partial r} \Big|_E \right)^2 \text{Var}[r] \\ &+ \left(\frac{\partial Q_s}{\partial E} \Big|_E \right)^2 \text{Var}[E] + \left(\frac{\partial Q_s}{\partial \nu} \Big|_E \right)^2 \text{Var}[\nu] \dots (52) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[Q_t] &= \left(\frac{\partial Q_t}{\partial E} \Big|_E \right)^2 \text{Var}[E] \\ &+ \left(\frac{\partial Q_t}{\partial \nu} \Big|_E \right)^2 \text{Var}[\nu] + \left(\frac{\partial Q_t}{\partial r} \Big|_E \right)^2 \text{Var}[r] \dots (53) \end{aligned}$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q_s}{\partial c} &= \cos \phi, \\ \frac{\partial Q_s}{\partial \phi} &= -c \cos \phi + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \cos \phi \\ \frac{\partial Q_s}{\partial E} &= \frac{1}{2}(\sin \phi - 1) \frac{\partial \sigma_1}{\partial E} + \frac{1}{2}(\sin \phi + 1) \frac{\partial \sigma_2}{\partial E} \\ \frac{\partial Q_s}{\partial \nu} &= \frac{1}{2}(\sin \phi - 1) \frac{\partial \sigma_1}{\partial \nu} + \frac{1}{2}(\sin \phi + 1) \frac{\partial \sigma_2}{\partial \nu} \end{aligned} \right\}$$

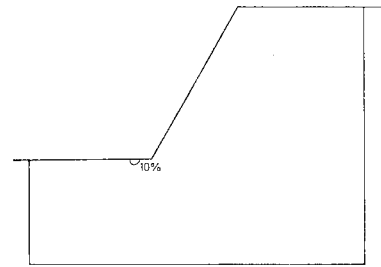


図-8 層理面の存在しない場合の引張破壊に対する破壊確率の分布

$$\frac{\partial Q_s}{\partial r} = \frac{1}{2}(\sin \phi - 1) \frac{\partial \sigma_1}{\partial r} + \frac{1}{2}(\sin \phi + 1) \frac{\partial \sigma_2}{\partial r} \dots (54)$$

ここで得られる Q_s および Q_t の期待値と分散を用いて、式 (29) から破壊確率を計算することができる。結果は 図-7 および 8 に示す。図-7 のせん断破壊確率の分布は、中央安全率の分布と類似している。ここで、中央安全率1は破壊確率 50% に対応することは当然である。引張りに対する破壊確率は、のり先において少し大きく現われているが、せん断破壊に対してその値は小さく、したがって、この斜面はせん断破壊が支配的である。

次に、破壊面の方向を考慮した場合の Q_s の期待値および分散は、それぞれ式 (38) および式 (52) によって求められる。ただし、 c, ϕ は層理面(破壊面)上を値を用いる。なお、式 (52) においては、次の値を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q_s}{\partial c_\beta} &= 1, \\ \frac{\partial Q_s}{\partial \phi_\beta} &= \frac{1}{\cos^2 \phi_\beta} \left\{ \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta \right\} \\ \frac{\partial Q_s}{\partial E} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial E} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial E} \right) \tan \phi_\beta \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial E} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial E} \right) (\cos \theta \cdot \tan \phi_\beta - \sin \theta) \\ &- (\sigma_1 - \sigma_2) (\tan \phi_\beta \cdot \sin \theta + \cos \theta) \\ &\cdot \frac{(\sigma_x - \sigma_y) \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial E} - \tau_{xy} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial E} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial E} \right)}{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2} \dots (55) \end{aligned} \right\}$$

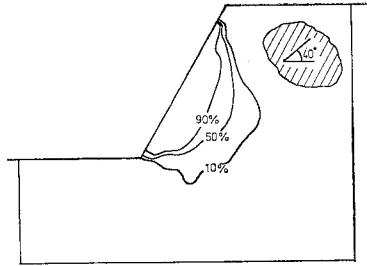


図-9 層理面が存在する場合 ($\beta=40^\circ$) のせん断破壊に対する破壊確率

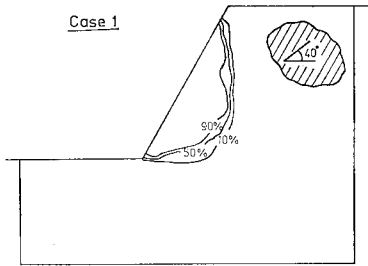


図-10 層理面が存在する場合 ($\beta=40^\circ$) のせん断破壊に対する破壊確率 (Case-1)

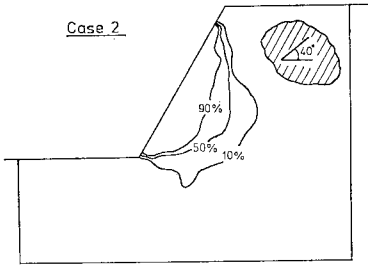


図-11 層理面が存在する場合 ($\beta=40^\circ$) のせん断破壊に対する破壊確率 (Case-2)

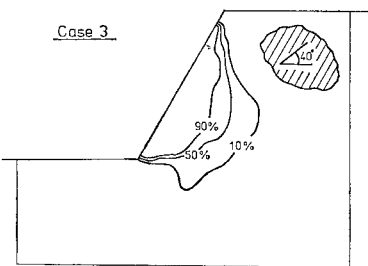


図-12 層理面が存在する場合 ($\beta=40^\circ$) のせん断破壊に対する破壊確率 (Case-3)

ここで、 c_β 、 ϕ_β は、それぞれ層理面上の粘着力および摩擦角を表わす。 $\partial Q_s/\partial \nu$ および $\partial Q_s/\partial r$ は $\partial Q_s/\partial E$ に対すると同様の式によって求められる。

ここで得られる Q_s の期待値と分散を用い、式 (29) から破壊確率を求めることができる。水平面から $\beta=40^\circ$ の位置に層理面が存在する場合の計算結果を 図-9

に示す。この結果は、破壊確率の大きく現われる領域がのり面付近に限られることを示している。

また、図-7 と比較してこの場合は、のり先前方に大きな破壊確率を示す領域は生じない。

表-2 変動係数を変化させた場合

Case	E	ν	r	c_β	ϕ_β
1	0.1	0.1	0.1	0.1	0
2	0.1	0.1	0.1	0	0.077
3	0.1	0.1	0	0.1	0.077

次に、 c_β 、 ϕ_β および r が、破壊確率に与える影響を調べるために、表-2 に示す3つのケースについて解析を行う。すなわち、Case 1 は ϕ_β が確定値である場合、Case 2 および3は、それぞれ、 c_β および r が確定値を取る場合である。計算結果は、図-10, 11, 12 に示す。ただし、これらは $\beta=40^\circ$ に対する結果である。図-9 と比較すると明らかなように、Case 2 および3は 図-9 の結果とほぼ等しい。一方、Case 1 は、破壊確率 10~90% の位置がほぼ等しいところにある。すなわち、破壊確率の変化の勾配が非常に急になっている。これらの結果から、摩擦角 ϕ_β が破壊確率に最も大きな影響を及ぼすことがわかる。

(3) 単一すべり面の破壊

a) 中央安全率

単一すべり面の中央安全率は、円弧すべりの場合、式 (42) および (43) から次のように定義される。

$$F = \frac{R(x_0, y_0)}{M(x_0, y_0)} = \frac{\int_0^{\theta_0} (\tau_\beta f r) r d\theta}{\int_0^{\theta_0} (\tau r) r d\theta}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^N \tau_\beta f_i d l_i}{\sum_{i=1}^N \tau_i d l_i} \dots \dots \dots (56)$$

ここで、 τ_i は要素 i のすべり面に作用するせん断応力、

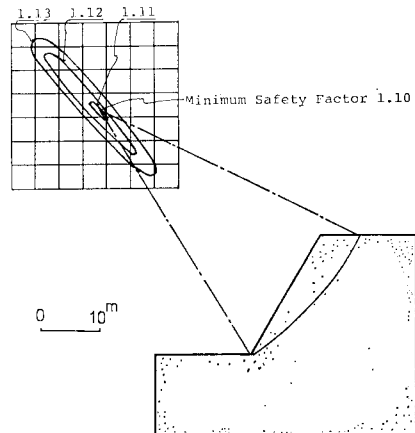


図-13 有限要素解析によって得られる安全率

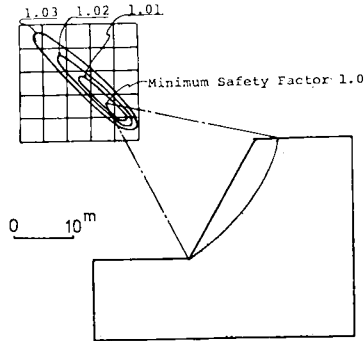


図-14 極限平衡法によって得られる安全率

$\tau_{\beta fi}$ はその面のせん断強度を表わす。 dl_i は要素 i をすべり面が切る長さである。

式 (56) によって得られる F と、すべり面の円弧の中心 (x_0, y_0) との関係を 図-13 に示す。なお、参考までに、極限平衡法(付録-1 参照)によって得られる F と (x_0, y_0) の関係を 図-14 に示す。

次に、平面すべりの場合について考えてみる。この場合も中央安全率 F は式 (56) によって計算できる。ここでの例題において、平面すべりに対する F を求め、それをすべり面の位置(のり肩からの距離 S で表わす)との関係で示すと 図-15 のようになる。ここでも比較のために、極限平衡法によって得られた値を示してある。この結果、すべり面がのり尻に近づくにつれて両者は一致するが、 S が小さくなるにつれて、有限要素法は極限平衡法より小さい安全率を与えることがわかる。

b) 破壊確率

4. で示した方法によって単一すべり面の破壊確率を求めてみよう。なお、ここでは平面すべりを仮定し、表-1 に示すケースおよび表-2 に示す Case 1~3 の4つのケースについて解析を行う。解析結果は 図-16~19 に示す。これは破壊確率をすべり面の位置(のり肩からの距離 S で表わす)との関係で表わしたものである。なお、これらの図には、比較のために、極限平衡法によって得られる破壊確率をも合わせて示してある。これらの図から明らかなように、Case 1 が他の結果と異

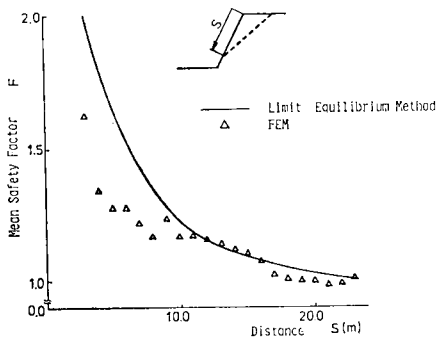


図-15 すべり面の位置と中央安全率の関係

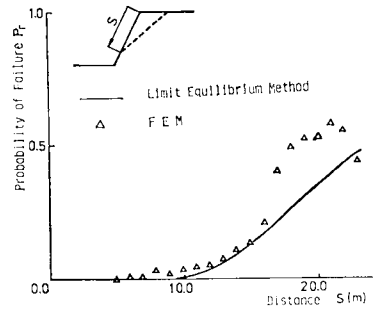


図-16 すべり面の位置と破壊確率の関係(表-1に示す変動係数を用いた場合)

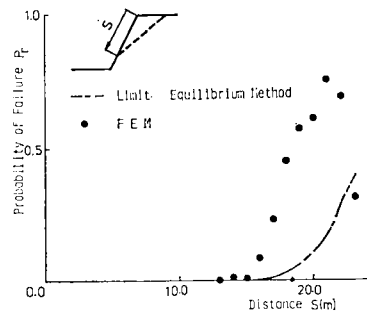


図-17 すべり面の位置と破壊確率の関係(Case-1)

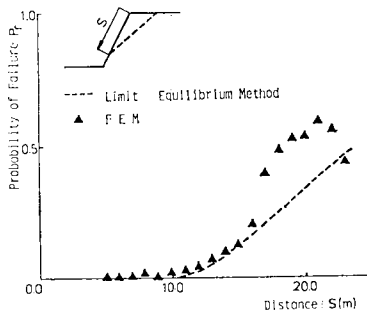


図-18 すべり面の位置と破壊確率の関係(Case-2)

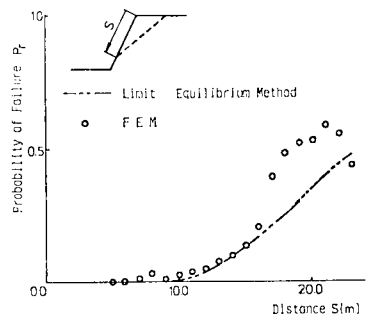


図-19 すべり面の位置と破壊確率の関係(Case-3)

なっている。これは、内部摩擦角 ϕ が、破壊確率に対し、最も大きな影響を与えることを示している。また、

すべてのケースについていえることであるが、最も大きな破壊確率を与えるすべり面は、のり尻から少し上のところであり、のり尻に最大の破壊確率が生ずる極限平衡法による結果と異なることは興味深い。

6. むすび

本論文においては、斜面安定問題を対象に、まず、線形一次近似法に基づく有限要素法の定式化を示し、次に、材料の破壊規準を与えることによって、材料内部の局所的な破壊確率を求める方法、および、与えられたすべり面の破壊確率を求める方法を提案した。そして最後に、具体的な計算例を示し、斜面安定に対する安全率および破壊確率を求め、若干の考察を行った。その結果、地盤内の局所破壊、および、斜面の全体破壊に対する破壊確率を、有限要素法によって求め得ることが明らかとなった。このことは、複雑な地質構造の地盤、さらに、形状の複雑な斜面の破壊確率を容易に求め得ることを示している。

本研究において、円弧すべりに関する計算は本学大学院修士課程学生大西勝君（現・清水建設）に負うところが大きい。ここに感謝の意を表します。

付録一 極限平衡法による安全率

円弧すべりに対する安全率は分割法によって次のように求められる。付図一に示す斜面のり先を通るすべり面について、抵抗モーメント R は、

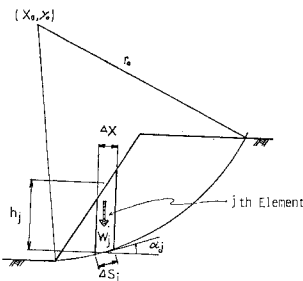
$$R(x_0, y_0) = \sum_j [cdS_j + W_j \cos \alpha_j \tan \phi] r_0 \\ = \sum_j [cdS_j + rh_j dx_j \cos \alpha_j \cdot \tan \phi] r_0 \dots\dots\dots (A \cdot 1)$$

ここで、 c および ϕ はそれぞれすべり面の粘着力および摩擦角、 r は地盤材料の単位体積重量を表わす。

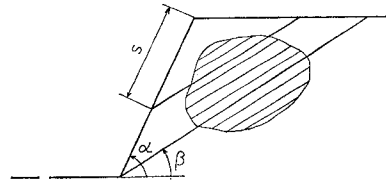
一方、滑動モーメント M は、

$$M(x_0, y_0) = \sum_j [W_j \sin \alpha_j] r_0 \\ = \sum_j [rh_j dx_j \cdot \sin \alpha_j] r_0 \dots\dots\dots (A \cdot 2)$$

安全率 F は次式で求められる。



付図一 円弧すべりにおける幾何学的関係



付図二 層理面を有する斜面の幾何学的関係

$$F = R(x_0, y_0) / M(x_0, y_0) \dots\dots\dots (A \cdot 3)$$

付録二 極限平衡法による破壊確率

材料定数 (c, ϕ, r) が完全相関の場合の極限平衡法による破壊確率を、層理面に沿う平面すべりについて示しておく。

付図二に示す斜面において、のり肩から S の距離にある層理面に注目すれば、この面の抵抗力 $R(S)$ は、

$$R(S) = \frac{rS^2 \sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin(\alpha - \beta)}{2 \sin \beta} \tan \phi_\beta \\ + S \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot c_\beta \dots\dots\dots (A \cdot 4)$$

一方、この面の滑動力 $M(S)$ は、

$$M(S) = \frac{rS^2 \sin \alpha \cdot \sin(\alpha - \beta)}{2} \dots\dots\dots (A \cdot 5)$$

この層理面のすべりに対する安全性の余裕 $Q(S)$ は次のように定義する。

$$Q(S) = R(S) - M(S) = r(S) \cdot r \tan \phi_\beta \\ + q(S) \cdot c_\beta - p(S) \cdot r \dots\dots\dots (A \cdot 6)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} r(S) &= \frac{S^2 \sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin(\alpha - \beta)}{2 \sin \beta} \\ q(S) &= S \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \\ p(S) &= \frac{S^2 \sin \alpha \cdot \sin(\alpha - \beta)}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A \cdot 7)$$

いま、 c_β, ϕ_β, r が互いに独立であると考え、線形一次近似法を用いて、安全性の余裕 $Q(S)$ に対する平均値と分散は次のように求められる。

$$E[Q(S)] = r(S) \cdot E[r] \cdot E[\tan \phi] \\ + q(S) E[c] - p(S) E[r] \dots\dots\dots (A \cdot 8)$$

$$\text{Var}[Q(S)] = \left(\frac{\partial Q(S)}{\partial r} \right)^2 \sigma_r^2 + \left(\frac{\partial Q(S)}{\partial \phi} \right)^2 \sigma_\phi^2 \\ + \left(\frac{\partial Q(S)}{\partial c} \right)^2 \sigma_c^2 = \{r(S) \tan \phi - p(S)\}^2 \sigma_r^2 \\ + r(S)^2 r^2 \left(\frac{1}{\cos^2 \phi} \right) \sigma_\phi^2 + q^2(S) \sigma_c^2 \dots\dots\dots (A \cdot 9)$$

ここで、 $\sigma_r^2, \sigma_\phi^2, \sigma_c^2$ は、それぞれ r, ϕ, c の分散を表わす。

$\mu = E[Q(S)], \sigma^2 = \text{Var}[Q(S)]$ とおき、 $Q(S)$ を正規

分布と仮定すれば、単一すべり面の破壊確率は次のように求められる。

$$P_r\{Q(S) \leq 0\} = \int_{-\infty}^{-\mu/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

.....(A・10)

参 考 文 献

- 1) Desai, C.S. : Numerical Methods in Geotechnical Engineering, McGraw-Hill, N.Y., 1977.
- 2) Gudehus, G. : Finite Elements in Geomechanics, J. Wiley & Sons, London, 1977.
- 3) 川本 純万・林 正夫 : 地盤工学における有限要素解析, 培風館, 1978.
- 4) Su, Y.L., Y.J. Wang and R. Stefanko : Finite Element Analysis of Underground Stresses Utilizing Stochastically Simulated Material Properties, Proc. of 11th U.S. Symposium on Rock Mechanics, Berkely, pp. 253~266, 1969.
- 5) Kovari, K., H. Hagedorn and P. Fritz : Parametric Studies as a Design Aid in Tunnelling, Proc. of 2nd Int. Conf. Numerical Methods in Geomechanics, Blacksburg, Vol. 2, pp. 773~790, 1976.
- 6) Chugh, A.K. : Parametric Study on the Plasticity Parameters in Elastic-Plastic Analysis of Underground Openings, Can. Geotech. J., Vol. 17, pp. 136~146, 1980.
- 7) Cambou, B. : Application of First-order Uncertainty Analysis in the Finite Element Method in Linear Elasticity, Proc. of 2nd Int. Conf. Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, Aachen, pp. 67~87, 1975.
- 8) Cornell, C.A. : First-order Uncertainty Analysis of Soils Deformation and Stability, Proc. 1st Int. Conf. Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, Hong Kong, pp. 130~143, 1971.
- 9) Ang, A. H.S. : Structural Risk Analysis and Reliability Based Design, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 99, No. ST 9, pp. 1891~1910, 1973.
- 10) Hasselman, T.K. and G.C. Hart : Nodal Analysis of Random Structural Systems, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 98, No. EM 3, pp. 561~579, 1972.
- 11) Alonso, E.E. : Risk Analysis of Slopes and its Application to Slopes in Canadian Sensitive Clays, Géotechnique, Vol. 26, No. 3, pp. 453~472, 1976.
- 12) Yong, R.N., E. Alonso and M.M. Tabba : Application of Risk Analysis to the Prediction of Slope Instability, Can. Geotech. J., Vol. 14, pp. 540~553, 1977.
- 13) 高岡 宜善・白木 渡・山根和弘 : 多くの不規則要因で構成される構造部材の確率過程論による信頼性解析, 土木学会論文報告集, No. 269, pp. 29~39, 1978.
- 14) 山田善一・古川浩平・北島 清 : 長大吊橋タワーピアー系の地震応答に及ぼす不確定要因の影響に関する研究, 土木学会論文報告集, No. 293, pp. 23~33, 1980.
- 15) 土居康成 : 岩盤斜面の信頼性解析, 神戸大学大学院工学研究科, 修士論文, 1980.

(1982.1.12・受付)